

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXVII

1930 (VIII)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1930 (VIII)

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1930 (Anno VIII).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Sopra le superficie algebriche trasformabili in rigate.* Nota ⁽¹⁾ del Socio F. ENRIQUES.

Alcune conferenze tenute all'Università di Roma mi hanno dato occasione a ritornare sui teoremi fondamentali per la teoria delle superficie che son contenuti nella memoria scritta in collaborazione con Castelnuovo per gli « Annali di Matematica » (1901) e nell'altra mia memoria del Circolo Matematico di Palermo: *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (1905). Mi è avvenuto così di ricostruire la dimostrazione dei teoremi di riferibilità a rigata, unificando i risultati espressi nelle due memorie, rendendo assai più semplice la trattazione della prima e evitando le critiche a cui possono andare incontro alcuni ragionamenti della seconda.

Esporrò qui soltanto le linee generali di questa ricostruzione, che sarà poi sviluppata dal prof. H. Geppert, il quale - avendo seguito le mie conferenze - collabora già da qualche tempo con me per dare a tutta la materia l'ordine più conveniente.

Come fondamento della ricerca pongo il teorema che le superficie di genere geometrico $p_g = 0$ e di genere numerico $p_a = -p$ ($p > 0$) posseggono un fascio irrazionale di curve, C , razionali o irrazionali, del genere p .

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1930.

Designando con π il genere delle C e con Δ il numero delle C dotate di punto doppio, l'espressione dell'invariante di Zeuthen-Segre ci dà:

$$\Delta + 4(p-1)(\pi-1) = 13 - 12p - p^{(1)}$$

dove $p^{(1)}$ designa il genere lineare della superficie. Di qui

$$(1) \quad \Delta + 4(p-1)(\pi-1) = 13 - 12p - p^{(1)}.$$

Ma è facile riconoscere che, per $p > 0$, la superficie è tale che sopra di essa l'aggiunzione non si può estinguere. La dimostrazione si fa anzitutto per $p > 1$ e poi anche per $p = 1$. Infatti per $p > 1$, qualsiasi curva appartenente alla superficie (contenendo un'involuzione del genere p) ha il genere $\geq 2p - 1$, e quindi possiede certo ∞^{p-2} curve aggiunte.

Per $p = 1$, basta osservare che, qualora l'aggiunzione - a partire da un sistema lineare qualsiasi di curve - si estinguesse, conducendo ad un ultimo sistema aggiunto di curve ellittiche, quest'ultimo sistema dovrebbe essere ∞' almeno, ovvero essere aggiunto d'un sistema lineare di curve di genere 2, $|L|$: allora $|L|$ apparterrà a una serie continua $\{L\}$ composta di ∞' sistemi lineari disequivalenti, ciascuno dei quali avrà una curva aggiunta ellittica, e perciò (essendo $p_g = 0$) si troveranno sopra la superficie ∞' curve ellittiche K , formanti una serie ellittica di grado $n \geq 1$. Dall'esistenza di tali curve ellittiche K di grado $n \geq 1$, si deduce facilmente che la superficie è riferibile a una rigata, essendo $\pi = 0$ (per $n > 1$ avremo un fascio di curve ellittiche con punti base, per $n = 1$ il sistema doppio $|2K|$ sarà di genere due e condurrà alla rappresentazione della superficie su un piano doppio).

Resta dunque stabilito che per le nostre superficie con $p_g = 0$ e $p_a = -p < 0$, l'aggiunzione non si può estinguere, e pertanto che $p^{(1)} > 0$.

Così lo studio delle superficie su cui l'aggiunzione si estingue si può limitare al caso razionale e alla trattazione che per questo caso dette già il Castelnuovo, semplificata poi in successive memorie di Castelnuovo-Enriques. La conoscenza del fascio irrazionale sopra la superficie ha reso superflui i ragionamenti più approfonditi a cui si era dovuti ricorrere nella citata memoria comune degli « Annali ».

Procedendo poi nell'esame delle superficie con un fascio irrazionale di curve C , ed avendo ormai provato che $p^{(1)} \geq 1$, si deduce senz'altro dalla (1):

$$o \quad \pi = 0 \text{ (rigate),} \quad \text{ovvero} \quad \Delta = 0, p = 1, p^{(1)} = 1.$$

Pertanto resta solo da studiare il caso $p = 1$, che - all'infuori dell'ipotesi $\pi = 0$ - dà luogo a supporre $\pi = 1$ o $\pi > 1$.

Il caso $\pi = 1$ si esaurisce com'è indicato nella mia memoria del Circolo di Palermo. Per $\pi > 1$, il ragionamento ivi svolto deve essere ripreso ed emendato in un punto (p. 7 della Nota) perchè, dopo avere costruito una

curva *parabicanonica* K è facile convincersi che, se questa non appartenga ad un fascio, non si può costruirne un'altra distinta e disequivalente.

Ecco dunque come condurremo la discussione. La nostra superficie F possiede, per ipotesi, un fascio ellittico di curve di genere π senza punti doppi. Sopra una curva C del fascio si ha un certo numero s di serie $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$ semiquadricaniche, cioè serie disequivalenti dalla bicanonica, i cui doppi coincidono nella serie quadricanonica. Codeste serie si scambiano, in generale, l'una nell'altra, al variare di C nel fascio ellittico di F . Ma, in corrispondenza ad ogni C , si può costruire razionalmente un gruppo di s curve C' birazionalmente identiche, ciascuna delle quali risponda alla C stessa ed ad una delle s $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$ definite sopra di essa. In tal guisa si potrà sostituire alla nostra superficie F una F' coi medesimi caratteri — rappresentata sulla F multipla senza curva di diramazione — che contiene parimente un fascio di curve C' di genere π , senza punti doppi, su ciascuna delle quali viene definita razionalmente una serie $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$ semiquadricanonica. Sulla superficie F' consideriamo le curve M che segano sulle C' gruppi della detta serie $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$. Le curve $2M$ segnando sulle C' gruppi della serie quadricanonica, è facile riconoscere che il sistema continuo $\{2M\}$ equivale alla somma di un certo numero di curve C' e d'una curva paraquadricanonica, la cui esistenza ci prova come quella della curva parabicanonica nella mia Nota citata di Palermo.

Avremo pertanto

$$\{2M\} = \{rC' + 2K\},$$

designando con K la curva parabicanonica.

Ora, se r è pari, i caratteri di $\{M\}$ sono quelli stessi di $\left\{\frac{r}{2}C + K\right\}$ e quindi si prova egualmente l'esistenza d'una M spezzata in tante curve C' e in una curva Θ parasemiquadricanonica: questa curva, come la K , è ellittica ma disequivalente da K e perciò *distinta* da essa; ora le due curve equivalenti 2Θ e $2K$ permettono di costruire in F' un fascio lineare di curve ellittiche (come nella mia Nota di Palermo); ne risulta poi che tutte le C' e quindi anche tutte le C di F , hanno eguali moduli, ecc.

Ma che cosa accade se r è dispari? In questo caso non si arriva più alla conclusione voluta; però si riconosce tosto che allora il genere delle C e delle C' , π , deve essere dispari:

$$\pi = 2\rho - 1.$$

Dunque il nostro ragionamento vale per π pari. Se π è dispari, conviene considerare in luogo delle serie semiquadricaniche sulle C , le serie che moltiplicate per un altro intero t ($\neq 2$) danno il t -plo della serie bicanonica. Il ragionamento si svolge in modo affatto analogo e conduce allo

scopo tutte le volte che π sia divisibile per t . Basta dunque aver preso t eguale ad un divisore, per esempio al più piccolo divisore primo, di π .

La conclusione a cui si è condotti è quella stessa che si trova nella citata Nota di Palermo:

Le superficie con $p_g = 0$, $p_a = -1$, che non siano riferibili a rigata appartengono alla famiglia delle superficie ellittiche (con ∞' trasformazioni in sé), rappresentabili sopra un cilindro ellittico multiplo con un certo numero di sezioni piane parallele di diramazione. E infine le condizioni di riferibilità a rigata d'una superficie sono espresse dall'annullamento del quadrigenere e del sestigenere

$$P_4 = P_6 = 0.$$

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Parallelismo generalizzato.* Nota⁽¹⁾ di G. BARBA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Ci proponiamo di estendere (limitandoci, in questa Nota, ad una V_2) il concetto di parallelismo, includendo, naturalmente, in tale estensione, quello del Levi-Civita (che si ritrova nel caso che un certo sistema ∞^2 di curve, che sarà definito in seguito, si riduca a quello delle geodetiche).

Nella generalizzazione in questione, che permette d'inquadrare il teleparallelismo, si tien conto anche degli elementi del secondo ordine, oltre quelli del primo.

Per semplicità svilupperemo la trattazione nel caso di una V_2 immersa in un S_3 euclideo.

Premettiamo come fondamentali:

- a) la metrica euclidea (e coordinate cartesiane ortogonali) sulla S_3 .
- b) un (qualunque) sistema di coordinate curvilinee e l'elemento d'arco subordinato alla metrica ed alle coordinate nella V_2 .

Conseguenzialmente:

- c) una metrica angolare euclidea nella S_3 e quindi nella V_2 per le direzioni tangenziali.

A)

2. Supponiamo, dapprima, che la V_2 sia un ordinario piano euclideo.

Sia dato nel piano euclideo un qualunque sistema ∞^2 di curve T (p. es.: traiettorie dinamiche, od anche traiettorie di raggi luminosi) tale

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1930.

che, assegnati i punti P e Q sufficientemente vicini, per essi resti determinata una ed una sola curva del sistema T . Assumeremo come parallele in due punti P e Q , rispettivamente, le direzioni, in essi, delle tangenti t_0, t_1 alla curva del sistema passante per detti punti.

Naturalmente, nel caso de l'esempio citato dei raggi luminosi, ciò equivale ad ammettere che l'osservatore si riferisca proprio al raggio stesso.

Spicchiamo da P una qualunque altra direzione u_0 . Assumeremo, di conseguenza, come parallela alla u_0 la direzione u_1 spiccata da Q formante con la tangente in questo punto un angolo uguale a quello formato da u_0 con t_0 .

Ne seguono i seguenti fatti:

α) Attraverso il sistema T si ha un trasporto rigido dei fasci di direzioni spiccate da un punto del piano.

β) Il sistema T è formato di curve autoparallele.

γ) Il sistema T definisce un teleparallelismo rigido per cui è invariante l'angolo θ di due direzioni comunque trasportate.

3. Possiamo far vedere, reciprocamente, che dato un teleparallelismo rigido nel piano è sempre possibile definire un sistema ∞^2 di curve autoparallele che gli equivale.

Osserviamo che un teleparallelismo rigido equivale ad assumere, in un piano, quale parallela in Q ad una direzione spiccata da P , non già la parallela euclidea, bensì la direzione ottenuta da questa dopo la rotazione d'un certo angolo $\alpha = \alpha(P, Q)$, con la condizione ovvia di continuità: $\lim_{Q \rightarrow P} \alpha(P, Q) = 0$ ⁽¹⁾.

Quindi, affinché una curva possa essere autoparallela occorre che, scelti su di essa due punti infinitamente vicini P e $P_1 \equiv P + dP$, i rispettivi versori delle tangenti t e t_1 siano tali che risulti:

$$t_1 = e^{i\alpha(P, P_1)} \cdot t.$$

In sostanza, ciò equivale a dire che l'angolo di contingenza di cui ruota la tangente nel passaggio da P a P_1 , dev'essere precisamente uguale a quello infinitesimo di rotazione voluto dal teleparallelismo allorchè ci si riferisca ai due punti infinitamente vicini. Cioè, in definitiva:

$$d\omega = A(x, y)dx + A(x, y)dy.$$

(1) Si suppone che α , in quanto funzione di x, y e $\Delta x, \Delta y$ sia regolare (o almeno dotata di derivata continua) anche rispetto a Δx e Δy . Si osservi che, nell'infinitesimo deve risultare lineare, cioè, ad es., movendoci da P a Q e da Q ad R (nell'intorno di P) deve esserci: I) omogeneità; II) inversione di segno, ove si percorra un tratto in due sensi diversi; III) a meno di infinitesimi di ordine superiore deve valere un principio di somma geometrica. Resta così, esclusa, ad esempio, la possibilità di $d\omega^2 = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2$, e resta solo la forma da noi ammessa.

Dunque, le curve autoparallele restano definite dall'equazione del 2° ordine:

$$\frac{1}{\rho} = A(x, y) \frac{dx}{ds} + B(x, y) \frac{dy}{ds}$$

che definisce, appunto, un sistema ∞^2 di curve.

4. Da quanto precede risulta che nel piano, un parallelismo generalizzato può essere definito in uno dei seguenti equivalenti modi:

I. *Teleparallelismo rigido* (con riferimento generico e rigido di direzioni spiccate da punti qualsiasi P e Q).

II. *Definizione d'un sistema ∞^2 di curve autoparallele fondamentali.*

In base a quest'ultima definizione, il teleparallelismo rigido fra due punti P e Q si ottiene considerando come « eguali » un versore del fascio Q ed uno del fascio P, allorchando il primo ha subito una rotazione eguale a quella subita dalla tangente in P per passare in Q.

5. *Parallelismo generale senza residuo.*

Un parallelismo, nel piano, lo diremo « senza residuo », allorchè, dati tre punti: P, Q, R, il trasporto lungo autoparallele avviene in modo che, percorrendo il triangolo PQR, a partire da P con ritorno in P, ogni direzione si viene a sovrapporre a quella di partenza. Trasportando, dunque, il vettore tangenziale u da P a Q, esso resta autoparalelo (lungo la PQ). Da Q sia spiccata l'autoparalela QR formante l'angolo θ_1 con PQ. Ne segue che il vettore originario u , trasportato lungo la QR, formerà con la tangente in R l'angolo θ_1 . Spicchiamo, invece, direttamente la PR formante con la PQ l'angolo θ_2 . La direzione u formerà con la PR l'angolo θ_2 , che sarà l'angolo da essa formato con la tangente in R alla PR.

Possiamo, dunque, concludere che, qualunque sia il punto P, affinchè non vi sia residuo è necessario che la PR incontri la QR sotto l'angolo $\theta_2 - \theta_1$.

Ovviamente ciò accadrà allora ed allora soltanto che le autoparallele si distribuiscono in una semplice infinità di sistemi, ciascuno dei quali incontri sotto angolo costante un altro sistema qualunque⁽¹⁾. Per ottener ciò occorre e basta che ciascun sistema incontri sotto angolo costante un sistema fisso (del resto arbitrario). Quindi:

un parallelismo piano senza residuo si ottiene assegnando un sistema ∞^1 di curve e considerando, poi, il sistema ∞^2 delle traiettorie ad angolo costante rispetto ad esso: queste saranno le autoparallele.

In particolare, il sistema ∞^2 di curve autoparallele si decomporrà in una semplice infinità di sistemi ortogonali.

Fissiamo, ad esempio, quale sistema fondamentale il fascio di semirette uscenti da un punto O. È noto che la spirale logaritmica è la curva che

(1) RICCI, *Lezioni sulla teoria delle superficie*. (litogr.; Padova, Druker, 1898).

incontra sotto angolo costante i raggi vettori: curve autoparallele saranno, quindi, le spirali logaritmiche aventi il polo in O .

Ne segue che il trasporto d'un fascio di direzioni da un punto all'altro del piano, avviene considerando come parallele le tangenti alla spirale logaritmica passante pei detti punti, oppure considerando come parallele le direzioni determinate dalle congiungenti il polo con i punti dati. Risulteranno parallele, altresì, le direzioni normali a queste, ossia quelle delle tangenti ai cerchi concentrici al polo; sicchè, nel caso particolare in esame, tutti i fasci di direzioni spiccate da un qualsiasi punto del piano sono semplicemente riferiti:

a) mantenendo il concetto usuale di angolo.

b) riferendo tra di loro come parallele le direzioni radiali.

Ancora: fissato quale fondamentale il sistema delle tangenti ad una curva, si assumeranno quali curve autoparallele, le evolventoidi della curva stessa.

Si noti che un sistema fondamentale deve essere scelto in modo che le curve del sistema stesso non si incontrino genericamente fra di loro.

B)

6. Passiamo, ora, ad una superficie qualunque.

È chiaro che il rapporto tra parallelismo generalizzato e quello del Levi-Civita è quello esistente tra parallelismo piano generalizzato ed euclideo.

Attualmente sulla superficie resta fissato un sistema ∞^2 di autoparallele.

Dati su di essa due punti P e Q ed in essi i fasci delle tangenti, due direzioni spiccate da P e da Q sono parallele se formano angoli eguali con le tangenti (orientate) in P e Q all'autoparallela passante per questi punti.

Anche qui, ripetendo lo stesso ragionamento tenuto nel piano, si può mostrare che teleparallelismo e trasporto rigido per autoparallele si equivalgono e che per avere parallelismo senza residuo occorre avere sulla V_2 un sistema fondamentale e relative traiettorie isocline rispetto ad esso, quale sistema ∞^2 di curve autoparallele.

Così, pensando alla sfera, si può assumere quale sistema fondamentale quello dei meridiani: le traiettorie isocline saranno lossodromie attorno a poli fissi.

È da notare che il parallelismo per lossodromie si presenta ben spontaneo, ad es.: allorchè occorra riferire fenomeni naturali, avendo come solo elemento il Nord ed il Sud (poli dei meridiani), o nella navigazione.

Ripetendo lo stesso ragionamento fatto nel piano (caso delle logaritmiche), poichè le lossodromie tagliano sotto angolo costante i meridiani passanti pei poli, si vede che ciò equivale a riferire due fasci tangenti in due punti distinti, assumendo come parallele le direzioni dei meridiani passanti per tali punti o quelle dei paralleli, cioè equivale a reticolare la superficie

mediante un sistema di coordinate geografiche a prendere le direzioni delle coordinate come autoparallele.

Ciò perchè, come nel caso del piano, rette uscenti da un punto e cerchi ad esso concentrici sono casi particolari delle logaritmiche aventi quel polo, così, sulla sfera, meridiani e paralleli riferiti a due poli fissi sono casi particolari delle lossodromie a tali poli relative.

7. Volendo riattaccare i concetti ora sviluppati al parallelismo di Levi-Civita, si troveranno le condizioni analitiche osservando che, partiti da P e giunti in $P + dP$ (con elemento di sviluppabile circoscritta alla superficie) si ha nel piano di sviluppo parallelismo euclideo.

Osserviamo (ed è facile giustificarlo: basta circoscrivere alla curva data T la sviluppabile dei piani tangenti: dopo lo sviluppo la curva Γ che si ottiene ha la curvatura coincidente con quella geodetica di T) che la curvatura geodetica di una curva di V_2 è uguale alla curvatura ordinaria che nel punto ha l'immagine di sviluppo della curva stessa.

Notando, quindi, che il parallelismo generalizzato porta nello sviluppo della superficie sulla sviluppabile circoscritta non al parallelismo euclideo ma a quello generalizzato, se ne deduce che le equazioni di parallelismo si otterranno traducendo analiticamente tale fatto, ed anche, nel modo che si è detto al n. 3.

Ed allora, le curve autoparallele saranno definite da

$$\frac{1}{\rho} = A(x, y) \frac{dx}{ds} + B(x, y) \frac{dy}{ds}$$

dove ρ è la curvatura geodetica.

In altri termini: sia ρ la curvatura geodetica in un punto P della curva autoparallela spiccata da P in direzione $P + dP \equiv P_1$. I piani ω, ω_1 tangenti, rispettivamente in P e P_1 , si sovrappongono per rotazione intorno alla $r \equiv (\omega, \omega_1)$ coniugata della $r \equiv PP_1$.

Tra i fasci di centro P e \bar{P}_1 (posizione di P_1 dopo la rotazione attorno ad r) non vi è parallelismo euclideo, come nel caso ordinario, bensì parallelismo euclideo più una rotazione.

In sostanza, ciò equivale a dire che i fasci sono paralleli allorchè nel piano di sviluppo si è stabilito un trasporto lungo la curva $\bar{P}\bar{Q}$ immagine di sviluppo dell'autoparallela PQ, restando la $\bar{P}\bar{Q}$ autoparallela nel suo piano.

Matematica. — *Rotazione e divergenza di un vettore; gradiente di un'omografia in coordinate curvilinee generali.* Nota ⁽¹⁾ di F. Odone, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questa Nota espongo un metodo assai semplice per ottenere l'espressione, in coordinate curvilinee qualunque, della rotazione e della divergenza di un vettore; inoltre assegno la formula, che credo nuova, la quale dà, in coordinate qualunque, il gradiente di un'omografia.

1. Indicheremo con P il punto generico dello spazio ordinario: per ogni sua posizione supporremo determinati i valori di 3 numeri q_1, q_2, q_3 ; i numeri q_i ($i = 1, 2, 3$) risultano dunque funzioni del punto P. Reciprocamente, se per ogni terna di valori dei numeri q_i si sa determinare la posizione di P, si può considerare P funzione dei numeri q_i . In questa ipotesi i numeri q_i individuano un sistema di coordinate curvilinee, le cui superficie coordinate sono definite da $q_i = \text{costante}$. Poniamo

$$(1) \quad \mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q_i} \quad ; \quad Q_{ij} = Q_{ji} = \mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Il vettore

$$(2) \quad d_i \mathbf{P} = \mathbf{u}_i dq_i$$

rappresenta un vettore infinitesimo, diretto secondo la tangente alla linea lungo cui varia la sola coordinata q_i .

Porremo ancora

$$(3) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3.$$

2. Rotazione di un vettore.

Sia \mathbf{v} un vettore funzione di P e quindi delle q_i . Se poniamo

$$(a) \quad \text{rot } \mathbf{v} = r_1 \mathbf{u}_1 + r_2 \mathbf{u}_2 + r_3 \mathbf{u}_3,$$

vogliamo provare che si ha:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{Q} \left[\frac{\partial (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_2)}{\partial q_3} \right] \\ r_2 &= \frac{1}{Q} \left[\frac{\partial (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_3)}{\partial q_1} \right] \\ r_3 &= \frac{1}{Q} \left[\frac{\partial (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_1)}{\partial q_2} \right]^{(2)}. \end{aligned}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1930.

(2) Tali formule coincidono con quelle stabilite, in altro modo, dal prof. LEVI-CIVITA, come si può p. es. vedere nel libro: *Calcolo differenziale assoluto*, p. 185.

Infatti: dalla definizione di rotazione⁽¹⁾ e dalle formole (2) risulta:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times d_2 P \wedge d_3 P &= \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \cdot dq_2 dq_3 = \\ &= d_2 (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_3 dq_3) - d_3 (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_2 dq_2) = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_3) \cdot dq_2 dq_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_2) \cdot dq_2 dq_3, \end{aligned}$$

ossia

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 = \frac{\partial (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_2)}{\partial q_3}.$$

Ma, per la (a),

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 = r_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3$$

e quindi, ricordando la (3), risultano le formole da dimostrare.

3. *Formule che danno grad q_i .*

Vogliamo provare che

$$(4) \quad \operatorname{grad} q_1 = \frac{\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3}{Q}, \quad \operatorname{grad} q_2 = \frac{\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1}{Q}, \quad \operatorname{grad} q_3 = \frac{\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2}{Q}.$$

Infatti: da $dP = \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i dq_i$ risulta

$$dP \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \cdot dq_1$$

e quindi, per definizione di gradiente di un numero⁽²⁾,

$$\operatorname{grad} q_1 = \frac{\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3}, \quad \text{ossia, per la (3),} \quad \operatorname{grad} q_1 = \frac{\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3}{Q}.$$

4. *Divergenza di un vettore.*

Se

$$(b) \quad \mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + v_3 \mathbf{u}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{u}_i,$$

è un vettore funzione di P, vogliamo provare che

$$(5) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} (Q \cdot \mathbf{v} \times \operatorname{grad} q_i) = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} (Q v_i)^{(3)}.$$

(1) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Elementi di calcolo vettoriale*, Zanichelli, 2^a ediz., p. 86.

(2) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Elementi di calcolo vettoriale*, p. 81.

(3) T. LEVI-CIVITA, *Calcolo differenziale assoluto*, p. 177.

Infatti; dalla definizione di divergenza ⁽¹⁾ risulta, ricordando le (2):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot d_1 P \times d_2 P \wedge d_3 P &= \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \cdot dq_1 dq_2 dq_3 = \\ &= d_1 (\mathbf{v} \times d_2 P \wedge d_3 P) + d_2 (\mathbf{v} \times d_3 P \wedge d_1 P) + d_3 (\mathbf{v} \times d_1 P \wedge d_2 P) = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) \right] \cdot dq_1 dq_2 dq_3, \end{aligned}$$

ossia, ricordando la (3)

$$(c) \quad Q \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial q_1} (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\mathbf{v} \times \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2);$$

di qui, tenendo conto delle formule (4), risulta la 1^a espressione (5) di $\operatorname{div} \mathbf{v}$; d'altra parte si ricava da (b), ricordando la (3), $\mathbf{v} \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 Q$ con due formule analoghe, e quindi da (c), risulta la 2^a espressione (5) di $\operatorname{div} \mathbf{v}$.

5. Gradiente di un'omografia.

Sia α un'omografia funzione del punto P. Vogliamo provare che posto

$$(d) \quad \operatorname{grad} \alpha = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{u}_i$$

si ha

$$(6) \quad a_i = \operatorname{grad} \alpha \times \operatorname{grad} q_i = \frac{1}{Q} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial (Q \cdot \alpha \operatorname{grad} q_h \times \operatorname{grad} q_i)}{\partial q_h} - \sum_{h=1}^3 \alpha \operatorname{grad} q_h \times \frac{\partial \operatorname{grad} q_i}{\partial q_h}.$$

Infatti: essendo α un vettore costante, si ha: ⁽²⁾

$$\operatorname{grad} \alpha \times \alpha = \operatorname{div} (K \alpha \alpha)$$

e quindi, per la (5),

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \alpha \times \alpha &= \frac{1}{Q} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_h} (Q \cdot K \alpha \alpha \times \operatorname{grad} q_h) = \\ &= \frac{1}{Q} \sum \frac{\partial}{\partial q_h} (\alpha \times Q \alpha \operatorname{grad} q_h) = \alpha \times \frac{1}{Q} \sum \frac{\partial}{\partial q_h} (Q \alpha \operatorname{grad} q_h) \end{aligned}$$

e quindi

$$(e) \quad \operatorname{grad} \alpha = \frac{1}{Q} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_h} (Q \alpha \operatorname{grad} q_h).$$

(1) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Elementi di calcolo vettoriale*, p. 86.

(2) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale*, vol. I, Zanichelli, p. 175.

Ma dalla (d) si ha

$$\text{grad } \alpha \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 = a_1 \cdot \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3,$$

e quindi, per la (3) e le (4),

$$a_1 = \text{grad } \alpha \times \text{grad } q_1,$$

ossia la 1^a forma delle (6).

Ma dalla (e) si ottiene

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{Q} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_h} (Q \alpha \text{grad } q_h) \times \text{grad } q_i = \\ &= \frac{1}{Q} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_h} (Q \cdot \alpha \text{grad } q_h \times \text{grad } q_i) - \sum_{h=1}^3 \alpha \text{grad } q_h \times \frac{\partial \text{grad } q_i}{\partial q_h}, \end{aligned}$$

ossia la 2^a forma delle (6).

Osservazione. — Se α è un'omografia assiale, cioè se $\alpha = -K\alpha$, allora

$$\sum_{h=1}^3 \alpha \text{grad } q_h \times \frac{\partial \text{grad } q_i}{\partial q_h} = 0,$$

e quindi le (6) si riducono a

$$a_i = \frac{1}{Q} \sum_{h=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_h} (Q \cdot \alpha \text{grad } q_h \times \text{grad } q_i) \quad (1).$$

Infatti: da $\alpha = -K\alpha$ risulta

$$\sum_{h=1}^3 \alpha \text{grad } q_h \times \frac{\partial \text{grad } q_i}{\partial q_h} = - \sum \text{grad } q_h \times \alpha \frac{d \text{grad } q_i}{dP} \frac{\partial P}{\partial q_h};$$

questa formula, ricordando le (1), (3), (4), può anche essere scritta così:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3} \left(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \times \alpha \frac{d \text{grad } q_i}{dP} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1 \times \alpha \frac{d \text{grad } q_i}{dP} \mathbf{u}_2 + \right. \\ \left. + \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \times \alpha \frac{d \text{grad } q_i}{dP} \mathbf{u}_3 \right) = - I_1 \left(\alpha \frac{d \text{grad } q_i}{dP} \right) \quad (2). \end{aligned}$$

Ma siccome $\frac{d \text{grad } q_i}{dP}$ è dilatazione ed α è assiale, $I_1 \left(\alpha \frac{d \text{grad } q_i}{dP} \right) = 0$ (3).

(1) T. LEVI CIVITA, *Calcolo differenziale assoluto*, p. 177.

(2) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale*, vol. I, p. 58.

(3) *Analisi vettoriale generale*, vol. II, parte 2^a, a cura del prof. T. BOGGIO, p. 147.

6. Sono notevoli le formule seguenti, in cui intervengono i simboli di Christoffel a 3 indici:

$$(7) \quad \frac{\partial u_i}{\partial q_j} = \frac{\partial u_j}{\partial q_i} = \sum_{v=1}^3 \begin{bmatrix} i & j \\ v \end{bmatrix} \text{grad } q_v,$$

essendo

$$(7') \quad \begin{bmatrix} i & j \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j & i \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(u_j \times u_v)}{\partial q_i} + \frac{\partial(u_v \times u_i)}{\partial q_j} - \frac{\partial(u_i \times u_j)}{\partial q_v} \right];$$

$$(8) \quad \frac{\partial u_i}{\partial q_j} = \sum_{v=1}^3 \left\{ \begin{matrix} i & j \\ v \end{matrix} \right\} u_v,$$

essendo

$$(8') \quad \left\{ \begin{matrix} i & j \\ v \end{matrix} \right\} = \sum_{s=1}^3 \begin{bmatrix} i & j \\ s \end{bmatrix} \text{grad } q_s \times \text{grad } q_v = \left\{ \begin{matrix} j & i \\ v \end{matrix} \right\};$$

$$(9) \quad \text{grad log } Q = \sum_{i=1}^3 K \frac{d u_i}{d P} \text{grad } q_i,$$

formula che riassume le seguenti:

$$(9') \quad \frac{\partial \log Q}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \begin{matrix} i & l \\ i \end{matrix} \right\}.$$

Dim. (7)–(7'). Dalle (7), ricordando la (3) e le (4) risulta:

$$(f) \quad \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \times u_v = \frac{\partial u_j}{\partial q_i} \times u_v = \begin{bmatrix} i & j \\ v \end{bmatrix};$$

ma si ha pure

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \times u_v &= \frac{\partial(u_i \times u_v)}{\partial q_j} - u_i \times \frac{\partial u_v}{\partial q_j} = \frac{\partial(u_i \times u_v)}{\partial q_j} - u_i \times \frac{\partial u_j}{\partial q_v} \\ \frac{\partial u_j}{\partial q_i} \times u_v &= \frac{\partial(u_j \times u_v)}{\partial q_i} - u_j \times \frac{\partial u_v}{\partial q_i} = \frac{\partial(u_j \times u_v)}{\partial q_i} - u_j \times \frac{\partial u_i}{\partial q_v}, \end{aligned}$$

sommando a membro a membro ed osservando che

$$u_i \times \frac{\partial u_j}{\partial q_v} + u_j \times \frac{\partial u_i}{\partial q_v} = \frac{\partial(u_i \times u_j)}{\partial q_v},$$

risulta la (7').

Dim. (8)–(8'). Dalle (8), ricordando la (3) e le (4) risulta

$$(g) \quad \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \times \text{grad } q_v = \frac{\partial u_j}{\partial q_i} \times \text{grad } q_v = \left\{ \begin{matrix} i & j \\ v \end{matrix} \right\},$$

sostituendo in questa formula a $\frac{\partial u_i}{\partial q_j}$ il suo valore (7), risulta la (8').

Dim. (9) - (9'). Applicando formule note si ha:

$$\begin{aligned} \text{grad } Q &= \text{grad} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) = K \frac{d\mathbf{u}_1}{dP} \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 + K \frac{d(\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3)}{dP} \mathbf{u}_1 = \\ &= K \frac{d\mathbf{u}_1}{dP} \cdot \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 + K \left(\mathbf{u}_2 \wedge \frac{d\mathbf{u}_3}{dP} - \mathbf{u}_3 \wedge \frac{d\mathbf{u}_2}{dP} \right) \mathbf{u}_1 = \\ &= K \frac{d\mathbf{u}_1}{dP} \cdot \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 + \left(K \frac{d\mathbf{u}_3}{dP} \cdot K \mathbf{u}_2 \wedge - K \frac{d\mathbf{u}_2}{dP} \cdot K \mathbf{u}_3 \wedge \right) \mathbf{u}_1 = \\ &= Q \left(K \frac{d\mathbf{u}_1}{dP} \text{grad } q_1 + K \frac{d\mathbf{u}_2}{dP} \text{grad } q_2 + K \frac{d\mathbf{u}_3}{dP} \text{grad } q_3 \right), \end{aligned}$$

e siccome

$$(\text{grad } Q)/Q = \text{grad } \log Q,$$

risulta la formula (9).

Per ottenere le (9') basta osservare che

$$(b) \quad d \log Q = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \log Q}{\partial q_i} dq_i$$

vale $\text{grad } \log Q \times dP$. Ma

$$\begin{aligned} \text{grad } \log Q \times dP &= \sum_{i=1}^3 K \frac{d\mathbf{u}_i}{dP} \text{grad } q_i \times dP = \\ &= \sum \text{grad } q_i \times \frac{d\mathbf{u}_i}{dP} dP = \sum \text{grad } q_i \times d\mathbf{u}_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \text{grad } q_i \times \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial q_l} dq_l = \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{i=1}^3 \text{grad } q_i \times \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial q_l} \right] dq_l; \end{aligned}$$

di qui, tenendo conto delle (g), risulta

$$d \log Q = \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{i=1}^3 \left\{ \begin{matrix} i & l \\ i & i \end{matrix} \right\} \right] dq_l$$

e quindi, per confronto con (b), le (9').

Matematica. — *Ancora sulla derivazione parziale dei tensori.*
 Nota⁽¹⁾ di MARIA PASTORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Se alle componenti di un tensore m^{plo} si applicano le ordinarie formole di derivazione covariante, si ottengono, come è noto, le componenti di un tensore $(m+1)^{plo}$, derivato del dato.

Se, nell'applicare tali formole, non si tien conto di qualcuno degli indici delle componenti del tensore dato, si ottengono sistemi di funzioni, ancora dotate di $m+1$ indici, ma che non si possono più considerare come componenti di tensori $(m+1)^{pli}$. Esse sono però legate in modo semplice alle componenti di tensori $(m+1)^{pi}$.

Così, se alle componenti di un tensore m^{plo} si applica due volte la legge ora descritta (e che, come già in alcune Note recenti, chiamo *derivazione parziale*⁽²⁾) si ottengono sistemi di funzioni, dotate di $m+2$ indici, che non si possono considerare come componenti di tensori $(m+2)^{pli}$, ma che sono legate in modo semplice alle componenti di tensori $(m+2)^{pi}$.

Le considerazioni relative alle derivate parziali delle componenti dei tensori, e al loro legame con le componenti degli ordinari tensori, anche se talora ovvie, meritano, a mio avviso, di essere messe in rilievo perchè, da un lato, permettono di dare maggior spigliatezza a qualche dimostrazione (come mostro in questa Nota), dall'altro gettano maggior luce su questioni già note, e tra loro affini, presentandole da un unico punto di vista: ciò risulta in modo particolare dalla considerazione delle componenti intrinseche e parzialmente intrinseche dei tensori, e formerà oggetto di una prossima Nota.

1. *Derivazione parziale di tensori doppi.*

Siano T_{ij} le componenti covarianti di un tensore doppio T in una varietà riemanniana ad n dimensioni. Applichiamo ad esse la legge di derivazione covariante, tenendo conto però di uno solo degli indici, ad esempio del secondo:

$$(1) \quad T_{(i) j/k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} - T_{i\alpha} \left\{ \begin{matrix} j & k \\ \alpha \end{matrix} \right\}^{(3)}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1930.

(2) *Sulla derivazione parziale dei tensori.* Questi « Rendiconti », vol. X, serie 6^a, 2^o sem., 1929, pp. 10-15 e *Definizione intrinseca dei simboli di Christoffel e derivazione parziale dei tensori.* « Rendiconti dell'Istituto Lombardo », vol. LXII, fasc. XVI-XX, 1929, pp. 821-826.

(3) Secondo la convenzione ormai entrata nell'uso, quando uno stesso indice figura due volte in un termine, va inteso (se non è detto esplicitamente il contrario) che tale termine rappresenti una sommatoria, da 1 ad n , rispetto all'indice considerato.

Naturalmente le (1) non sono le componenti covarianti di un tensore triplo. La loro legge di trasformazione, per un cambiamento di coordinate:

$$(2) \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

è, come facilmente si verifica, la seguente:

$$(3a) \quad \bar{T}_{(i)jk} = T_{(\alpha)\beta\delta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial x_\delta}{\partial \bar{x}_k} + T_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j}$$

Chiamo la legge (1) derivazione parziale ⁽¹⁾ del tensore **T**.

La derivazione parziale può essere applicata anche alle componenti contravarianti o miste di **T**. Si ottengono in tal modo sistemi di funzioni a tre indici, che, per un cambiamento (2) di coordinate, seguono le seguenti leggi di trasformazione:

$$(3b) \quad \bar{T}_{/k}^{(i)j} = T_{/b}^{(\alpha)\beta} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_b}{\partial \bar{x}_k} + T^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_\beta}$$

$$(3c) \quad \bar{T}_{(i)k}^j = T_{(\alpha)\beta}^\delta \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_\delta}{\partial \bar{x}_k} + T_\alpha^\beta \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_\beta}$$

$$(3d) \quad \bar{T}_{/k}^{(i)} = T_{/b}^{(\alpha)} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial x_b}{\partial \bar{x}_k} + T_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j}$$

La presenza degli ultimi termini mostra che non si tratta delle componenti di un tensore triplo.

Caso particolare della (3a), per $T_{ij} = a_{ij}$, $T_{(i)j/k} = a_{(i)j/k} = \left[\begin{smallmatrix} i & k \\ j \end{smallmatrix} \right]_{(2)}$, è la legge di trasformazione dei simboli di Christoffel di prima specie.

Caso particolare della (3c), per $T_i^j = a_i^j = \epsilon_i^j$, $T_{(i)k}^j = a_{(i)k}^j = \left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ j \end{smallmatrix} \right\}_{(2)}$, è la legge di trasformazione dei simboli di Christoffel di seconda specie.

2. Derivazione parziale di tensori m^{pi} .

Per un tensore m^{pio} (con $m > 2$) sono possibili diversi tipi di derivazione parziale. Se l'indice di cui non si tien conto è uno solo, le funzioni ottenute seguono per un cambiamento di coordinate, leggi di trasformazione dei tipi (3). Se gli indici di cui non si tien conto sono in numero

(1) Cfr. le mie Note citate.

(2) Cfr. la seconda delle mie Note citate, n. 2.

(3) $\epsilon_i^j = 1$ (per $j = i$) = 0 (per $j \neq i$).

di p ($1 < p < m$), gli ultimi termini dei secondi membri delle (3) vengono sostituiti da somme di p termini.

Per un tensore semplice, o vettore v , si può considerare come derivazione parziale la derivazione ordinaria. Posto infatti:

$$v_{(i)/k} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

si ha:

$$(3'a) \quad \bar{v}_{(i)/k} = v_{(\alpha)/\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_k} + v_\alpha \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_k}$$

e formole analoghe alle (3 d) si hanno per $v_{/k}^{(i)} = \frac{\partial v^i}{\partial x_k}$.

3. Legame tra i derivati parziali e gli ordinari tensori.

Dalle formole (3 a) e (3 c) scende immediatamente che, mediante la combinazione di derivate parziali, si possono ottenere le seguenti componenti di tensori tripli:

$$(4 a) \quad U_{ijk} = T_{(i)j/k} - T_{(k)j/i}$$

$$(4 b) \quad U_{ik}^{..j} = T_{(i)/k}^j - T_{(k)/i}^j$$

entrambi emisimmetrici rispetto agli indici i e k ⁽¹⁾.

Così la (3'a) suggerisce la considerazione del tensore doppio emisimmetrico di componenti:

$$(4'a) \quad u_{ik} = v_{(i)/k} - v_{(k)/i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (2).$$

(1) Le (4 a) non sono altro $T_{ij/k} - T_{kj/i}$. Basta infatti osservare che, in queste differenze, i termini che contengono $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\}$ vengono eliminati. Ma le considerazioni svolte sono valide anche per una varietà non riemanniana in cui siasi fissata una connessione metrica. Se tale connessione è simmetrica, vale l'osservazione precedente. Se non è simmetrica, la differenza tra il tensore $\Delta_k T_{ij} - \Delta_i T_{kj}$ e il tensore corrispondente a (4 a) è una composizione del tensore $T_{\alpha j}$ col tensore $2 S_{ik}^{.. \alpha} = \Gamma_{ik}^{\prime \alpha} - \Gamma_{ki}^{\prime \alpha}$ (cfr. ad es. SCHOUTEN, *Der Ricci Kalkül*, Berlin, Springer 1924, p. 68, form. (26)).

(2) Le (4'a) altro non sono che $v_{i/k} - v_{k/i}$ (cfr. nota precedente). Ciò vale anche per le varietà non riemanniane a connessione simmetrica. Se la connessione non è simmetrica, la differenza tra il tensore $\Delta_k v_i - \Delta_i v_k$ e il tensore (4'a) è una composizione del vettore v_α col tensore $2 S_{ik}^{.. \alpha}$ (cfr. SCHOUTEN, loc. cit., p. 68, form. (29)).

Se nella (1), al posto di simboli di Christoffel sostituiamo i simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} j & k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\}'$, costruiti mediante un tensore doppio simmetrico b_{ij} , come i simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} j & k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\}$ sono costruiti mediante il tensore fondamentale a_{ij} , otteniamo un altro sistema triplo di funzioni:

$$(1') \quad T_{(i)j'k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} - T_{i\alpha} \left\{ \begin{smallmatrix} j & k \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\}'_{(1)}$$

che, per una trasformazione di coordinate, seguono la legge (3 a). Da esse e dalle (1) si possono ottenere le seguenti componenti di tensori tripli:

$$(5 a) \quad V_{ijk} = T_{(i)j'k} - T_{(i)j/k}.$$

Allo stesso modo si possono avere componenti di tensori tripli mediante le derivate parziali, ottenute partendo dalle componenti controvarianti o miste del tensore **T**, come si rileva dalle altre formole (3).

In particolare dalle (3 c), ove si ponga $T_i^j = a_i^j = e_i^j$, risulta che $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ j \end{smallmatrix} \right\}' - \left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \rho_{ik}^{..j}$ sono le componenti di un tensore triplo⁽²⁾. Dalle (1) (1') e dalle analoghe si rileva poi che il tensore di componenti (5 a), e gli analoghi, sono composti del tensore **T** col tensore ρ .

Notiamo, in particolare, le seguenti formole:

$$(5' a) \quad V_{ijk} = - T_{i\alpha} \rho_{jk}^{.. \alpha}$$

$$(5 b) \quad V_{ik}^{..j} = T_{(i)j'k}^j - T_{(i)j/k}^j = T_i^{\alpha} \rho_{\alpha k}^{..j}.$$

Osservazione. — Le considerazioni fatte in questo numero si estendono in modo ovvio alle derivazioni parziali dei tensori m^{pli} . In particolare i tensori a cui si giunge con l'ultimo procedimento saranno formati da tanti termini (ottenuti componendo il tensore considerato con ρ) quanti sono gli indici di cui si tien conto nella derivazione.

(1) Come si vede, la sostituzione dei nuovi simboli di Christoffel agli antichi nella (1) viene espressa con un apice che segue il segno di derivazione.

(2) Vedasi T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, Stock, 1925, p. 228, oppure dello stesso Autore, *Der absolute Differential-Kalkül*, Berlin, Springer, 1928, p. 125.

4. *Derivati parziali di secondo ordine e loro legame con gli ordinari tensori.*

Applicando alle (1) una legge analoga (e cioè la legge di derivazione covariante in cui si tien conto però dei soli indici j e k) si hanno le derivate seconde parziali delle componenti di \mathbf{T} :

$$(6) \quad T_{(i)j|kr} = \frac{\partial T_{(i)j|k}}{\partial x_r} - T_{(i)\beta|k} \left\{ \begin{matrix} j & r \\ \beta & \end{matrix} \right\} - T_{(i)j|\beta} \left\{ \begin{matrix} k & r \\ \beta & \end{matrix} \right\}$$

che, naturalmente, non sono le componenti di un tensore. Da esse si ottengono però le componenti di un tensore quadruplo scambiando k con r e sottraendo da (6). Si ha:

$$(7) \quad U_{ijkr} = T_{(i)j|kr} - T_{(i)j|rk} = -T_{i\alpha} \{j\alpha, kr\}.$$

Infatti l'ultimo termine del secondo membro della (6) non muta per lo scambio di k con r . Sviluppando gli altri due termini, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\partial T_{i\alpha} \left\{ \begin{matrix} j & k \\ \alpha & \end{matrix} \right\}}{\partial x_r} - T_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \begin{matrix} j & k \\ \alpha & \end{matrix} \right\} - \frac{\partial T_{i\beta} \left\{ \begin{matrix} j & r \\ \beta & \end{matrix} \right\}}{\partial x_k} + T_{i\alpha} \left\{ \begin{matrix} \beta & k \\ \alpha & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & r \\ \beta & \end{matrix} \right\}.$$

Il primo termine di questa somma non muta per lo scambio di k con r , il secondo si muta nel quarto e il quarto nel secondo. Tutti questi termini vengono eliminati nella differenza (7). Non rimangono che il terzo e l'ultimo termine; da cui la (7).

Come caso particolare della (7), per $T_{i\alpha} = a_{i\alpha}$, si ha:

$$(7') \quad a_{(i)j|kr} - a_{(i)j|rk} = \left[\begin{matrix} (i) & k \\ j & \end{matrix} \right]_{/r} - \left[\begin{matrix} (i) & r \\ j & \end{matrix} \right]_{/k} = -a_{i\alpha} \{j\alpha, kr\} = -(ji, kr) = (ij, kr)^{(1)}.$$

In modo analogo si trova:

$$(8) \quad U_{ikr}^{...j} = T_{(i)j|kr}^j - T_{(i)j|rk}^j = T_i^{\alpha} \{\alpha j, kr\}.$$

E, come caso particolare di quest'ultima, per $T_i^{\alpha} = a_i^{\alpha} = \epsilon_i^{\alpha}$, si ha:

$$(8') \quad a_{(i)j|kr}^j - a_{(i)j|rk}^j = \left\{ \begin{matrix} (i) & k \\ j & \end{matrix} \right\}_{/r} - \left\{ \begin{matrix} (i) & r \\ j & \end{matrix} \right\}_{/k} = \{ij, kr\}^{(2)}.$$

Formole analoghe alle (7) e (8) si hanno per le derivate seconde parziali delle componenti dei tensori m^{bli} ($m > 2$). Si ottengono sempre le componenti di un tensore $(m+2)^{blo}$, composto del dato col tensore di

(1) Cfr. la prima delle mie Note citate, p. 15. Inoltre M. R. LAGRANGE, *Calcul différentiel absolu*, « Mém. des Sciences Math. », Paris 1926, p. 16.

(2) Cfr. M. R. LAGRANGE, loco cit., p. 15, form. (17).

Riemann-Christoffel; tali componenti sono la somma di tanti termini, analoghi a quelli dell'ultimo membro della (7) o della (8), quanti sono gli indici di cui si è tenuto conto nella derivazione.

5. Applicazione.

Per mostrare come le considerazioni svolte possano portare qualche semplificazione alle comuni trattazioni, determinerò, con calcolo diretto, il legame tra il tensore quadruplo di componenti:

$$(9) \quad R_{ihk}^{\dots r} = \{ir, hk\}' - \{ir, hk\}$$

e il tensore $\rho^{(1)}$.

Si ha per (8'):

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ir, hk\} = \left\{ \begin{array}{l} (i) \ h \\ r \end{array} \right\}_{/k} - \left\{ \begin{array}{l} (i) \ k \\ r \end{array} \right\}_{/h} \\ \{ir, hk\}' = \left\{ \begin{array}{l} (i) \ h \\ r \end{array} \right\}'_{/k} - \left\{ \begin{array}{l} (i) \ k \\ r \end{array} \right\}'_{/h} \end{array} \right.$$

Ma è evidentemente (cfr. numero 3):

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \ h \\ r \end{array} \right\}'_{/k} = \left\{ \begin{array}{l} (i) \ h \\ r \end{array} \right\}'_{/k} - \left\{ \begin{array}{l} i \ \alpha \\ r \end{array} \right\}' \rho_{hk}^{\dots \alpha} + \left\{ \begin{array}{l} i \ h \\ \alpha \end{array} \right\}' \rho_{\alpha k}^{\dots r} \\ \left\{ \begin{array}{l} (i) \ k \\ r \end{array} \right\}'_{/h} = \left\{ \begin{array}{l} (i) \ k \\ r \end{array} \right\}'_{/h} - \left\{ \begin{array}{l} i \ \alpha \\ r \end{array} \right\}' \rho_{kh}^{\dots \alpha} + \left\{ \begin{array}{l} i \ k \\ \alpha \end{array} \right\}' \rho_{\alpha h}^{\dots r}.$$

Quindi:

$$\{ir, kh\}' = \left\{ \begin{array}{l} (i) \ k \\ r \end{array} \right\}'_{/h} - \left\{ \begin{array}{l} (i) \ h \\ r \end{array} \right\}'_{/k} + \left\{ \begin{array}{l} i \ h \\ \alpha \end{array} \right\}' \rho_{\alpha k}^{\dots r} - \left\{ \begin{array}{l} i \ k \\ \alpha \end{array} \right\}' \rho_{\alpha h}^{\dots r}.$$

Per questa e la prima delle (10), sostituendo in (9) e osservando che:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \ h \\ r \end{array} \right\}'_{/k} - \left\{ \begin{array}{l} (i) \ h \\ r \end{array} \right\}'_{/k} = \rho_{ih, /k}^{\dots r} + \rho_{\alpha h}^{\dots r} \left\{ \begin{array}{l} i \ k \\ \alpha \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} (i) \ k \\ r \end{array} \right\}'_{/h} - \left\{ \begin{array}{l} (i) \ k \\ r \end{array} \right\}'_{/h} = \rho_{ik, /h}^{\dots r} + \rho_{\alpha k}^{\dots r} \left\{ \begin{array}{l} i \ h \\ \alpha \end{array} \right\}$$

si ottiene:

$$R_{ihk}^{\dots r} = \rho_{ih, /k}^{\dots r} - \rho_{ik, /h}^{\dots r} + \rho_{ih}^{\dots \alpha} \rho_{\alpha k}^{\dots r} - \rho_{ik}^{\dots \alpha} \rho_{\alpha h}^{\dots r}.$$

(1) Vedasi T. LEVI-CIVITA, primo loc. cit., pp. 232-236, oppure secondo loc. cit., pp. 128-130.

Matematica. — *Sopra una classe di varietà cicliche.* Nota II ⁽¹⁾
di P. CATTANEO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Riprendo brevemente l'argomento dell'altra mia Nota di egual titolo ⁽²⁾. Pel carattere continuativo delle due Note sarà continuativa la numerazione dei paragrafi.

Assieme ad altri risultati sulle varietà cicliche considerate trovo che nel caso $n = 3$ la prima varietà principale è una superficie di Steiner. In generale, se la prima varietà principale di una V_3 è immersa in un S_3 , essa è sempre una superficie di Steiner.

10. Dai §§ 2 e 7 si vede tosto che nelle nostre V_n si ha

$$x_{0,r,s} = \frac{-a_{r,s}}{\sqrt{n+1}}.$$

La prima varietà principale ⁽³⁾ è data quindi dall'intersezione del cono geodetico con l' S_n di equazione $x_0 = \frac{-1}{\sqrt{n+1}}$; mentre la varietà dei centri di prima curvatura delle geodetiche è l'intersezione di detto cono con l'ipersfera di diametro OP, che ha per equazione

$$\sum_0^n x_r^2 + x_0 \cdot \sqrt{n+1} = 0.$$

Indichiamo con W_{n-1} la prima di queste due varietà, con U_{n-1} la seconda.

Se $n = 2$, l'equazione del cono è $2(x_1^2 + x_2^2) = x_0^2$; la W_1 giace nel piano $x_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ed ha per equazione $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{6}$; la U_1 giace nel piano $x_0 = -2 \cdot \sqrt{3}$ ed ha per equazione $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Se $n = 3$, l'equazione del cono è ⁽⁴⁾

$$\sum_1^3 x_r^2 \cdot x_s^2 = -2 x_0 x_1 x_2 x_3;$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1930.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XI, 1° sem., 1930, p. 659.

(3) (G. H.), pp. 230 e 236.

(4) § 8 e nota (2) della Nota I.

la W_2 giace nello spazio $x_0 = \frac{-1}{2}$ ed è la superficie steineriana di equazione $\sum_{r,s}^3 x_r^2 \cdot x_s^2 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$; la U_2 è l'intersezione del cono con l'ipersfera $\sum_{r=1}^3 x_r^2 + 2x_0 = 0$, sicchè è una superficie di 8° ordine immersa in un S_4 .

Giova notare che in ogni V_3 con la I^a varietà principale immersa in un S_3 tale varietà è una superficie di Steiner. Basta osservare che, indicando con ν (3, 4 o 5) il numero delle dimensioni del Π_2 , su detta varietà le coordinate $x_0, x_1, x_2, \dots, x_\nu$ sono forme quadratiche ternarie di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

11. Se si definisce il cono geodetico come generato dalle seconde rette principali delle geodetiche di V_n passanti per P, può darsi che l'eliminazione delle λ fatta nel § 7 dia per detto cono un'equazione sovrabbondante. Bisogna aggiungere la condizione che le λ siano tutte reali.

Quando $n = 3$, di ogni retta doppia della W_2 resta solo il segmento compreso fra i suoi due punti cuspidali; dei tre piani doppi del cono geodetico rimangono solo tre coppie di angoli retti opposti al vertice.

In generale, qualunque sia n , al cono geodetico della nostra V_n in P non appartiene alcun piano intero, non avendo detto cono retta alcuna nell'iperpiano $x_0 = 0$, perpendicolare in P alla normale centrale OP.

Infatti, essendo $f = \sum_0^n \theta_r$ un parametro di OP, perchè una retta di Π_2 , di parametro $\sum_0^n \alpha_r \cdot \theta_r$ con le α costanti reali, sia ortogonale ad OP deve essere $\sum_0^n \alpha_r = 0$. Perchè la retta appartenga al cono deve essere

$$\sum_0^n \alpha_r \cdot \theta_r = \sum_{r,s}^n f_{r,s} \cdot \lambda_r \cdot \lambda_s = - \left\{ \sum_1^n \lambda_r \right\}^2 \cdot \theta_r - \sum_1^n \lambda_r^2 \theta_r;$$

quindi

$$\alpha_0 = - \left\{ \sum_1^n \lambda_r \right\}^2, \quad \alpha_r = - \lambda_r^2, \quad \left\{ \sum_1^n \lambda_r \right\}^2 + \sum_1^n \lambda_r^2 = 0.$$

Di qui si ha tosto che le λ non possono essere tutte reali; c. d. d.

12. La normale centrale OP appartiene al cono geodetico (anche con la definizione data nel § 11) solo quando n è un numero dispari $2\nu + 1$; e vi appartiene $\binom{2\nu + 1}{\nu}$ volte.

Infatti, prendendo $-f$ per parametro di OP, deve essere

$$-f = -\sum_0^n \theta_r = -\left\{ \sum_1^n \lambda_r \right\}^2 \cdot \theta_0 - \sum_1^n \lambda_r^2 \cdot \theta_r;$$

sicchè, posto $\sigma_r = \pm 1$, si deve avere

$$\lambda_r^2 = 1, \lambda_r = \sigma_r, \left\{ \sum_1^n \lambda_r \right\}^2 = \left\{ \sum_1^n \sigma_r \right\}^2 = 1, n + 2 \cdot \sum_{rs} \sigma_r \sigma_s = 1,$$

quindi n dispari. Posto $n = 2\nu + 1$, deve dunque essere $\sum_{rs} \sigma_r \cdot \sigma_s = -\nu$.

Siano μ i σ eguali ad 1; ve ne saranno $2\nu + 1 - \mu$ eguali a (-1) ; la relazione precedente dà

$$\binom{\mu}{2} + \binom{2\nu + 1 - \mu}{2} - \mu \cdot (2\nu + 1 - \mu) = -\nu,$$

ossia

$$(\mu - \nu) \cdot (\mu - \nu - 1) = 0,$$

sicchè è soddisfatta prendendo, comunque, ν dei λ eguali ad 1 e $\nu - 1$ eguali a -1 , o viceversa, donde si deduce tosto l'asserto fatto.

Nel caso $n = 3$ ($\nu = 1$) si ritrova che OP appartiene al cono tre volte, incontrando la W_2 nel suo punto triplo. Nell' S_3 tangente alla V_3 in P corrispondono ad esso tre direzioni, a due a due ortogonali; ai tre segmenti doppi della W_2 corrispondono, nell' S_3 , tre involuzioni simmetriche.

13. È noto ⁽¹⁾ che la prima curvatura, C_1 , delle geodetiche è sempre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ quando $n = 2$.

Studiamo il caso generale.

Dalla formula $\int_{\mathcal{C}} f_{hk} \cdot f_i \cdot dt = 0$, già trovata nel § 3, si ha ⁽²⁾ che su ogni V_n sono nulli tutti i simboli di Christoffel di classe 1 e che le equazioni delle geodetiche sono quindi

$$u_i = \alpha_i \cdot \sigma + \beta_i, \quad [i = 1, 2, \dots, n]$$

con le costanti α legate dalla relazione

$$\sum_{rs} a_{r,s} \cdot \alpha_r \cdot \alpha_s = \left\{ \sum_1^n \alpha_r \right\}^2 + \sum_1^n \alpha_r^2 = 1,$$

se vogliamo che σ rappresenti l'arco.

(1) (G. H.) p. 270.

(2) (G. H.) pp. 182 e 227.

Si ha poi ⁽¹⁾

$$C_1^2 = \sum_1^n A_{r, s; p, q} \cdot \alpha_r \cdot \alpha_s \cdot \alpha_p \cdot \alpha_q = \left\{ \sum_1^n \alpha_r \right\}^4 + \sum_1^n \alpha_r^4.$$

Indicando con s_1, s_2, \dots, s_n le funzioni simmetriche elementari di $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, abbiamo dunque

$$s_1^2 + (s_1^2 - 2s_2) = 2(s_1^2 - s_2) = 1$$

e

$$C_1^2 = s_1^4 + (s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 4s_1s_3 + 2s_2^2 - 4s_4) = 2(s_1^2 - s_2)^2 + 4s_1s_3 - 4s_4;$$

donde si ha infine

$$C_1^2 = \frac{1}{2} + 4s_1s_3 - 4s_4.$$

Di qui si vede che C_1 , pur variando, in generale, da una geodetica all'altra, resta però immutata lungo una stessa geodetica.

Se $n = 2\nu + 1$, sono interessanti le $\binom{2\nu+1}{\nu}$ congruenze di linee geodetiche che si hanno ponendo ν delle α eguali ad $\frac{1}{\sqrt{2(\nu+1)}}$ e le altre $\nu + 1$ eguali a $\frac{-1}{\sqrt{2(\nu+1)}}$; esse hanno per seconda retta principale in ogni punto P la normale centrale OP [§ 12]. Dalla formula precedente si trova $C_1^2 = \frac{1}{2(\nu+1)} = \frac{1}{n+1}$; donde si vede che le geodetiche di cui si parla sono cerchi di centro O. Tanto la $W_{2\nu}$ quanto la $U_{2\nu}$ hanno dunque un punto multiplo d'ordine $\binom{2\nu+1}{\nu}$ sulla normale centrale; quello della $U_{2\nu}$ coincide con O.

(1) (G. H.) p. 229.

Matematica. — *Expression générale de la solidarité entre le problème du minimum d'une intégrale et l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi.* Nota ⁽¹⁾ di M. G. BOULIGAND, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Soient $Ox\gamma\chi$ trois axes rectangulaires. Pour abrégér, $O\chi$ sera dit *vertical*; soit $\zeta = \psi(x, y; \xi, \eta)$ une fonction *positive et continue, positivement homogène et du 1^{er} degré* en ξ, η . Supposons de plus:

$$(1) \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \cotg \beta \leq \psi \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \cotg \alpha \quad \left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

et enfin que la nappe de cône engendré par le vecteur (ξ, η, ζ) d'origine (x, y, z) , définie par $\zeta = \psi$ soit convexe. En vertu de (1), ce demi-cône est compris entre deux cônes de révol.ⁿ de demi-angles au sommet α et β . Le cône Γ_M , ainsi rattaché à chaque point $M(x, y, z)$ comme sommet, se translate quand M décrit une verticale. Si z est le temps, on peut interpréter l'équation $d\zeta = \psi(x, y; dx, dy)$, avec M. Vessiot ⁽²⁾, comme représentant l'onde *élémentaire* issue du point (x, y) .

Cela posé, étant donnée l'intégrale

$$\dot{I} = \int_{x_0 y_0}^{X, Y} \psi(x, y; dx, dy)$$

la méthode directe du Calcul des variations nous apprend l'existence d'un arc rectifiable unissant les point (x_0, y_0) et (X, Y) du plan xOy et conférant à \dot{I} la borne inférieure des valeurs qu'elle peut acquérir entre les mêmes extrémités. Soit $\varphi(x_0, y_0; X, Y)$ ce minimum absolu.

2. Considérons l'équation d'Hamilton-Jacobi attachée à \dot{I} , c'est-à-dire l'équation aux dérivées partielles du 1^{er} ordre $f(x, y; p, q) = 0$ dont le cône élémentaire est justement Γ_M . On sait, dans des conditions larges, que la valeur $\chi = \varphi(x_0, y_0; X, Y)$ du minimum fournit une intégrale de $f = 0$. Je vais montrer que cet énoncé et un autre, plus étendu, sont vrais en toute généralité, moyennant une nouvelle conception de la notion d'intégrale pour $f = 0$.

3. J'ai rencontré celle-ci dans des recherches sur les fondements de la Géométrie infinitésimale. En un point O d'accumulation d'un ensemble E

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1930.

(2) VESSIOT, « Bull. de la Soc. Math. de France », t. 34, 1906, p. 230 et suivantes.

(formé de points de l'espace euclidien à 3 dimensions) j'appelle **contingent** le système des demi-droites $O\Delta$, telles qu'il y ait au moins un point de E , distinct de O , dans tout cône circulaire droit de sommet O , d'axe $O\Delta$. Cette notion facilite des recherches sur les courbes de Jordan sans point multiple, soit pour en donner une condition de planéité⁽¹⁾, soit pour montrer que la propriété: *ne couper un plan qu'en un nombre fini de points* assure l'existence des demi-tangentes⁽²⁾.

Je dirai qu'un continu (K) est une **intégrale contingente** de $f = 0$ si son contingent en chaque point M répond à ces 2 conditions:

- a) ne contenir aucun rayon intérieur à Γ_M ;
- b) posséder au moins un rayon sur ce cône.

En vertu de a), les points de rencontre de (K) et d'une verticale sont en nombre fini sur chaque segment borné. Pour être surs que (K) est à 2 dimensions, imposons-lui encore cette condition:

c) chaque point M de (K) est limite de points M_i de (K) dont un voisinage suffisamment étroit sur (K) est représenté par une équation $z = g(x, y)$.

La notion d'intégrale contingente englobe celle d'intégrale au sens classique. Si la réunion d'un nombre fini d'intégrales contingentes donne un continu, celui-ci est encore une intégrale contingente.

4. Soit (x_0, y_0) un point dont on sait seulement qu'il appartient à un ensemble E_0 de points du plan $z = 0$. Le minimum absolu de I , depuis ce point arbitraire de E_0 jusqu'au point (X, Y) du même plan est une fonction $\Phi_{E_0}(X, Y)$ égale, en chaque point (X, Y) , à la borne inférieure de tous les $\varphi(x_0, y_0; X, Y)$ provenant des points (x_0, y_0) de E . La surface $Z = \Phi_{E_0}(X, Y)$ est donc la frontière du domaine réunion de tous les domaines $z > \varphi(x_0, y_0; x, y)$. Le minimum absolu $\Phi_{E_0}(X, Y)$ est aussi celui de I , depuis un point origine (\bar{x}_0, \bar{y}_0) de E_0 (unique ou non) jusqu'au point (X, Y) . Les surfaces $Z = \varphi(\bar{x}_0, \bar{y}_0; X, Y)$ et $Z = \Phi_{E_0}(X, Y)$ ont en commun l'arc L projeté horizontalement suivant l'arc l donnant le minimum de \bar{I} de (\bar{x}_0, \bar{y}_0) en (X, Y) .

Lorsque le minimum absolu $\Phi_{E_0}(X, Y)$ est strict $[\bar{x}_0, \bar{y}_0, \text{unique}]$, le point de la surface $Z = \Phi_{E_0}(X, Y)$ projeté horizontalement en (X, Y) est dit **ordinaire**; sinon, il est dit: de **multifurcation**.

5. Le théorème annoncé est alors le suivant: toute surface $Z = \Phi_E(X, Y)$ où Φ_E est le minimum absolu de \bar{I} entre un ensemble E et le point (X, Y) du plan xOy est une intégrale contingente.

La cote étant uniforme, il suffit de montrer que le contingent remplit les conditions a) et b). Considérons en effet les lignes l du plan xOy donnant le minimum de \bar{I} entre deux de leurs points suffisamment rapprochés et les lignes L de l'espace dont chacune est projetée horizontale-

(1) « Bull. Sc. math. », mai 1930.

(2) « Fundam. Math. », t. XV, p. 215.

ment suivant une ligne l et a sa cote définie par $d\zeta \doteq dI$. Une ligne l n'a pas nécessairement partout une tangente, mais étant donné un arc infiniment petit d'une ligne l dont les extrémités sont infiniment voisines du point (x_0, y_0) , les intégrales $\int \psi(x, y; dx, dy)$ et $\int \psi(x_0, y_0; dx, dy)$ prises entre les extrémités de cet arc sont des infiniment petits équivalents. Donc, comme les extrémales de la 2^{ème} intégrale sont des droites, tout arc infiniment petit de ligne l équivaut à sa corde. Soit $m(x, y)$ un point d'une ligne l dont le demi-arc l' consécutif à m admet un contingent γ d'angle non nul. En un point M d'une ligne L sur la verticale de m , le contingent du demi-arc L' consécutif à M sera l'ensemble des génératrices de la nappe de cône Γ_M , situé au-dessus de M projeté suivant le contingent plan γ : en effet, si $m'(x + dx, y + dy)$ est un point de l' , infiniment voisin de m , quelle que soit la direction de mm' tendant vers un rayon de γ , le minimum absolu de I entre m et m' équivaut à $\psi(x, y; dx, dy)$. Dès lors, la condition est satisfaite, car les lignes L issues d'un point $M(x, y, \zeta)$ de $\zeta = \Phi_E(x, y)$ engendrent une surface σ_M ayant en M un point conique et dont la nappe supérieure est au-dessus, la nappe inférieure au-dessous, de $\zeta = \Phi_E(x, y)$. Or σ_M , en totalité, a pour contingent, en M le cône élémentaire total Γ_M , d'où il suit bien que le contingent en M de $\zeta = \Phi_E$ n'a pas de rayon intérieur à Γ_M . En outre, en chaque point M de $\zeta = \Phi_E(x, y)$, aboutit au moins une ligne L , ligne qui peut prolonger ou non au-delà de M , suivant que M est ordinaire ou de multifurcation. Le contingent de cette ligne L (ou de ces lignes L) est sur Γ_M . Donc $b)$ est aussi vérifiée.

6. Le résultat obtenu s'étend à un nombre quelconque de variables indépendant. Voici des applications:

A) Soit un système holonôme à k degrés de liberté, de force vive $2T = \sum_{ij} g_{ij} q'_i q'_j = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$ où les sont des fonctions continues (sans plus) de q_1, \dots, q_k seuls. Soumettons-le à des forces, dérivant d'une fonction de forces $U(q_1, \dots, q_k)$. Alors si sur une ligne minima de $\int \sqrt{U + h} ds$ nous adoptons l'horaire défini par $T = U + h$, nous minimiserons par la-même $\int (T + U) dt$ prise entre les 2 instants associés, en vertu de $T = U + h$, aux 2 extrémités de notre ligne, et cela, en vertu de l'identité de M. Birkhoff

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (T + U + h) dt &= \int_{M_1}^{M_2} 2\sqrt{U + h} ds - \int_{t_1}^{t_2} 2\sqrt{U + h} \sqrt{T} dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} (T + U + h) dt = 2 \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{U + h} ds + \int_{t_1}^{t_2} (\sqrt{T} - \sqrt{U + h})^2 dt. \end{aligned}$$

Ceci justifie en même temps, dans des conditions de généralité notoire, le théorème des forces vives. Cela posé, la valeur de l'action maupertuisienne entre une position initiale (q_1^0, \dots, q_k^0) et une position finale, après description d'une trajectoire correspondant à la valeur de la constante des forces vives sera une intégrale contingente de l'équation de Jacobi, pour cette valeur h .

L'intégration contingente d'équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre est nécessaire pour définir, d'une manière générale, les caractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles du 2^{ème} ordre. Soit l'équation des

ondes sphériques $a^2 \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Si pour $t = 0$, on produit un ébranlement localisé sur un ensemble E_0 , la molécule placée en un point (X, Y, Z) étranger à E_0 reste en repos jusqu'à l'instant $t = \varphi(x, y, z)$ où u cesse d'être nulle. L'équation $t = \varphi(x, y, z)$ représente la surface d'onde: elle est encore le lieu des points qui sont à la plus courte distance at de l'ensemble E_0 . A ce titre, elle constitue une intégrale contingente de l'équation

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{a^2}.$$

Le principe d'Huygens, étroitement lié au processus des enveloppes par réunion, apparaît ici en relation avec l'intégration contingente. On aurait des résultats de même nature, malgré leur forme plus complexe, en milieu non homogène et non isotrope⁽¹⁾.

Toutes ces remarques donnent un grand intérêt aux recherches de M. G. Durand⁽²⁾ sur les enveloppes par réunion.

(1) Cfr. VESSIOT, loc. cit.

(2) «C.-R. Ac. Sc. Paris», t. 188, p. 1136; t. 189, p. 443; t. 190, p. 571.

Matematica. — *Pseudolimiti di funzioni, pseudocontinuità ecc.*
Nota⁽¹⁾ di G. ANDREOLI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

1. *Definizioni.* — Come abbiamo già fatto per la variabile discontinua — indice — passiamo a definire lo pseudolimiti per la variabile continua.

Nel caso comune per definire il limite si considera senz'altro l'insieme dei valori assunti in un certo intervallo; si fa tendere questo intervallo ad un punto (valore della x) e si esamina l'insieme dei valori della funzione comuni a tutti quegli intervalli: trascurando eventualmente insiemi di misura nulla.

Nella definizione che daremo saranno invece trascurati anche insiemi di misura non nulla, purché a *densità* nulla nel punto considerato.

Per fissare le idee, si voglia considerare il limite a destra; cioè il comportamento della funzione $f(x)$ allorché x tende a ξ (per comodità $\xi = 0$) decrescendo.

Definiamo a partire da $f(x)$ una funzione indicatrice assumente i soli valori 0 ed 1; e precisamente: 0, se $f(x)$ assume valori interni ad $(y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ estremi inclusi ed y_0 essendo arbitrario; 1, nel caso contrario; tale funzione la noteremo $\varphi(x; y_0 \pm \sigma)$.

Consideriamo inoltre, per l'intervallo $(0, b)$ il rapporto

$$\frac{1}{b} \int_0^b \overline{\varphi(x, y_0 \pm \sigma)} dx$$

ove l'integrale sovrasegnato valga integrale per eccesso: esso rappresenta la misura esterna dell'insieme compreso fra 0 e b nel quale f assume valori differenti da y_0 per più di σ .

Se vale la

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{b} \int_0^b \overline{\varphi(x, y_0 \pm \sigma)} dx = 0 \quad ; \quad \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^b (1 - \overline{\varphi}) dx = 1$$

qualunque sia σ , noi diremo che y_0 è *pslim* di $f(x)$ per x tendente a zero da destra; segnando

$$\text{pslim}_{x \rightarrow 0} f(x) = y_0.$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1930.

Tale definizione equivale, in sostanza, a dire che l'insieme dell'intorno di o , nel quale $f(x)$ assume valori differenti per più di σ da y_o , ha *densità* nulla nel punto, comunque piccolo sia σ : e ciò anche se nell'intorno o in prossimità di $x = o$ l'insieme stesso non sia misurabile.

2. *Proprietà dello pseudolimito.* — Anzitutto, anche in questo caso, *lo pslim, se esiste, è unico.* Se così non fosse dovrebbero esservene almeno due: y'_o, y''_o . Quindi in o, h si dovrebbe avere

$$\text{mis. est. insieme } \{ |f(x) - y'_o| > \sigma \} = \varepsilon' h$$

ove ε' tende a zero con h ; e similmente

$$\text{mis. est. insieme } \{ |f(x) - y''_o| > \sigma \} = \varepsilon'' h.$$

Intanto, affinché y'_o sia pseudolimito, deve essere anche

$$\text{mis. est. insieme } \{ |f(x) - y'_o| \leq \sigma \} = (1 - \varepsilon) h.$$

Ma, quest'ultimo insieme, allorché σ è minore di $|y'_o - y''_o|$ è tutto contenuto nel penultimo: si giunge quindi ad una contraddizione eliminata, solo, se $y'_o = y''_o$. c. v. d.

Similmente vale la proprietà della somma; cioè: *lo pseudolimito della somma di due funzioni esiste ed è eguale alla somma dei due pseudolimiti delle funzioni, se questi esistono.*

Cioè dalle

$$\text{pslim}_{x=o} f(x) = f_o \quad ; \quad \text{pslim}_{x=o} g(x) = g_o.$$

si trae

$$\text{pslim}_{x=o} \{ f(x) + g(x) \} = f_o + g_o.$$

Ed in effetti, le due definizioni ci dicono che, fissato h , per un certo σ esisteranno due insiemi

$$\left. \begin{array}{l} F'(\sigma) \text{ per cui } |f_o - f(x)| \leq \sigma \\ F''(\sigma) \text{ per cui } |f_o - f(x)| > \sigma \end{array} \right\} \quad 0 \leq x \leq h$$

con

$$\text{mis. est. } F'(\sigma) = \{ 1 - \varepsilon(\sigma) \} h \quad ; \quad \text{mis. est. } F''(\sigma) = \eta(\sigma) \cdot h,$$

ove ε, η tendono a zero con h ; e similmente esisteranno G', G'' .

Si deduce che — *tutt'al più* — in $F'' + G''$ la $f(x) + g(x)$ differisce da $f_o + g_o$, in modulo, per più di 2σ ; ove ovviamente $\text{mis. est. } (F'' + G'') \leq$

\leq mis. est. F'' + mis. est. G'' . Quindi se H'' è l'insieme pel quale si verifica la disuguaglianza suddetta sarà

$$\text{mis. est. } H''(\sigma) = \varepsilon'(\sigma) \cdot h$$

con ε' tendente a zero con h , qualunque sia σ . c. v. d.

In modo analogo si dimostrerebbe il teorema nel caso del prodotto ecc.

3. *Esempio.* — Per chiarire la consistenza delle definizioni date, consideriamo una $f(x)$, definita in $(0, 1)$, assumente i soli valori 0, 1:

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{in } (2^{-r}; 2^{-r} - q^{-r}) \equiv I_r \quad (r = 1, 2, \dots; q > 2) \\ f(x) = 0 & \text{fuori degli } I_r \end{cases}$$

ove in ogni I_r si escluda l'estremo inferiore.

Se scegliamo $y_0 = 0$, qualunque sia σ la funzione indicatrice φ coincide sempre con la $f(x)$ stessa.

Per $h = \frac{1}{2^r}$ si avrà intanto

$$\int_0^h f(x) dx = \sum_{n=r}^{\infty} \text{mis. } I_r = \frac{1}{q^{r-1}} \cdot \frac{1}{q-1}$$

in quanto f è eguale ad 1 proprio e solo negli I_r . Invece per $h = \frac{1}{2^r} - \xi$,

con $\xi < \frac{1}{q^r}$, si avrà ovviamente:

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{1}{q^{r-1}} \cdot \frac{1}{q-1} - \xi$$

mentre per $h = \frac{1}{2^r} - \frac{1}{q^r}$ sino ad $h = \frac{1}{2^{r+1}}$, il valore di quell'integrale

$$\text{è } \frac{1}{q^r} \cdot \frac{1}{q-1}.$$

Quindi, per h incluso in $\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2^{r+1}}$, nel primo tratto sarà

$$\frac{1}{h} \int_0^h f(x) dx = \frac{\frac{1}{q^{r-1}} \cdot \frac{1}{q-1} - \xi}{\frac{1}{2^r} - \xi}, \quad \left(\xi < \frac{1}{q^r} \right)$$

e nel secondo tratto, invece

$$\frac{\frac{1}{q^r} \cdot \frac{1}{q-1}}{\frac{1}{2^r} - \xi} \quad \left(\frac{1}{q^r} \leq \xi < \frac{1}{2^r} \right).$$

Dunque al tendere di h e zero quel rapporto tende a zero.

Pertanto $y_0 = 0$ è lo pslim di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$, mentre il limite ordinario non esiste.

4. *Pseudocontinuità semplice od uniforme.* — Da quanto precede, si può dedurre un'estensione del concetto di funzione continua. Precisamente noi diremo che una funzione è pseudocontinua in un punto ξ , se il valore $f(\xi)$ nel punto stesso coincide con lo pslim nel punto.

Quindi in sostanza la pseudocontinuità esige:

I. Che esista $\text{pslim}_{x \rightarrow \xi} f(x) = f^*$.

II. Che $f(\xi) = f^*$;

naturalmente si può definire ciò a destra, a sinistra o nell'intorno di ξ .

È ovvio che: ogni funzione continua è anche pseudocontinua.

Con procedimento analogo si può definire la *pseudocontinuità uniforme*; e precisamente si dirà che una $f(x)$ è uniformemente pseudocontinua in (a, b) , se per ogni σ comunque piccolo esistono due numeri h ed ε , tali che, qualunque sia x in (a, b) , l'insieme

$$E(x; h; \sigma) \equiv \text{insieme } |f(x) - f(x \pm k)| > \sigma; \quad (k < h)$$

soddisfi alla condizione

$$\text{mis. est. } E < \varepsilon \cdot h$$

con ε tendente a zero con h .

Contrariamente alla continuità ordinaria, non coincidono le due definizioni di pseudocontinuità semplice e pseudocontinuità uniforme.

Intanto quest'ultima occorre, poichè nelle trasformazioni d'intervallo (funzioni di funzioni) si verifica attraverso facili esempi che:

I. Una funzione pseudocontinua di funzione pseudocontinua può non essere tale.

II. Una funzione uniforme pseudocontinua di funzione uniforme pseudocontinua è ancora tale.

Un esempio di funzione pseudocontinua, ma non uniformemente, è qui dato.

Si parta dalla $f(x)$ definita or ora; e da essa ricaviamo un'altra funzione $\varphi(x, q)$ nel modo ⁽¹⁾ seguente:

$\varphi(x, q) = f(x, q)$ quasi dovunque, salvo in $\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2^r} - \frac{1}{q^{2r}}$ nei quali varia linearmente da 0 ad 1; ed in $\frac{1}{2^r} - \frac{1}{q^r} + \frac{1}{q^{2r}}; \frac{1}{2^r} - \frac{1}{q^r}$ nei quali varia linearmente da 1 a 0 ($r = 1, 2, \dots$).

(1) Poniamo in evidenza la q che è servita a definire la $f(x)$, ponendo poi questa nulla fuori di 0, 1.

Si vede che la φ esclude tutte le discontinuità a salto della f ; come essa è discontinua in $x = 0$, pure essendo ambedue pseudocontinue in tal punto. Formiamo adesso la funzione:

$$\Phi(x) = \sum_1^n \varphi\left(\frac{1+x}{2^r}; q_r\right) \quad q_r < 2.$$

In sostanza tale serie si riduce al solo termine n -simo per x compreso in $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, essendo nulli tutti gli altri termini del sommatorio in tale intervallo. Quindi la $\Phi(x)$ è continua ovunque, salvo nei punti $\frac{1}{2^r}$, nei quali non esiste il limite.

Però essa è ivi pseudocontinua, ed il valore ϵ dipende dalla scelta delle q_r .

Quindi, se le q_r tendono ad $\frac{1}{2}$ crescendo, si verificherà che la $\Phi(x)$ pur essendo pseudocontinua ovunque non lo sarà *uniformemente* nell'intorno dell'origine, poichè non sarà possibile scegliere un solo valore di ϵ che valga intorno a tutti i punti $\frac{1}{2^r}$. c. v. d.

6. *Pseudolimiti di successioni di funzioni.* — Per mostrare come anche nel campo funzionale si applichino i concetti svolti in queste due Note, vogliamo far vedere come una successione di funzioni può ammettere pseudolimiti, mentre di sicuro il limite non v'è.

Consideriamo dunque l'intervallo $(0, 1)$ diviso nei parziali

$$I_r = \left(\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2^{r-1}}\right)$$

e diciamo che una funzione ha un « dente » in I_r se parte dal valore 0, cresce linearmente sino ad 1 nel suo punto medio, e decresce poi sino a zero nell'altra metà di I_r .

Orbene definiamo una successione di funzioni $f_n(x)$ tali che siano generalmente nulle, salvo che nell'intervallo I_r tutte le funzioni il cui indice sia una potenza $(r+1)$ esatta che hanno un dente.

In altri termini una funzione $f_n(x)$ generica è sempre nulla, salvo ad avere dei « denti » negli intervalli I_q e solo quando n sia una potenza $(p+1)$ -esima esatta.

Quindi — tutte le f_n — hanno generalmente valore nullo.

Intanto, scelto un qualunque valore di x , si vede che le $f(x)$ aventi valore diverso da zero formano una sottosuccessione che è sempre di frequenza nulla.

Pertanto, si avrà

$$\text{pslim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Geometria. — *Sulle linee di curvatura e sulle geodetiche di una superficie.* Nota ⁽¹⁾ di M. MANARINI, presentata dal Corrispondente P. BURGATTI.

In questa Nota do anzitutto una condizione necessaria e sufficiente perchè una linea sia di curvatura, fondata sul parallelismo di Levi-Civita.

Stabilisco poi due formule che, in ogni punto di una superficie, legano le curvature di flessione e di torsione normali o della geodetica tangente di tre curve qualunque uscenti da quel punto, e delle quali due siano ad angolo retto; in particolare esse danno una relazione fra le curvature di flessione e di torsione, in ogni punto della superficie, di tre geodetiche in quelle condizioni.

1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una linea (L) tracciata sopra una superficie (σ) sia una linea di curvatura, è che il vettore unitario \mathbf{n} , normale alla (σ) nei punti P della (L), diventando tangenziale alla sfera unitaria nella rappresentazione sferica per tangenti della (L), si trasporti per parallelismo di Levi-Civita, lungo la linea sferica (L_1) immagine di (L).*

La condizione è necessaria. Infatti se (L) è linea di curvatura sarà ⁽²⁾:

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{n}}{dP} dP \wedge dP = 0,$$

ossia, lungo (L),

$$(1') \quad d\mathbf{n} \wedge \mathbf{t} = 0,$$

essendo al solito

$$\mathbf{t} = \frac{dP}{ds}.$$

Consideriamo sulla sfera (S) di raggio unitario, la curva (L_1), rappresentazione per tangenti della (L), definita cioè da

$$P_1 - O = \mathbf{t};$$

così vediamo subito che il vettore \mathbf{n} risulta nei punti P_1 , corrispondenti dei punti P, tangente alla sfera, giacchè:

$$\mathbf{n} \times (P_1 - O) = \mathbf{n} \times \mathbf{t} = 0.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1930.

(2) Cfr. *Analisi vettoriale generale*, vol. II, *Geometria differenziale*, BURGATTI, parte I, p. 36.

La (1') mostra che $d\mathbf{n}$ risulta normale alla sfera (S) e perciò su questa sfera abbiamo (1)

$$(2) \quad d_v \mathbf{n} = 0,$$

ove d_v è il simbolo di *differenziale superficiale*. La (2) dà la condizione (1) affinchè il vettore \mathbf{n} , che risulta tangenziale alla sfera, si sposti per parallelismo lungo la curva (L_1) (parallelismo di Levi-Civita).

Viceversa, se \mathbf{n} , normale alla superficie nei punti P di (L), si sposta per parallelismo nel senso di Levi-Civita lungo la (L_1) di (S), si ha la (2) e quindi è vera la (1') ossia la (1), ciò che assicura essere la (L) linea di curvatura. c. d. d.

2. Consideriamo ora sopra una superficie (σ) un sistema di coordinate curvilinee ortogonali ed in un punto qualunque P siano \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 i vettori unitari che ne definiscono le tangenti alle due linee coordinate passanti per quel punto (sarà $\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = 0$).

Sia \mathbf{n} il vettore unitario che definisce la normale alla superficie in P, rivolto verso l'interno.

Poniamo che sia

$$(1) \quad \mathbf{n} = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2.$$

Consideriamo per P una linea (L) qualunque di (σ), e \mathbf{t} sia il vettore unitario che ne definisce la tangente; indichiamo con s_1 , s_2 ed s gli archi contati rispettivamente sulle due linee coordinate e sulla (L).

Poniamo che sia φ l'angolo che (L) forma in P con la linea coordinata di tangente \mathbf{t}_1 , onde avremo:

$$(2) \quad \mathbf{t} = \cos \varphi \cdot \mathbf{t}_1 + \sin \varphi \cdot \mathbf{t}_2,$$

da cui derivando rispetto ad s e moltiplicando scalarmente per \mathbf{n} ricaviamo

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} = \cos \varphi \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} \times \mathbf{n} + \sin \varphi \frac{d\mathbf{t}_2}{ds} \times \mathbf{n}.$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} &= \frac{d\mathbf{t}_1}{dP} \cdot \frac{dP}{ds} = \frac{d\mathbf{t}_1}{dP} \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{t}_1}{dP} (\mathbf{t}_1 \cos \varphi + \mathbf{t}_2 \sin \varphi) = \\ &= \cos \varphi \frac{d\mathbf{t}_1}{dP} \mathbf{t}_1 + \sin \varphi \frac{d\mathbf{t}_1}{dP} \mathbf{t}_2 \\ &= \cos \varphi \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} + \sin \varphi \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_2}; \end{aligned}$$

(1) Cfr. opera citata, BOGGIO, parte III, p. 256.

ed analogamente

$$\frac{d\mathbf{t}_2}{ds} = \cos \varphi \frac{d\mathbf{t}_2}{ds_1} + \sin \varphi \frac{d\mathbf{t}_2}{ds_2}.$$

Sostituendo in (3), si ottiene

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} = \cos^2 \varphi \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} \times \mathbf{n} + \sin^2 \varphi \frac{d\mathbf{t}_2}{ds_2} \times \mathbf{n} + \sin \varphi \cos \varphi \left(\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_2} + \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{t}_2}{ds_1} \right).$$

Data una curva qualunque $P(s)$ sopra una superficie, chiamiamo *flessione normale* e *torsione normale* di questa rispettivamente le grandezze:

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} \quad , \quad \frac{1}{\tau_n} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{n}^{(1)},$$

ove $\mathbf{t} = \frac{dP}{ds}$, \mathbf{n} il vettore unitario normale alla superficie in P , diretto verso l'interno e $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Si noti che, se la $P(s)$ è una geodetica, queste quantità coincidono con la flessione e la torsione della curva.

Posto ciò, indicando con l'indice 1 e con l'indice 2 queste quantità quando sono relative alle due linee coordinate per P e senza alcun indice quando sono relative alla (L) , poichè si ha:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{t}_2}{ds_1} \times \mathbf{n} = -\frac{d(\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{n})}{ds_1} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\tau_{n,1}} \\ \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_2} \times \mathbf{n} = \frac{d(\mathbf{t}_2 \wedge \mathbf{n})}{ds_2} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\tau_{n,2}}, \end{cases}$$

la (4) si può scrivere:

$$(6) \quad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{\rho_{n,1}} \cos^2 \varphi + \frac{1}{\rho_{n,2}} \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \left(-\frac{1}{\tau_{n,1}} + \frac{1}{\tau_{n,2}} \right).$$

Passiamo ora al calcolo di $\frac{1}{\tau_n}$, relativamente alla (L) . Per essere $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ si ha

$$\mathbf{b} = \sin \varphi \cdot \mathbf{t}_1 - \cos \varphi \cdot \mathbf{t}_2,$$

(1) Si noti che la flessione normale viene ad essere la flessione della curva proiettata sulla normale alla superficie; non si ha, invece, cosa analoga per la torsione normale. Avvertiamo che quando non vi sarà l'indice n si tratterà di flessione e torsione ordinarie od assolute.

onde derivando rispetto ad s e moltiplicando scalarmente per \mathbf{n} , ricaviamo:

$$\begin{aligned} \frac{I}{\tau_n} &= \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{n} = \sin \varphi \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} \times \mathbf{n} - \cos \varphi \frac{d\mathbf{t}_2}{ds} \times \mathbf{n} \\ &= \sin \varphi \left(\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} \cos \varphi + \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_2} \sin \varphi \right) \times \mathbf{n} + \\ &\quad - \cos \varphi \left(\frac{d\mathbf{t}_2}{ds_1} \cos \varphi + \frac{d\mathbf{t}_2}{ds_2} \sin \varphi \right) \times \mathbf{n} \\ &= \sin^2 \varphi \frac{d\mathbf{t}_1}{ds_2} \times \mathbf{n} + \cos^2 \varphi \frac{d\mathbf{t}_2}{ds_1} \times \mathbf{n} + \\ &\quad + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1} \times \mathbf{n} - \frac{d\mathbf{t}_2}{ds_2} \times \mathbf{n} \right). \end{aligned}$$

Ricordando le (5) si ha subito:

$$(7) \quad \frac{I}{\tau_n} = \frac{I}{\tau_{n,1}} \cos^2 \varphi + \frac{I}{\tau_{n,2}} \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{I}{\rho_{n,1}} - \frac{I}{\rho_{n,2}} \right).$$

Le (6) e (7) sono le formule cercate.

3. Come caso particolare semplice consideriamo il cilindro di raggio r e sopra questo per linee coordinate ortogonali prendiamo le generatrici e le sezioni circolari. Queste sono inoltre geodetiche, onde le (6) e (7) ci danno, per la flessione normale e la torsione normale di una curva qualunque tracciata sul cilindro, passante per P, e che formi un angolo φ con la generatrice:

$$\frac{I}{\rho_n} = \frac{I}{r} \cos^2 \varphi \quad , \quad \frac{I}{\tau_n} = - \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{I}{r}.$$

In particolare, per l'elica passante per P, essendo una geodetica, si ottengono le note formule:

$$\frac{I}{\rho} = \frac{I}{r} \cos^2 \varphi \quad , \quad \frac{I}{r} = - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \frac{I}{r}.$$

In generale, le formule (6) e (7) assicurano che la flessione normale e la torsione normale di una linea qualunque (L) di (σ) in P coincidono con la flessione e la torsione in quel punto della geodetica che ha la stessa tangente⁽¹⁾; quindi in quelle formule possiamo sostituire la flessione normale e la torsione normale delle due linee coordinate e della (L) in P, con

(1) Per quanto riguarda la flessione bastava anche ricorrere al teorema di Meusnier generalizzato.

la flessione e la torsione delle tre geodetiche del fascio di geodetiche di centro P che sono tangenti alle precedenti e scrivere per queste

$$(6') \quad \frac{I}{\rho} = \frac{I}{\rho_1} \cos^2 \varphi + \frac{I}{\rho_2} \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \left(-\frac{I}{\tau_1} + \frac{I}{\tau_2} \right)$$

$$(7') \quad \frac{I}{\tau} = \frac{I}{\tau_1} \cos^2 \varphi + \frac{I}{\tau_2} \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{I}{\rho_1} - \frac{I}{\rho_2} \right).$$

Nel caso che le due linee coordinate siano tangenti a due direzioni principali $\frac{I}{\tau_{n,1}}$ e $\frac{I}{\tau_{n,2}}$ sono nulle e

$$\frac{I}{\rho_{n,1}} = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} \times \mathbf{n} = -\mathbf{t}_1 \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{I}{\rho_1}, \quad \frac{I}{\rho_{n,2}} = \frac{I}{\rho_2}^{(1)};$$

onde si vede subito che ne risulta

$$(6'') \quad \frac{I}{\rho_n} = \frac{I}{\rho_1} \cos^2 \varphi + \frac{I}{\rho_2} \sin^2 \varphi,$$

$$(7'') \quad \frac{I}{\tau_n} = \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{I}{\rho_1} - \frac{I}{\rho_2} \right),$$

delle quali la prima è la formula di *Eulero*⁽²⁾.

4. Consideriamo in particolare una linea (L) sopra una sfera (S) di raggio r .

Per questa dovrà risultare in ogni punto $\frac{I}{\rho_n} = \frac{I}{r}$, flessione del cerchio massimo tangente, e costantemente nulla la torsione normale.

Infatti la (L) sia definita da

$$(o) \quad \mathbf{P} - \mathbf{O} = -r\mathbf{n},$$

con r costante, O punto fisso e \mathbf{n} vettore unitario variabile. Si ha

$$\frac{I}{\rho_n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} = -\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

e dalla (o)

$$\frac{d\mathbf{P}}{ds} = \mathbf{t} = -r \frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

(1) Cfr. opera citata, p. 35.

(2) Se la (L) è una sezione normale piana in generale si ha $\frac{I}{\rho_n} = \frac{I}{\rho}$ ma non $\frac{I}{r_n} = 0$.

onde moltiplicando scalarmente per t :

$$I = -r \frac{dn}{ds} \times t,$$

da cui

$$\frac{I}{\rho_n} = \frac{I}{r}.$$

Inoltre

$$\frac{I}{\tau_n} = \frac{db}{ds} \times n = \frac{d(t \wedge n)}{ds} \times n = t \wedge \frac{dn}{ds} \times n = 0$$

in forza della (o).

D'altra parte bastava osservare che una linea sferica è una linea di curvatura e per queste è costantemente $\frac{I}{\tau_n} = 0$ ⁽¹⁾.

Geometria. — *Sur les suites de M. Fubini* Nota di S. FINIKOFF, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

M. Fubini a introduit ⁽³⁾ comme moyen de la transformation des surfaces une nouvelle espèce de congruences (que nous appellons les congruences de M. Fubini). Elle est déterminée par la condition que les lignes de Darboux se correspondent sur les deux nappes de sa surface focale. Dans cette Note j'examine les suites de Laplace dont toutes les congruences sont les congruences de M. Fubini (les suites de M. Fubini).

Rapportons notre congruence aux développables et soient ⁽⁴⁾ (x) et (y) les deux foyers de la congruence, (X) et (Y) — leurs transformés de Laplace. Nous avons alors en choisissant convenablement ⁽⁵⁾ les facteurs communs des quatre coordonnées homogènes (x) , (y) , (X) et (Y) ⁽⁶⁾.

$$(I) \begin{cases} x_u = \rho y & x_v = l\rho_v y + X \\ y_u = l\sigma_u y + Y & y_v = \sigma x \\ X_u = Mx & X_v = -Rx - Sy - PX - QY \\ Y_u = -S_x x - R_1 y - Q_1 X - P_1 Y & Y_v = M_1 y \end{cases}$$

(1) Cfr., ad. es., opera citata p. 71.

(2) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(3) FUBINI-ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, t. I, p. 283.

(4) $(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ les quatre coordonnées homogènes.

(5) *Sur les congruences stratifiables*, « Rendiconti Circolo Mat. di Palermo », t. LIII, p. 312, 1929.

(6) $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $l\sigma_u = \frac{\partial \log \sigma}{\partial u}$, $l\rho_{uv} = \frac{\partial^2 \log \rho}{\partial u \partial v}$ etc.

avec les conditions d'intégrabilité

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} M = \rho\sigma - l\rho_{uv} & M_I = \rho\sigma - l\sigma_{uv} \\ S = P_I Q - Q_u & S_I = P Q_I - Q_{Iv} \\ P_u - l\rho_{uv} = Q Q_I - \rho\sigma & P_{Iv} - l\sigma_{uv} = Q Q_I - \rho\sigma \\ R_u + M_v = Q S_I - M(P + l\rho_v) & R_{Iv} + M_{Iu} = Q_I S - M_I(P_I + l\sigma_u) \\ Q R_I - R\rho = S_u + S l\sigma_u & Q_I R - R_I\sigma = S_I + S_I l\rho_v \end{array} \right.$$

Introduisons les coordonnées locales (ζ') d'un point (ζ) par rapport au tétraèdre ($xyXY$) par les formules

$$\zeta = \zeta'_1 x + \zeta'_2 y + \zeta'_3 X + \zeta'_4 Y.$$

Le tableau (I) nous donne le développement en séries des coordonnées courantes (x') de la première nappe (x) de la surface focale

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = 1 + l\rho_v dv + \frac{1}{2} \{ 2\rho\sigma du dv + [l\rho_v^2 - l\rho_{vv} - R] dv^2 \} + \dots \\ x'_2 = \rho du + \frac{1}{2} \{ \rho[l\rho\sigma]_u du^2 + 2\rho_v du dv - S dv^2 \} + \dots \\ x'_3 = dv + \frac{1}{2} [l\rho_v - P] dv^2 + \dots \\ x'_4 = \frac{1}{2} \{ \rho du^2 - Q dv^2 \} + \frac{1}{6} \{ \rho [(l\rho\sigma)_u - P_I] du^3 + 3\rho_v du^2 dv + \\ \quad + Q [P - (lQ\rho)_v] dv^3 \} + \dots \end{array} \right.$$

Les termes du troisième ordre ne sont écrits que dans le dernier développement.

Examinons maintenant une quadrique Q

$$(4) \quad \sum a_{ik} x'_i x'_k = 0$$

osculatrice du second ordre à la surface (x). En portant les développements (3) dans l'équation (4) nous obtenons en coordonnées curvilignes du, dv l'équation de leur ligne d'intersection L . Comme elle a un point triple à l'origine $du = dv = 0$, les termes du premier et du second ordre s'annulent, d'où il suit

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0, a_{14} = -\rho, a_{22} = 1, a_{23} = 0, a_{33} = -Q\rho$$

et les termes du troisième ordre déterminent les trois tangentes de la ligne L à l'origine

$$(5) \quad \rho(\theta_2 - B) du^3 + A \rho du^2 dv + BQ du dv^2 + Q(\theta_1 - A) dv^3 = 0$$

où

$$(6) \quad A = \frac{a_{34}}{\rho}, \quad B = l Q_u - P_1 - a_{24}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \theta_1 = \frac{2}{3}(P - l\rho_v) + \frac{1}{3}(lQ\rho^3)_v \\ \theta_2 = -\frac{2}{3}(P_1 - l\sigma_u) + \frac{1}{3}(lQ^3\rho)_u \end{cases}$$

Pour un choix convenable de A et B c-à-dire de a_{24}, a_{34} les trois tangentes (5) se confondent. L'équation de la tangente confondue est

$$(8) \quad A \rho du + BQ dv = 0$$

A et B sont déterminés par les équations

$$A^2 \rho^2 = 3 B \theta_2 Q \rho - 3 B^2 Q \rho$$

$$B^2 Q^2 = 3 A \theta_1 Q \rho - 3 A^2 Q \rho$$

d'où il suit pour le quotient A : B l'équation

$$\rho^2 A^3 \theta_1 - 3 A^2 B \theta_2 Q \rho + 3 A B^2 \theta_1 Q \rho - B^3 \theta_2 Q^2 = 0.$$

En éliminant le rapport A : B à l'aide de l'équation (8), nous obtenons l'équation différentielle des lignes de Darboux sur la surface (x)

$$(9) \quad \rho \theta_2 du^3 + 3 \rho \theta_1 du^2 dv + 3 Q \theta_2 du dv^2 + Q \theta_1 dv^3 = 0.$$

Par analogie pour la seconde nappe de la surface focale (y) nous avons l'équation

$$(9^*) \quad Q_1 \theta_2^* du^3 + 3 Q_1 \theta_1^* du^2 dv + 3 \sigma \theta_2^* du dv^2 + \sigma \theta_1^* dv^3 = 0$$

où

$$\theta_1^* = -\frac{2}{3}(P - l\rho_v) + \frac{1}{3}(lQ_1^3 \sigma)_v, \quad \theta_2^* = \frac{2}{3}(P_1 - l\sigma_u) + \frac{1}{3}(lQ_1 \sigma^3)_u.$$

Si la congruence (xy) est une congruence de M. Fubini, les lignes de Darboux (9) et (9^*) se correspondent; c'est ce qui ramène à deux conditions

$$(10) \quad QQ_1 - \rho\sigma = 0, \theta_2 \theta_1^* - \theta_1 \theta_2^* = 0.$$

La première montre ⁽¹⁾ le fait bien connu que la congruence de M. Fubini est nécessairement une congruence W. En multipliant les quatre coordonnées (x) par $\varphi(u)$, les quatre coordonnées (y) par $\psi(v)$ nous réduirons

$$P = l\rho_v, P_1 = l\sigma_u$$

et la seconde équation (10) nous donne une condition caractéristique des congruences de M. Fubini

$$(11) \quad (lQ_3\rho)_u (lQ_2^3\sigma)_v = (lQ\rho^3)_v (lQ_1\sigma)_u$$

Si deux congruences consécutives d'une suite de Laplace sont les congruences de M. Fubini, toutes les deux sont des congruences W, donc des congruences R. Or les congruences R pour le choix convenable des paramètres u et v sont caractérisées par les formules ⁽²⁾

$$(12) \quad Q = \rho, Q_1 = \sigma.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (11) nous obtenons

$$(13) \quad \frac{\partial(\rho, \sigma)}{\partial(u, v)} = 0$$

donc σ est une fonction de ρ à moins qu'elle ne soit constante et que la surface (y) ne se réduise à une quadrique.

Examinons la congruence transformée de Laplace (xX) . Il suit du tableau (1)

$$X_u = M\rho\left(\frac{x}{\rho}\right), \left(\frac{x}{\rho}\right)_v = \frac{1}{\rho}X;$$

donc les quantités ρ et σ pour la congruence transformée se composent par les formules

$$(14) \quad \rho_{-1} = M\rho = \rho(\rho\sigma - l\rho_{uv}), \sigma_{-1} = \frac{1}{\rho}$$

et, la congruence (xX) étant une congruence de M. Fubini, nous avons une nouvelle condition

$$(15) \quad l\rho_{uv} = f_1(\rho).$$

(1) Loc. cit. (4) p. 330.

(2) Loc. cit. (4) p. 334.

Par analogie, si les lignes de Darboux se correspondent sur les deux nappes de la surface focale de la congruence (γY), nous avons

$$(16) \quad l\sigma_{uv} = f_2(\rho).$$

Comme σ est une fonction de ρ , l'équation (16) prend la forme

$$(17) \quad \frac{dl\sigma}{dl\rho} l\rho_{uv} + \frac{d^2 l\sigma}{dl\rho^2} l\rho_u l\rho_v = f_2(\rho)$$

donc

$$(18) \quad l\rho_u l\rho_v = f_3(\rho)$$

à moins que $\frac{d^2 l\sigma}{dl\rho^2}$ ne soit nul.

Il suit des équations (15), (18) si ρ_u n'est pas nul

$$\frac{l\rho_{nv}}{l\rho_u} = f_4(\rho) \rho_v$$

donc (1)

$$(19) \quad l\rho_n = f_4(\rho) U, \quad l\rho_v = f_4(\rho) V.$$

Or l'équation (18) donne

$$UV f_4(\rho)^2 = f_3(\rho)$$

d'où résulte que $U = a$ et $V = b$ sont des constantes et

$$(20) \quad \rho = \rho(au + bv)$$

ou bien

$$(21) \quad \rho = \rho(UV)$$

et en vertu des équations (19) sans restreindre la généralité

$$(21') \quad \rho = \rho(uv).$$

Or, en portant les valeurs (12) dans le système fondamental (2) nous obtenons pour ρ et σ les équations

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_{uu} - \rho_{vv}}{\rho} = \frac{\sigma_{uu} - \sigma_{vv}}{\sigma} = \mathfrak{D} \\ \frac{1}{2} \mathfrak{D}_{uv} = (\rho\sigma)_{uv} - (\rho\sigma)_{vv} \end{array} \right.$$

$$(1) \quad U = \varphi(u), \quad V = \psi(v).$$

qui déterminent la congruence R à une déformation projective près. Donc dans le cas (21') nous avons ⁽¹⁾

$$(23) \quad \frac{\rho''}{\rho} = \frac{\sigma''}{\sigma}, \left(\frac{\rho''}{\rho}\right)' x + 3 \left(\frac{\rho''}{\rho}\right)' = 2(\rho\sigma)'', x = uv$$

et toutes les congruences de la suite sont de la même espèce.

Dans le cas (20) le système (22) est satisfait identiquement si $a = \pm b$. Toutes les nappes des surfaces focales de la suite sont des surfaces gauches dont les génératrices correspondent.

Si $a^2 \geq b^2$, le système (22) donne ⁽¹⁾

$$(24) \quad \frac{\rho''}{\rho} = \frac{\sigma''}{\sigma} = 2 \frac{\rho\sigma}{ab} + c_1 x + c_2, x = au + bv.$$

Toutes les congruences de la suite sont des congruences de M. Fubini de la même espèce.

Si $\rho_u = 0$, donc $\sigma_u = 0$, le système (22) donne immédiatement ⁽²⁾

$$\rho = \tau^{at}, \sigma = \tau^{bt}.$$

La suite est une suite de Wilczynski.

La discussion du cas $\frac{d^2 l\sigma}{dl\rho^2} = 0$ est un peu plus longue. Nous avons alors

$$(25) \quad \sigma = \rho^c, l\rho_{uv} = f_1(\rho)$$

et le système (22) donne si $c \geq 1$ (c'est ce qui nous ramène à la suite de Wilczynski)

$$\rho\rho_{\alpha\beta} + c\rho_{\alpha}\rho_{\beta} = 0 \left(\frac{\rho_{\alpha\beta}}{\rho}\right)_{uv} = 0$$

$$\alpha = u + v, \quad \beta = u - v$$

donc ⁽³⁾

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = (A + B)^k, \sigma = (A + B)^{-k} \\ A = \varphi(\alpha), B = \psi(\beta), k = \frac{1}{c + 1} \\ A'^2 = c_1 A^2 + c_2 A + c_3, B'^2 = c_1 B^2 = c_2 B + c_4 \end{array} \right.$$

$$(1) \quad \rho'' = \frac{d^2 \rho}{d\chi^2} \text{ etc. } c_i = \text{const.}$$

$$(2) \quad a = \text{const.} \quad b = \text{const.}$$

$$(3) \quad c_i = \text{const.}, A' = \frac{dA}{d\alpha}, B' = \frac{dB}{d\beta}.$$

ou si $c = -1$

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{A}{B}, \quad \sigma = \frac{B}{A} \\ lA'' = c_1 lA + c_1 c_2 \alpha + c_4, \quad lB'' = c_1 lB + c_1 c_3 \beta + c_5. \end{array} \right.$$

Les formules (26) ne déterminent la suite de M. Fubini que si $c_1 = 0$ et dans ce cas $\rho = (c_2 uv + \text{const})^k$. Les formules (27) déterminent la suite de M. Fubini si $lA' = c_2$, $lB' = c_3$, c'est ce qui donne $\rho = e^{au+bv}$. Ainsi nous revenons aux cas (23) et (24).

La suite de Wilczynski (contenant des congruences des complexes linéaires), *la suite de Segre* (dont toutes les nappes des surfaces focales sont les surfaces gauches avec la correspondance des génératrices) et les suites (23) et (24) sont les seules suites de M. Fubini.

Il existe des congruences R qui sont en même temps les congruences de M. Fubini sans que leurs transformées de Laplace le soient; il existe les suites dont les deux et même les trois congruences consécutives sont les congruences de M. Fubini sans que la quatrième le soit. La suite contenant quatre congruences consécutives de M. Fubini est une suite de M. Fubini.

Fisica. — *Sul funzionamento di alcuni apparecchi ad insufflazione di gas* ⁽¹⁾. Nota I di G. BOZZA, presentata ⁽²⁾ dal Corresp. L. CAMBI.

Mi sono occupato, fino dal 1924 ⁽³⁾ a proposito di pompe e di apparecchi fondati sul principio in questione, del modo di calcolare l'azione e gli effetti dell'introduzione continua di un gas suddiviso in bolle nella parte inferiore di un tubo immerso in un liquido e aperto alle due estremità: entro certi limiti del rapporto fra la lunghezza della parte emersa del tubo e la sua lunghezza totale si stabilisce un flusso continuo di liquido mescolato al gas; si può sfruttare il fenomeno per innalzare il liquido stesso (pompe), o semplicemente per farlo circolare entro un recipiente appropriato (apparecchi di agitazione).

L'utilizzazione che ho fatto di un analogo meccanismo per lo studio della velocità di reazione fra un gas e un liquido ⁽⁴⁾, mi ha costretto a cer-

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 15 giugno 1930.

(3) G. BOZZA, «Atti del Congresso di Chimica Industriale», Milano 1924, p. 440 e seguenti.

(4) «Giornale di Chimica Industriale ed Applicata», 12, 283 (1930).

care le espressioni analitiche valevoli anche per il caso in cui il gas si sciolga o comunque reagisca con il liquido stesso durante il passaggio della miscela per il tubo di circolazione.

Sia un tubo a sezione costante Ω , verticale ⁽¹⁾; si indicano con h_1 e h_2 ($h_2 > h_1$) le altezze su un piano arbitrario delle due sezioni estreme di esso, con p_1 e p_2 le pressioni corrispondenti durante il funzionamento a regime; e sia p_0 la pressione fondamentale, cui corrisponda la densità γ_0 del gas. Sia ρ la densità del liquido. Si introducano al livello h_1 di ingresso, ogni secondo, le quantità P_l e P_g di liquido e di gas ⁽²⁾. In una generica sezione all'altezza h , nella quale la pressione sia p , si avrà una velocità W_l del liquido e una velocità W_g del gas ($W_g > W_l$); la differenza fra esse è la velocità relativa delle bolle di gas rispetto al liquido, w_g ; ammetterò nel gas trasformazioni isoterme ⁽³⁾, ossia nella sezione generica la densità del gas sarà data da

$$(1) \quad \gamma = \gamma_0 \frac{p}{p_0}.$$

Indicando con $d\zeta$ la perdita di pressione per attrito sulle pareti del tubo e per dissipazione interna alla miscela liquido-gas lungo un tratto dh , l'egualianza fra lavoro speso sul fluido e variazione di energia cinetica, più le perdite, conduce all'espressione

$$(2) \quad \frac{P_l}{W_l} \left\{ \frac{dp}{\rho} + g dh - W_l dW_l \right\} + \frac{P_g}{W_g} \left\{ \frac{dp}{\gamma} + g dh - W_g dW_g \right\} = -\Omega d\zeta.$$

In ciascuna sezione deve inoltre essere Ω la somma delle aree occupate mediamente dal liquido e dal gas, cioè

$$(3) \quad \frac{P_l}{W_l} \frac{1}{\rho} + \frac{P_g}{W_g} \frac{1}{\gamma} = \Omega.$$

Sostituendo e riordinando si ha

$$(4) \quad -\Omega(dp + d\zeta) + P_l dW_l + P_g dW_g = \left(\frac{P_l}{W_l} + \frac{P_g}{W_g} \right) g dh.$$

In essa W_l e W_g risultano in definitiva funzioni della pressione p ($W_l = f(p)$; $W_g = \varphi(p)$) solamente, se le quantità di gas e di liquido

(1) È necessario fare fin dall'inizio l'assunzione che il tubo sia verticale, perchè un tubo inclinato funzionerebbe in un modo assolutamente differente, avvenendo subito la separazione fra gas e liquido.

(2) Espresse in g-massa al secondo.

(3) Data la piccola capacità calorifica del gas rispetto al liquido con il quale si mescola.

non variano, se si considerano la (3) e la

$$(5) \quad W_g = W_l + w_g$$

in cui w_g è legata alla pressione e alla grandezza delle bolle di gas per per mezzo della

$$(6) \quad w_g = k' \left(\frac{6 P_g}{n \pi \gamma_o} \frac{p_o}{p} \right)^{1/6};$$

n rappresenta il numero di bolle in cui è suddivisa la massa P_g di gas⁽¹⁾, e k' è un coefficiente di resistenza per il moto delle bolle attraverso il liquido. L'espressione (4) è perciò la relazione generale fra l'altezza h e la pressione p nel tubo.

Supponendo trascurabili le variazioni di energia cinetica lungo il tubo e la quantità $\frac{P_g}{W_g}$, risulta

$$(7) \quad -\Omega (dp + d\zeta) = \frac{P_l}{W_l} g dh$$

la quale, nell'assunzione di perdite nulle, corrisponde all'espressione già dedotta per via diversa nella precitata pubblicazione:

$$(8) \quad -\Omega dp = \frac{P_l}{W_l} g dh$$

la quale vale quindi solo nelle supposizioni limitative preindicate.

Ponendo, per comodità,

$$\zeta' = \frac{\Omega}{g} \frac{W_l}{P_l} \cdot \frac{d\zeta}{dh}$$

risulta l'espressione che utilizzeremo in seguito

$$(9) \quad -\Omega dp = \frac{P_l}{W_l} g (1 + \zeta') dh.$$

Data la forma che risulta per la dipendenza fra W_l e p , la risoluzione della espressione (8) e, a maggior ragione, della completa (4), in valori numerici è possibile solo avendo tabelle degli integrali corrispondenti, che devono essere calcolati, come, ad es., è indicato, per la (8), nella nota cit.⁽²⁾.

(1) Si ammette naturalmente che, durante tutto il percorso, il numero delle bolle non varii, ossia che non si abbia riunione di più bolle in una sola.

(2) V. nota 3.

Questo premesso come completamento delle deduzioni fatte precedentemente, supponiamo il caso che il gas che agisce come fluido motore si sciolga nel liquido o reagisca con esso. Bisognerà conoscere, oltre i dati precedenti, anche l'equazione di dissoluzione del gas

$$(10) \quad -\frac{\partial V}{\partial t} = KS(p - p')$$

nella quale V è il volume di gas che passa al secondo per una certa sezione, S la superficie totale di contatto fra il liquido e il gas, p la pressione che regna nella sezione, p' la tensione del gas già disciolto nel liquido (si suppone per ora nulla la tensione di vapore del liquido, e che il gas sia puro), e K la costante di assorbimento, che eventualmente può tener conto anche dell'influenza dei prodotti di reazione che rimangono disciolti nel liquido. Poichè

$$(11) \quad V = \frac{P_g}{\gamma_o} \frac{p_o}{p}$$

la (10) diviene

$$-\frac{dP_g}{dt} = KS(p - p') \frac{\gamma_o}{p_o} \cdot p.$$

Se il gas è suddiviso in n bolle eguali, sferiche, la superficie totale di esse è

$$(12) \quad S = n\pi \left(\frac{6 P_g p_o}{n\pi \gamma_o p} \right)^{2/3};$$

quindi, sostituendo,

$$(13) \quad -\frac{dP_g}{dt} = K \left(\frac{36 n\pi \gamma_o}{p_o} \right)^{1/3} (p - p') \cdot p^{1/3} \cdot P_g^{2/3}.$$

Essendo W_g la velocità del gas, nel tempo dt la bolla percorre

$$dh = W_g \cdot dt$$

quindi

$$(14) \quad -\frac{dP_g}{P_g^{2/3}} = K \left(\frac{36 n\pi \gamma_o}{p_o} \right)^{1/3} (p - p') \cdot p^{1/3} \frac{dh}{W_g},$$

relazione fra l'altezza e la quantità di gas.

Combinando questa con la (2), si può eliminare h e avere quindi una espressione che leghi la pressione alla quantità di gas; ma essa risulta im-

praticabile. Utilizzando invece la (9), ammettendo cioè le ipotesi semplificative che hanno condotto a quest'ultima, si ottiene

$$(15) \quad P_g^{-2/3} \cdot dP_g = C' \frac{W_1}{W_g} (p - p') p^{1/3} \cdot dp$$

nella quale la costante C' ha il valore

$$(16) \quad C' = K \left(\frac{36 \pi \gamma_0}{p_0} \right)^{1/3} \frac{\Omega}{g} \frac{1}{P_1 (1 + \zeta')}.$$

Il rapporto $\frac{W_1}{W_g}$ è funzione di p e di P_g . Per rendere possibile l'integrazione della (15) è necessario considerare casi particolari.

Ammettiamo che si possa supporre praticamente costante il rapporto suddetto lungo il tubo: vedremo in quali condizioni questo è possibile.

Allora, posto

$$C = C' \cdot \frac{W_1}{W_g},$$

la (15) diviene

$$(17) \quad P_g^{-2/3} \cdot dP_g = C \cdot (p - p') p^{1/3} dp.$$

Nell'ipotesi che p' sia costante, l'integrazione fornisce

$$(18) \quad P_g^{1/3} = P_{g1}^{1/3} - C \left(\frac{p_1^{7/3} - p^{7/3}}{7} - p' \frac{p_1^{4/3} - p^{4/3}}{4} \right)$$

sapendo che all'ingresso (pressione p_1) la quantità di gas introdotta è P_{g1} . Si ha così la quantità di gas ancora esistente in una sezione nella quale la pressione sia p .

Dalla (3) si può ricavare la relazione

$$W_1 = \frac{P_1}{\Omega \rho} + \frac{P_g}{\Omega \gamma_0} \frac{p_0}{p} \frac{W_1}{W_g};$$

indicando il rapporto $\frac{W_1}{W_g}$, che abbiamo supposto costante, con a , e sostituendo il valore di W_1 così ottenuto nella (9), si ha

$$(19) \quad dh = - \frac{1}{1 + \zeta'} \cdot \frac{1}{g} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{P_g}{P_1} \frac{1}{\gamma_0} \cdot a \frac{p_0}{p} \right) dp.$$

Se in questa si sostituisce per P_g il valore (18) ricavato dalla prima integrazione, si ha una relazione fra h e p , che, integrata, può essere utile per determinare la prevalenza del dispositivo supposto funzionante come pompa.

Naturalmente la (18) si semplifica ancora se si suppone trascurabile la tensione del gas disciolto in confronto alla pressione esistente:

$$(20) \quad P_g^{1/3} = P_{g1}^{1/3} - C \frac{p^{7/3} - p_1^{7/3}}{7}.$$

Si ha un caso più generale quando il gas motore non è puro, ma è costituito da una miscela di gas, dei quali uno solo può essere assorbito, mentre gli altri sono inerti. Sia P_g la massa di gas assorbibile passante al secondo per una data sezione, sia P'_g quella della miscela di gas inerti (costante nelle diverse sezioni); γ e γ' ne siano le rispettive densità alla pressione p . Tenendo conto che la pressione che compare nella (10) è la pressione parziale del gas assorbibile, esprimibile con

$$(21) \quad p = \frac{\frac{P_g}{\gamma_o}}{\frac{P'_g}{\gamma'_o} + \frac{P_g}{\gamma_o}}$$

in funzione delle quantità di gas e della pressione totale p , e che la superficie e il volume delle bolle sono dati rispettivamente da

$$(22) \quad S = n\pi \left(\frac{6}{n\pi} \frac{p_o}{p} \left\{ \frac{P'_g}{\gamma'_o} + \frac{P_g}{\gamma_o} \right\} \right)^{2/3}.$$

$$(23) \quad V = \left(\frac{P'_g}{\gamma'_o} + \frac{P_g}{\gamma_o} \right) \frac{p_o}{p}$$

e ponendo

$$(24) \quad G = \frac{\gamma_o}{\gamma'_o} P'_g + P_g$$

risulta, invece della (17), l'espressione

$$(25) \quad G^{-2/3} \cdot dG = C \left(\frac{G - \frac{\gamma_o}{\gamma'_o} P'_g}{p - \frac{G}{p}} - p' \right) p^{1/3} dp.$$

Essa è di difficile integrazione se non si suppone nulla o trascurabile la pressione p' ; in tal caso

$$(26) \quad \frac{G^{1/3}}{G - \frac{\gamma_0}{\gamma'_0} P'_g} dG = C p^{4/3} dp.$$

Ponendo

$$A = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma'_0} P'_g \right)^{1/3} \quad \text{e} \quad x = \frac{G^{1/3}}{A},$$

si ha per integrazione

$$(27) \quad A \left[x + \frac{1}{6} \ln \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arccotg \frac{1 + 2x}{\sqrt{3}} \right]_{x_1}^x = \frac{1}{7} C (p_1^{7/3} - p^{7/3}).$$

L'espressione entro parentesi quadre, che deve essere limitata fra i valori estremi di x corrispondenti a p_1 e p , dipende solo dal rapporto fra gas totale e gas inerte, non dalla quantità assoluta di essi; una tavola quindi di essa calcolata per i valori possibili di x ($1 \leq x \leq \infty$) è utile per risolvere il problema numericamente. Se $P'_g = 0$, $G = P_g$ e, naturalmente, la (27) coincide con la (20).

Si può agevolmente vedere, confrontando i valori numerici ricavabili in condizioni corrispondenti dalle (27) e (20), come sia più lento l'assorbimento di gas se questo non è puro.

Completamente differente è il trattamento quando il liquido non è trascinato dal gas, ma le bolle si muovono solamente attraverso di esso. Bisogna allora mantenere esplicita la velocità ascensionale delle bolle, espressa dalla (6). Sostituendo nella (14) si ottiene l'espressione

$$(28) \quad -P_g^{-1/2} dP_g = \frac{K}{k'} \left(\frac{6 n \pi \gamma_0}{p_0} \right)^{1/2} (p - p') p^{1/2} dh.$$

Nel volume Ωdh sono contenute $n \frac{dh}{w_g}$ bolle, con un volume complessivo

$$\frac{P_g}{\gamma_0} \frac{p_0}{p} \frac{dh}{w_g},$$

perciò la densità della miscela gas-liquido risulta

$$\varphi \left(1 - \frac{P_g}{\Omega} \frac{p_0}{\gamma_0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{w_g} \right)$$

da cui la relazione

$$(29) \quad -dp = \rho g \left(1 - \frac{P_g}{\Omega} \frac{p_0}{\gamma_0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{w_g} \right) dh$$

che sostituisce la (19). Eliminando h fra questa e la (28), si ha un'equazione fra p e P_g , però non integrabile se non numericamente. Essa serve a definire l'assorbimento di un gas che salga in numerosissime bolle attraverso un liquido fermo. Se invece le bolle sono isolate, si può ammettere senz'altro che la relazione fra dp e dh sia $-dp = \rho g dh$, e quindi

$$(30) \quad P_g^{-1/2} \cdot dP_g = D(p - p') p^{1/2} dp$$

con la costante D data da

$$(31) \quad D = \frac{K}{k'} \left(\frac{6 \pi \gamma_0}{p_0} \right)^{1/2} \frac{1}{\rho g}.$$

L'integrazione fornisce

$$(32) \quad P_g^{1/2} = P_{g1}^{1/2} - D \left(\frac{p_1^{5/2} - p^{5/2}}{5} - p' \frac{p_1^{3/2} - p^{3/2}}{3} \right)$$

e, se p' viene supposto nullo,

$$(33) \quad P_g^{1/2} = P_{g1}^{1/2} - D \frac{p_1^{5/2} - p^{5/2}}{5}.$$

Se il gas non è puro, si ha analogamente

$$(34) \quad B \left[x + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \right]_{x_1}^x = \frac{D}{5} (p_1^{5/2} - p^{5/2})$$

con gli stessi simboli usati precedentemente, e con

$$B = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0'} P_g' \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad x = \frac{G^{1/2}}{B}.$$

Applicherò in una Nota successiva per il calcolo generale di alcuni apparecchi di reazione e di assorbimento le formule sopra dedotte.

Chimica. — *Solfocianuri complessi del molibdeno tetravalente* ⁽¹⁾.

Nota ⁽²⁾ di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio R. NASINI.

I solfocianuri delle forme inferiori di combinazione del molibdeno non sono tutti noti. Quelli del molibdeno trivalente furono descritti da A. Chilesotti ⁽³⁾, A. Rosenheim e A. Garfunkel ⁽⁴⁾, G. Scagliarini e G. Tartarini ⁽⁵⁾; quelli del molibdeno pentavalente da A. Rosenheim e M. Koss ⁽⁶⁾, G. A. Barbieri ⁽⁷⁾, R. G. James e W. Wardlaw ⁽⁸⁾. Non si conoscono ancora quelli del molibdeno tetravalente.

J. Sand ⁽⁹⁾ partendo da soluzioni di molibdato e solfocianuro potassico acidificate con acido cloridrico e ridotte per via elettrolitica, ritenne di aver ottenuto, mediante estrazione con etere e trattamento dell'estratto etero con piridina, dei solfocianuri complessi del molibdeno tetravalente: ma le ricerche di A. Rosenheim ⁽¹⁰⁾ misero poi fuori di dubbio che si trattava di composti in parte del molibdeno pentavalente e in parte del molibdeno trivalente.

Che la via della riduzione elettrolitica non sia la più indicata per giungere ai solfocianuri del molibdeno tetravalente si può anche dedurre dalle misure eseguite da A. Chilesotti ⁽¹¹⁾ sull'andamento della riduzione elettrolitica dell'acido molibdico in soluzione cloridrica, giacchè mentre esse comprovano l'esistenza in soluzione di composti MoX_5 , quali primi termini della riduzione, e di composti MoX_3 , quali termini finali, non forniscono alcun indizio certo sull'esistenza, nelle soluzioni catodiche, di composti intermedi MoX_4 .

I sali finora noti del molibdeno tetravalente, alogenuri e cianuri, non possono prestarsi in alcun modo alla preparazione per doppio scambio dei solfocianuri perchè, mentre gli alogenuri, che, com'è noto, si ottengono

(1) Lavoro eseguito presso il Laboratorio Chimico del R. Istituto Sup. Agrario di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1930.

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 34, II, 493 (1904).

(4) « Ber. », 41, 2386 (1908).

(5) « Gazz. Chim. Ital. », 53, 878 (1923).

(6) « Z. Anorg. Chem. », 49, 148 (1906).

(7) « Rend. Accad. Lincei » [5], 28, I, 351 (1919).

(8) « J. Chem. Soc. », 1928, 2726.

(9) « Ber. », 38, 3384 (1905); 39, 1761-2038 (1906); 40, 4504 (1907); 41, 1500 1861-3367 (1908); 42, 2642 (1909).

(10) « Ber. », 41, 2386 (1908); 42, 149-2295 (1909).

(11) « Z. Elektrochem. », 12, 146-173-197 (1906).

soltanto per via secca, si alterano rapidamente a contatto dell'acqua, i cianuri sono composti complessi eccessivamente stabili e non è pensabile che in essi i gruppi (CN) possano venir sostituiti da gruppi (CNS).

Anche alcuni tentativi di partire dal biossido idrato di molibdeno sciogliendolo in acido solfocianico, in presenza di solfocianuri alcalini o di solfocianuri di basi organiche, non mi diedero finora risultati soddisfacenti.

Restava infine un'ultima via possibile: giungere ai solfocianuri del molibdeno tetravalente mediante l'ossidazione cauta dei solfocianuri del molibdeno trivalente. È stata questa la via che mi ha condotto alla preparazione dei nuovi composti descritti in questa Nota.

L'azione degli ossidanti sopra i solfocianuri del molibdeno trivalente era stata sperimentata qualitativamente dal Chilesotti⁽¹⁾. Egli aveva osservato che l'acqua ossigenata produce nella soluzione neutra del composto $K_3Mo(CNS)_6 \cdot 4H_2O$ una colorazione prima verde, poi azzurra e finalmente gialla, con liberazione di acido cianidrico. Evidentemente l'acqua ossigenata, aggiunta in eccesso, oltre che sul molibdeno, che probabilmente arriva ad acido permolibdico, agisce sull'acido solfocianico ossidando lo zolfo e mettendo in libertà acido cianidrico. Impiegando come ossidante il bromo in soluzione alcalina, Chilesotti aveva notato un succedersi di colorazioni analogo a quello che si ha con l'acqua ossigenata. In nessun caso aveva osservato la formazione di composti solidi.

Per poter cogliere qualche termine intermedio dell'ossidazione mi è parso opportuno di partire, invece che da un sale solubile in acqua, come è quello di potassio, da sali pochissimo solubili o praticamente insolubili dell'acido $H_3Mo(CNS)_6$ nella previsione che anche i loro prodotti di ossidazione sarebbero stati poco solubili.

I molibden-solfocianuri da me impiegati furono quello di piridina e quello di esametilentetrammina.

Il sale di piridina $Py_3H_3Mo(CNS)_6$ era stato ottenuto allo stato anidro da A. Rosenheim e Garfunkel⁽²⁾ partendo dal composto $Py_3H_3Mo(CNS)_6 \cdot Py_3$ di I. Sand e Bürger⁽³⁾ mediante riscaldamento a $90^\circ-100^\circ$ in corrente di CO_2 .

Io ho preparato il composto di piridina trattando il sale di Chilesotti $K_3Mo(CNS)_6 \cdot 4H_2O$ in soluzione acquosa con un eccesso di piridina addizionata con egual volume di acido acetico glaciale. Precipita subito una sostanza gialla prima amorfa, poi cristallina, pochissimo solubile in acqua, estremamente solubile in alcool. Il prodotto da me ottenuto era idrato e diede all'analisi risultati concordanti con la formula $Py_3H_3Mo(CNS)_6 \cdot 3H_2O$.

Trovato	Mo %	13.14	N	16.95	S	26.32
Calcolato	Mo »	13.01	N	17.09	S	26.07

(1) « Gazz. Chim. Ital. », 34, II, 496 (1904).

(2) « Ber. », 41, 2386 (1908).

(3) « Ber. », 38, 3384 (1905); 39, 1761 (1906).

Il sale di esametilentetrammina venne preparato secondo le indicazioni di Scagliarini e Tartarini ⁽¹⁾ che descrivono il composto come anidro con la formula $(C_6H_{12}N_4)_3H_3Mo(CNS)_6$. Il prodotto da me ottenuto mostrò all'analisi di contenere due molecole di acqua di cristallizzazione che però perde facilmente, anche a freddo, nel vuoto su anidride fosforica.

Trovato	Mo %	10.53	N	28.15	S	20.98
Calcolato per $(C_6H_{12}N_4)_3H_3Mo(CNS)_6 \cdot 2H_2O$	»	10.63	N	27.93	S	21.31

Per ossidare questi sali dell'acido $H_3Mo(CNS)_6$, pensai di impiegare un ossidante più blando ma più facilmente dominabile dell'acqua assigenata: il ferricianuro potassico che, com'è noto, viene spesso utilizzato in chimica organica per l'ossidazione di vari gruppi funzionali.

L'ossidazione dei suddetti composti per opera del ferricianuro potassico si produce in modo molto appariscente, perchè avviene a freddo, rapidamente, e dà origine a prodotti insolubili intensamente colorati.

Quando il composto $Py_3H_3Mo(CNS)_6 \cdot 3H_2O$ che, come si è detto, è una sostanza cristallina gialla quasi insolubile in acqua, viene macinata a freddo in un mortaio entro una soluzione quasi satura a freddo di $K_3Fe(CN)_6$ si trasforma subito in una polvere cristallina di un bleu-violetto così intenso che sembra nero. Finita la reazione, nella soluzione del ferricianuro si riconosce la presenza di ferrocianuro. La polvere cristallina nero-violetta, che è quasi insolubile in acqua e solubile in alcool con colore verde-violaceo che ricorda quello delle soluzioni di allume di cromo, separata alla pompa e lavata con acqua e poi seccata nel vuoto su anidride fosforica, diede all'analisi i seguenti risultati, i quali concordano con la formula $Py_2H_2Mo(CNS)_6$

- gr. 0.5080 di sostanza diedero gr. 0.1200 di MoO_3
- » 0.7000 di sostanza (2^a preparazione) diedero gr. 0.1696 di MoO_3
- » 0.3000 di sostanza diedero gr. 0.6990 di $BaSO_4$
- » 0.1920 di sostanza diedero cc. 32 di azoto a 21° e 756 mm.

Trovato	Mo %	15.75-16.15	S	32.01	N	18.78
Calcolato per $(C_5H_5N)_2H_2Mo(CNS)_6$	»	15.89	S	31.86	N	18.56

Il composto di esametilentetrammina $(C_6H_{12}N_4)_3H_3Mo(CNS)_6 \cdot 2H_2O$, che è una polvere cristallina gialla, pochissimo solubile tanto in acqua che in alcool, si comporta con la soluzione di ferricianuro potassico analogamente al sale di piridina, trasformandosi in una polvere cristallina di un

(1) « Gazz. Chim. Ital. », 53, 878 (1923).

violetto quasi nero, anch'essa insolubile in acqua e solubile in alcool con colorazione verde-violacea. Essa all'analisi diede risultati concordanti con la formula $(C_6H_{12}N_4)_2H_2Mo(CNS)_6 \cdot 2H_2O$.

Gr. 0.8724 di sostanza diedero gr. 0.1624 di MoO_3 .

» 0.2000 di sostanza trattati secondo Kjeldhal neutralizzarono
cc. 37.9 di soluzione N/10 di H_2SO_4 .

» 0.3000 di sostanza diedero gr. 0.5494 di $BaSO_4$.

Trovato		Mo %	12.41	S	25.16	N	25.96
Calcolato per $(C_6H_{12}N_4)_2H_2Mo(CNS)_6 \cdot 2H_2O$	» »		12.60	S	25.25	N	25.74

L'interpretazione più ovvia che si può dare della reazione prodottasi tra ferricianuro potassico e i due sali dell'acido $H_3Mo(CNS)_6$, reazione che si manifesta, oltre che nel cambiamento di colore, nell'eliminazione dai composti di una molecola di base organica, consiste nell'ammettere, com'è espresso nelle formule su riportate, che l'atomo di molibdeno sia aumentato di una valenza e quindi sia diminuito di una carica il complesso $Mo(CNS)_6$: ossia, in altre parole, che l'acido tribasico $H_3Mo(CNS)_6$ si sia trasformato nell'acido bibasico $H_2Mo(CNS)_6$. Per escludere ogni altra interpretazione, bisognava però dare la prova diretta che nei composti risultanti dalla reazione il molibdeno era contenuto nella forma tetravalente.

Tale dimostrazione sperimentale presentò delle difficoltà che parvero dapprima quasi insormontabili.

Di regola la valenza del molibdeno, nei composti in cui quest'elemento è in una forma di combinazione inferiore al limite, si determina dalla quantità di ossigeno necessario per portarlo ad acido molibdico.

L'impiego del permanganato era assolutamente escluso per il composto di esametilentetrammina, ma era anche molto problematico per il composto di piridina: giacchè, se la piridina, a differenza dell'esametilentetrammina, non è ossidabile a freddo dal permanganato, restava come causa grande d'inesattezza la presenza dei radicali (CNS). È noto che per azione del permanganato, lo zolfo dell'acido solfocianico viene ossidato ad acido solforico, e quindi per ogni molecola del composto di piridina $Py_2H_2Mo(CNS)_6$ era prevedibile il consumo di trentasei equivalenti di ossigeno per l'ossidazione dello zolfo e di due equivalenti di ossigeno per l'ossidazione del molibdeno, ma è anche noto, per le ricerche di Klason⁽¹⁾ e di Grossmann⁽²⁾ e Hölter che l'ossidazione dell'acido solfocianico non è mai quantitativa, giacchè si trova sempre un consumo di ossigeno un po' inferiore al calcolato.

(1) « J. prak. Ch. » [2] 36, 77.

(2) « Chem. Ztg. », 33, 348.

Ora, siccome l'ossigeno consumato dal molibdeno sarebbe stato determinato per differenza togliendo dal consumo totale di ossigeno il consumo teorico spettante allo zolfo e calcolato in base alla percentuale di quest'ultimo, su tale differenza avrebbero gravato tutti gli errori inerenti all'ossidazione dell'acido solfocianico.

Maas e Sand⁽¹⁾ operando su composti analoghi a quelli in questione, pensarono di eliminare l'acido solfocianico mediante trattamento a caldo con acido cloridrico concentrato, e di titolare poi la soluzione cloridrica di molibdeno con permanganato in presenza di solfato manganoso: ma tale metodo non può dare, secondo Rosenheim⁽²⁾, risultati attendibili in causa dell'impossibilità pratica di eliminare completamente l'acido solfocianico e di evitare reazioni secondarie.

Per determinare valenze inferiori del molibdeno è stata impiegata anche l'ossidazione a caldo con un sale di argento in soluzione ammoniacale. Per ogni valenza assunta in più da un atomo di molibdeno si separa un atomo di argento allo stato metallico. Sull'esattezza di questo metodo si trovano nella letteratura chimica opinioni non concordi⁽³⁾. Esso venne sperimentato da A. Rosenheim⁽²⁾ sul composto $K_3Mo(CNS)_6 \cdot 4H_2O$. Per ogni atomo di molibdeno si separarono da 3.2 a 3.5 atomi di argento (teorico: 3 atomi di argento) malgrado venisse eliminata la causa di errore dovuta al solfuro di argento che si separa insieme con l'argento metallico, e che probabilmente proviene da una reazione secondaria del sale di argento con la tiourea formatasi dal solfocianuro di ammonio a caldo. Nel caso studiato dal Rosenheim l'esattezza del metodo era sufficiente per dimostrare che il molibdeno era trivalente nel sale di Chilesotti, giacchè *a priori* si poteva escludere in esso l'esistenza di molibdeno bivalente.

Nel caso dei composti ottenuti mediante il ferricianuro, nei quali non era possibile escludere *a priori* che il molibdeno non fosse presente in due forme diverse di combinazione, era necessario impiegare un metodo suscettibile di un'esattezza maggiore di quella dei metodi su ricordati.

Ritengo di aver trovato tale metodo; ne ho sperimentato l'esattezza sui solfocianuri del molibdeno trivalente e mi riservo di studiarne l'applicazione su altri tipi di composti del molibdeno e sulle forme inferiori di altri elementi. Esso si basa sulla seguente nuova reazione da me osservata: il molibdeno nelle sue forme inferiori di combinazione, quando non faccia parte di complessi molto stabili come i cianuri, viene ossidato a freddo quantitativamente ad acido molibdico da una soluzione ammoniacale di fer-

(1) « Ber », 40, 4512 (1907).

(2) « Ber. », 41, 2389 (1908).

(3) BELLUCCI e CORELLI « Z. Anorg. Chem. », 86, 92 (1912); O. OLSSON COLLEBERG, « Z. Anorg. Chem. », 121, 281 (1922).

ricianuro potassico, mentre una quantità equivalente di ferricianuro si riduce a ferrocianuro, secondo l'equazione:



È facile dare la dimostrazione che nella soluzione ammoniacale si è formato effettivamente del molibdato e del ferrocianuro. Basta acidificarla con acido acetico: precipita subito in forma di polvere gialla cristallina il ferrociano-molibdato di ammonio $(\text{NH}_4)_4\text{Fe}(\text{CN})_6 \cdot 2\text{MoO}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, composto che fu già da me descritto in altre ricerche⁽¹⁾.

Per determinare il grado di *ossidabilità* di un composto inferiore di molibdeno, basterà quindi determinare la quantità di ferrocianuro cui dà origine in una soluzione ammoniacale di ferricianuro potassico: oppure, se si è partiti da una quantità nota di ferricianuro in eccesso, basterà determinare il ferricianuro che è ancora presente alla fine della reazione.

Il problema analitico del dosamento dei ferricianuri in presenza di ferrocianuri, solfocianuri e alogenuri è stato da me risolto in una Nota precedente⁽²⁾.

Basta aggiungere alla soluzione contenente tali composti prima un eccesso di nitrato d'argento, poi una soluzione titolata di solfato ferroso acida per acido solforico che riduce rapidamente il ferricianuro d'argento a ferrocianuro, e infine dosare, sopra una parte aliquota della soluzione, l'eccesso di solfato ferroso.

Il nuovo metodo venne sperimentato dapprima sul sale di Chilesotti $\text{K}_3\text{Mo}(\text{CNS})_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ che si può ottenere facilmente allo stato di purezza.

Gr. 0.5 di $\text{K}_3\text{Mo}(\text{CNS})_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ vennero sciolti in una soluzione di gr. 1.5 di ferricianuro potassico addizionata con 5 cc. di ammoniaca concentrata e si diluì con acqua a 100 cc.; 25 cc. della soluzione ammoniacale vennero introdotti in un pallone tarato da 250 cc., poi vi si aggiunsero 100 cc. di soluzione N/10 di nitrato d'argento e 25 cc. di soluzione N/10 di solfato ferroso nettamente acida per acido solforico: si portò a volume e si filtrò su filtro asciutto in bicchiere asciutto. 100 cc. del filtrato richiesero cc. 7.85 di soluzione N/10 di permanganato. Da questi dati si calcola che il ferricianuro residuo era di gr. 0.7111, e quindi quello consumato nell'ossidazione del molibdeno gr. 0.7889. Riferendo la quantità di ferricianuro consumata ad una molecola del composto si trova 999.3 che diviso per 329.2 — peso molecolare di $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ — dà 3.03, numero delle molecole di $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ impiegate nell'ossidazione di un atomo di molibdeno.

Poi si applicò il metodo alla determinazione della valenza del molibdeno nel composto $\text{Py}_2\text{H}_2\text{Mo}(\text{CNS})_6$.

(1) « Ber. », 60, 2415 (1927).

(2) « Rend. Accad. Lincei » [6] 27, I, 685 (1930).

Gr. 0.5 di tale composto vennero sciolti nella soluzione di gr. 1.5 di ferricianuro potassico addizionata di 5 cc. di ammoniaca concentrata, e si diluì a 100 cc.; 25 cc. di questa soluzione vennero addizionati con 100 cc. di soluzione N/10 di AgNO_3 , con 25 cc. di soluzione N/10 di FeSO_4 acida per acido solforico e si diluì a 250 cc.; 100 cc. del filtrato consumarono cc. 7.05 di una soluzione N/10 di permanganato. Da questi dati si calcola che il ferricianuro residuo nella soluzione era di gr. 0.9744 e quindi che gr. 0.5 del prodotto avevano richiesto per l'ossidazione del molibdeno contenuto, gr. 0.5256 di $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$. Riferendo il consumo di ferricianuro al peso della molecola $\text{Py}_2\text{H}_2\text{Mo}(\text{CNS})_6$ si trova che per ogni atomo di molibdeno sono stati consumati due molecole di ferricianuro: ciò che prova che il molibdeno, nel composto in esame, è *tetravalente*.

La stessa conclusione si deve estendere al composto di esametilentetrammina $(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4)_2\text{H}_2\text{Mo}(\text{CNS})_6 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ che ha col composto di piridina stretta analogia nella preparazione, nella composizione e nei caratteri.

Sul comportamento di questi solfocianuri complessi del molibdeno tetravalente con diversi reagenti, specialmente in soluzione alcoolica, verrà riferito in un'altra Nota.

Geologia. — *Nuovo genere e nuove specie di Artiodattili dell'oligocene veneto* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di GIAMBATTISTA DAL PIAZ, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Nel giacimento oligocenico di Monteviale (Vicentino) vennero scoperti numerosi avanzi di un piccolo Ungulato, che, per l'insieme dei suoi caratteri, rientra nel gruppo degli Artiodattili buno-selenodonti. Tra questi le forme appartenenti alla famiglia dei *Dichobunidae* e degli *Anoplotheridae* non mostrano alcuna affinità con l'animale vicentino, che sembra accostarsi piuttosto all'eterogenea famiglia degli *Anthracotheridae*. Dopo accurati confronti con i rappresentanti eocenici ed oligocenici di quest'ultimo gruppo, venni alla conclusione che l'Artiodattilo di Monteviale appartiene ad un tipo assolutamente nuovo, per il quale propongo l'istituzione di un apposito genere (*Anthracocherus* n. g.).

Mi è grato esprimere pubblicamente i sensi della più viva riconoscenza al dott. H. G. STEHLIN che facilitò in tutti i modi le mie ricerche, sia mettendo a mia completa disposizione il prezioso materiale fossile conser-

(1) Lavoro eseguito nel Museo di Storia Naturale di Basilea.

A questa breve Nota preliminare farà seguito un'estesa monografia, che comparirà nelle Memorie dell'Istituto Geologico di Padova, assieme alla trattazione di tutti gli altri Mammiferi oligocenici di Monteviale.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1930.

vato nel Museo di Basilea, fra cui degno di particolar menzione un magnifico cranio dell'*Anthracocherus* stesso proveniente da Monteviale, sia prodigandomi l'ausilio prezioso della sua vasta esperienza scientifica.

n. g. *Anthracocherus nobis*.

1929. *Lignitohyus*, pro parte (*L. fabianii*) Nomen nudum, DAL PIAZ GB., *Nuove osservazioni sull'Poligocene italiano*, «Rend. R. Accad. Lincei», seduta 5 maggio, p. 912.

CARATTERI. — Dentatura di tipo buno-selenodonte; molari superiori costituiti da quattro cuspidi principali e sprovvisti di *protoconulus*; P⁴ a due tubercoli disposti in senso labio-linguale; P³ pressapoco triangoliforme e monocuspidato; canino superiore non molto grande, piantato pressochè verticalmente nel mascellare e rivolto all'indietro; molari inferiori a quattro tubercoli; M₃ provvisto di un distinto tallone ad una sola punta; P₄ privo di un tubercolo interno al vertice della piramide e fornito di due notevoli creste sub-parallele sul dorso posteriore; P₃ e P₂ con una distinta cuspidе accessoria posta pressapoco a mezzavia dello spigolo posteriore della corona; P₁ semplice, in forma di cono compresso lateralmente e separato da P₂ mediante un piccolo diastema; incisivi inferiori a corona piuttosto bassa, spatoliforme; formula dentaria probabile:

$$I = \frac{(3-3)}{3-3} \quad ; \quad C = \frac{1-1}{(1-1)} \quad ; \quad Pm = \frac{4-4}{4-4} \quad ; \quad M = \frac{3-3}{3-3} (1) ;$$

cranio alquanto lungo e slanciato; mandibola provvista di una simfisi piuttosto lunga, con *ramus horizontalis* poco elevato, *angulus mandibulae* non molto prominente e arrotondato in modo ampio e regolare; processo coronoide molto alto, sottile e rivolto all'indietro; arti piuttosto lunghi e snelli, costituiti da ossa robuste ma slanciate; metacarpali laterali lunghi e robusti quasi quanto i mediani, in modo da offrire una conformazione di tipo subisodattilo; metatarsali laterali poco più corti ma molto più sottili dei mediani, lo spessore dei primi essendo eguale ad un terzo, o al più alla metà dei secondi; arti posteriori più sviluppati e verosimilmente più alti di quelli anteriori.

Al genere *Anthracocherus* ho riferito, oltre la specie tipica (*A. stehlini*), anche una seconda forma (*A. fabianii*, olim *Lignitohyus fabianii*) che, per l'incompletezza dell'unico avanzo lasciatoci, non può esser classificata in maniera definitiva.

(1) I numeri compresi fra parentesi rappresentano denti la cui esistenza non fu ancora assodata in modo sicuro.

Anthracochoeus n. sp. stehlini nobis.

In onore del dott. H. G. STEHLIN.

DIAGNOSI. — Caratteri del genere, statura grande, ultimo premolare della mandibola piuttosto lungo, non molto alto nè erto e provvisto di un tallone alquanto robusto.

TIPO. — Cranio di un individuo giovane. (Museo Geologico di Padova).

LOCALITÀ TIPICA. — Monteviale nel Vicentino, Veneto.

LIVELLO CRONOLOGICO. — Oligocene inferiore (Sannoasiano); ligniti ad *Anthracotherium monsvialense*, *Ancodus?*, *Propalaeochoeus paronae*, *Halitherium*, *Trigonias ombonii*, cfr. *Dyspterna*, *Archaeopteropus transiens* etc. ⁽¹⁾.

MISURE. = Lunghezza massima in senso antero-posteriore (in mm.):
 $M_1 = 9.8 - 12.6$; $M_2 = 8.8 - 11.3$; $M^1 = 8.0 - 10.7$; $P^4 = 6.5 - 7.8$;
 $P^3 = 9.8 - 10.4$; $P^2 = 9.6 - 10.4$; $M_3 = 13.8 - 17.0$; $M_2 = 10.0 - 11.6$;
 $M_1 = 8.5 - 11.6$; $P_4 = 9.2 - 10.2$; $P_3 = 10.4 - 12.0$; $P_2 = 9.0 - 11.6$;
 $P_1 = 5.2 - 7 -$.

Anthracochoeus n. sp. fabianii nobis.

In onore del prof. R. FABIANI.

1929. [*Lignitohyus*] *fabianii* DAL PIAZ, *Nuove osservazioni sull'oligocene italiano*, « Rend. R. Acc. Lincei », seduta 5 maggio, p. 912. Nomen nudum.

DIAGNOSI. — Statura molto piccola; premolare posteriore della mandibola relativamente corto e insieme alto e slanciato, provvisto di un tallone posteriore piuttosto debole.

TIPO. — Ramo mandibolare destro con $M_3 - P_4$. (Museo Geologico di Padova).

LOCALITÀ TIPICA. — Monteviale nel Vicentino, Veneto.

LIVELLO CRONOLOGICO. — Oligocene inferiore (Sannoasiano).

MISURE. — Lunghezza massima (in mm.): $M_3 = 10.2$; $M_2 = 8.0$;
 $M_1 = 7.8$; $P_4 = 7.0$.

OSSERVAZIONI. — Il tipo dell' *A. fabianii* si distingue nettamente dalle mandibole di *A. stehlini* per le sue modestissime dimensioni e per la caratteristica forma dell'ultimo premolare (P_4). Questo dente è relativamente corto nel senso antero-posteriore, misurando circa un mm. meno del primo molare, mentre appare nello stesso tempo molto alto e slanciato. Invece nell' *A. ste-*

(1) Alcuni autori hanno asserito che nel deposito di Monteviale si trova anche l'*Anthracotherium (Microbunodon) minus*. Si tratta sicuramente di un errore di classificazione, per cui i resti del nuovo genere *Anthracochoeus* vennero attribuiti alla forma predetta, che sinora fu scoperta soltanto in giacimenti alquanto più giovani di quello vicentino.

hlini il P_4 è di solito alquanto più lungo di M_1 e non presenta quell'aspetto erto ed ardito che si riscontra nella specie congenere.

Anche il tallone di M_3 offre, nel tipo dell'*A. fabianii*, una conformazione abbastanza particolare. Esso risulta costituito da un cono breve, ma piuttosto rialzato, che presenta anteriormente un distinto ingrossamento basale, in forma di rozzo tubercolo. Dal vertice del tallone scendono due creste laterali, che terminano in due minuscole punte presso il dorso posteriore del secondo paio di cuspidi. Invece nell'altra specie il tallone offre un aspetto più antracoteroide, con accenno del caratteristico ferro di cavallo, il quale però non è sempre evidente o almeno ben accennato. Infine i molari della forma minore presentano un aspetto complessivo erto e slanciato, con le cuspidi piuttosto alte e ben individuate, in modo da dar l'impressione ch'essi si distinguano anche per la loro struttura d'insieme dai molari dell'*A. stehlini*.

I caratteri offerti dal tipo dell'*A. fabianii* sono tali da far sorgere qualche dubbio sull'appartenenza di questa interessantissima forma al genere *Anthracocoherus*. Purtroppo le condizioni del fossile non ci permettono di essere precisi sulla sua esatta posizione sistematica, per cui, in attesa di più abbondante materiale, dobbiamo limitarci a considerare la mandibola in discorso come il tipo di una forma a sè, nettamente distinta, da riferirsi con riserva e in via provvisoria al genere predetto.

CONCLUSIONI.

Dagli estesi confronti che ho potuto istituire sul ricchissimo materiale di Artiodattili fossili appartenente al Museo di Basilea, è risultato che il genere *Anthracocoherus* occupa una posizione sistematica del tutto isolata. Infatti, per quanto innegabilmente prossimo agli *Anthracotheridae*, esso appare molto ben caratterizzato dall'assenza del *protoconulus* nei molari superiori, dalla ripida valle posta dietro il primo paio di cuspidi nei molari inferiori e da alcune importanti peculiarità offerte dai premolari della mandibola (P_4 monocuspidato, P_3 e P_2 con un tubercolo accessorio sul dorso posteriore) etc. In un certo qual modo l'*Anthracocoherus* mostra un'evidente tendenza ad allontanarsi dal tipo complessivo degli *Anthracotheridae*, per accostarsi sotto certi riguardi a quello di taluni *Suidae* primitivi. Siamo quindi tratti a concludere che l'Artiodattilo di Monteviale appartiene ad un *phylum* che non mostra relazioni di sorta con nessuna delle numerose linee filogenetiche degli *Anthracotheridae*, rappresentando un tipo a sè nettamente distinto, del quale non conosciamo nè gli ancestrali eocenici nè gli eventuali successori oligocenici. Come tanti altri Mammiferi suoi contemporanei, l'*Anthracocoherus* deve esser immigrato in Europa all'alba del tempo oligocenico e i suoi progenitori si scopriranno probabilmente nei depositi eocenici dell'Asia.

Biologia. — *Plancton monotono a rotiferi in un lago appenninico ad alta quota* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. BRUNELLI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Il lago di Scanno è un laghetto appenninico ad alta quota (m. 930 sul livello del mare), molto interessante anche geologicamente, perchè è menzionato tra i laghi di sbarramento ⁽³⁾.

Difettando gli studi sui laghi appenninici ad una certa altitudine, il suo studio si presentava per ciò interessante e dovendo procedere all'introduzione di alcune specie ittiche, ho ritenuto per ciò opportuno compiere alcune ricerche sul plancton.

I primi saggi furono da me presi d'estate e il plancton si mostrò abbastanza monotono formato a prevalenza da *Cyclops* che ritengo appartenere alla specie *Cyclops strenuus* Fischer e da grandi ammassi di un rotifero *Asplanchna priodonta* Gosse.

È notevole che l'*Asplanchna* è un genere di rotifero riscontrato frequentemente nei laghi della regione alpina (Canzolino, Fornace, Seraia, Piazze, Caldonazzo, Garda, Lavarone).

Come mostrano poi le ricerche dell'Imhof ⁽⁴⁾ per una specie affine *Asplanchna helvetica*, trattasi di un genere che si riscontra di frequente in laghetti anche ad una quota abbastanza elevata. Non è escluso che l'*Asplanchna* provenga dal potamoplancton ⁽⁵⁾ e cioè la colonizzazione del lago di Scanno sarebbe avvenuta da quella delle acque influenti del bacino del Sagittario.

In ogni modo è notevole che il plancton di Scanno è abbastanza monotono, e non vi sarebbe stata grande immigrazione passiva di forme trasportate da uccelli palustri, forse anche perchè si trova fuori delle vie migratrici dei palmipedi.

È anche notevole che l'*Asplanchna priodonta* è un rotifero tra i più grandi e rapaci, sembra che il suo predominio sia dovuto a questa circostanza.

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1930.

(3) R. RICCARDI, *Il lago di Scanno (Abruzzo)*. « Bollett. della R. Soc. Geog. Ital. », serie VI, vol. VI, n. 3, marzo 1929, pp. 162-182.

(4) IMHOF C. E., *Studien über die Fauna hochalpiner Seen*, « Jahresbericht Natur Gesellschaft », vol. XXX, 1887.

(5) ZACHARIAS, (*Das Potamoplancton* in « Zoolog. Anzeiger », n. 550, 1898) novera l'*Asplanchna priodonta* tra le specie del potamoplancton.

Questa prevalenza dell'*Asplanchna priodonta* coincide con quelle trovate in un piccolo lago alpino, il lago di Lavarone⁽¹⁾, a una quota quasi eguale, ma il lago di Scanno sembra ancora più povero di specie. È dovuto questo alle sue condizioni, alla sua relativamente recente formazione, o al fatto che si trova fuori delle grandi vie dei palmipedi migratori? Non posso spiegare ciò colla formazione relativamente recente, perchè laghi artificiali di attuale colonizzazione, come il Tirso e il Coghinas, mostrano una più ricca varietà di limnobios.

L'*Asplanchna* è un genere già riscontrato nel limnobios dei laghi continentali dell'Italia media (Trasimeno, Bolsena), invece non è citato dal Forti e dal Trotter nel loro studio sui laghi del Vulture, io invece l'ho riscontrata anche nel lago Matese che presenta condizioni termiche simili a quelle del lago di Scanno.

Monotonia di plancton ad *Asplanchna* sembra indice di un lago appenninico ad alta quota, e ancora gli studi limnologici debbono in tal senso essere sviluppati per trarne elementi di cognizioni corologiche. Per esempio *Asplanchna* sembra un rotifero comune in laghi ad alta quota, ma non ad altissima (sopra i 2000), come appare dalle comunicazioni di Pesta⁽²⁾ dedatte dagli studi di Zschokke e altri autori.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Sul comportamento dell'abbozzo oculare di Triton trapiantato in embrioni di Rana esculenta. (Processi di distruzione e potenza di ricupero)*⁽³⁾. Nota⁽⁴⁾ di TEODORO PERRI, presentata dal Socio GIULIO FANO.

Da ricerche di Cotronei e Spirito è risultato che, trapiantando la vescicola ottica di *Triton* in embrioni di *Rana esculenta*, si ha « rapidissima necrosi del pezzo trapiantato »⁽⁵⁾; ed è risultato anche che non si può riconoscere un'evidente processo differenziativo dell'abbozzo oculare. Erano però necessarie ricerche analitiche per la rigorosa verifica dei quesiti impostati⁽⁶⁾.

È stato a me affidato il compito di analizzare sia i processi distruttivi dell'abbozzo oculare in questi casi particolari in cui viene inibito il differen-

(1) LARGIOLLI V., *Ricerche biolimnologiche sui laghi trentini*. « Rivista mensile di pesca », Genova, nn. 1-2-3, 1906.

(2) PESTA O., *Der hochgebirgssee der Alpen. Die Binnengewässer*. Schweizerbart, Stuttgart, 1929.

(3) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(4) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1930.

(5) « Rend. R. Accademia dei Lincei », vol. XI, fasc. 4, 1930; « Monit. Zool. Italiano », vol. XLI, n. 1.

(6) « Rend. R. Accademia dei Lincei », vol. XI, fasc. 9, 1930.

ziamento, sia i processi di ricupero, se si possono mettere in evidenza, quando la vescicola ottica di *Triton*, dopo una permanenza varia nell'embrione di *Rana esculenta*, viene riportata in embrioni di *Triton*.

La presente Nota è un breve riassunto dei risultati ottenuti.

Nelle esperienze di trapianto dell'abbozzo oculare di *Triton cristatus* su *Rana esculenta* (trapianto in posizione cefalica) mi sono limitato a constatarne la distruzione, la quale è sempre preceduta da un processo di copertura da parte dell'ectoderma di *Rana* e spesso, ancora prima, da sfaldamento. Nelle operazioni su *Triton taeniatus* (donatore) ho eseguito il trapianto su embrioni di *Rana* in posizione dorso-laterale. Divido l'esposizione di queste esperienze a seconda della permanenza dell'abbozzo oculare di *Triton* in *Rana*.

a) Permanenza: 1 giorno. Nelle esperienze eseguite in maggio noto che l'abbozzo oculare conserva molto bene la sua conformazione. In quelle eseguite in luglio, e quindi a temperatura molto più elevata, l'abbozzo si presenta in condizioni meno buone; sovente rimangono di esso solo alcune cellule del foglietto destinato a dare la retina.

b) Permanenza: 2 giorni. I fenomeni disgregativi si mostrano molto più accentuati. Nelle esperienze eseguite in maggio ho notato cellule in mitosi accanto a cellule in frammentazione; i rapporti tra le cellule sono alterati. Nei riguardi del cristallino si nota che la parte centrale è in genere assai resistente; la capsula invece va presto in disgregazione. Nelle esperienze di luglio maggiore frammentazione; il cristallino solo in alcuni casi permane in buone condizioni; la capsula è disgregata.

c) Permanenza: 3 giorni (esperienze eseguite in maggio): si notano solo residui di cellule del foglietto retinico; cristallino mancante o in disfacimento.

d) Permanenza di 4-5-9 giorni: rimangono solo (qualche volta) al massimo detriti cellulari.

Tenendo conto di queste esperienze e di quelle già eseguite da Cotronei e Spirito (in tutto circa cinquanta) sulla *Rana esculenta* ⁽¹⁾ si può concludere che il disfacimento embrionale (disfacimento che non deve essere confuso con quello larvale cui va incontro, dopo un perfetto differenziamento, come hanno dimostrato Cotronei e Spirito, l'occhio di Anuri trapiantati in Urodeli), dell'abbozzo oculare di *Triton* (sia *taeniatus* che *cristatus*) trapiantato in embrioni di *Rana* è un fenomeno assolutamente costante.

*
* *

Esperienze eseguite allo scopo di cogliere l'esistenza o meno di un tentativo di sviluppo dell'abbozzo oculare di *Triton*, durante la permanenza

(1) Molte altre esperienze sono state eseguite su *Bufo vulgaris* con gli stessi risultati.

in *Rana esculenta*, mi permettono di concludere che *si ha uno sviluppo molto evidente solo della parte centrale del cristallino*, la cui capsula invece va rapidamente in disfacimento. Per la retina non è evidente nessuno sviluppo.

*
* *

Per dimostrare la potenza di ricupero, cioè a dire per vedere fino a quando la vescicola ottica è capace di riprendere la sua attività di sviluppo dopo una permanenza del trapianto di 1, 1 1/2, 2, 3 giorni ⁽¹⁾ in *Rana esculenta*, cioè in un ambiente che, come si è dimostrato sopra, l'avrebbe condotta a sicuro disfacimento, ho eseguito operazioni di riporto della vescicola ottica secondaria di *Triton taeniatus* su altro *Triton taeniatus*. Ho avuto i seguenti risultati:

a) Riporto dopo un giorno. Nelle operazioni da me fatte la vescicola ottica riprende, ma non sempre si differenzia in modo completo. Il cristallino si mostra costantemente differenziato, anche la sua capsula è presente. Lo strato pigmentato, o manca, o è incompleto. In un caso ho notato un principio di nervo ottico che dallo strato ganglionare si dirige verso il reticolare esterno.

b) Riporto dopo 40 ore. In un caso ammassi di cellule sono andati avanti disordinatamente, senza svilupparsi come retina.

Il cristallino è sempre ben differenziato, con relativa capsula.

c) Riporto dopo 2 giorni: La ripresa è incostante; in alcuni casi l'abbozzo oculare riprende differenziandosi, in uno di essi è presente il nervo ottico che termina al livello del *tapetum*. In altri casi, invece, si notano masse più o meno considerevoli di cellule che non hanno i caratteri armonici dell'organo.

d) Riporto dopo 3 giorni: Un solo caso: rimangono dei residui cellulari.

Dal complesso di queste ricerche risulta un netto contegno differenziale fra vescicola ottica e cristallino.

In un lavoro in esteso darò una documentazione più ampia e dettagliata.

(1) Tengo a mettere in risalto che queste cifre non hanno un valore assoluto dato i tempi differenti in cui sono state eseguite le operazioni e di conseguenza le differenti temperature del liquido ambiente.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli*⁽¹⁾. Nota IV⁽²⁾ di GIULIO COTRONEI e ALDO SPIRITO, presentata dal Socio GIULIO FANO.

In note precedenti⁽³⁾ abbiamo esposto una serie di osservazioni riguardanti trapianti embrionali tra Anuri ed Urodeli. L'esposizione analitica, se pure finora riassuntiva, annunciava i risultati man mano che si raggiungevano e che rispondevano ai quesiti che sin da principio ci eravamo proposti; ma questi risultati se riferivano i dati positivi raggiunti mostravano pure le lacune che non avevano potuto ancora colmare. Avendo ora terminato un secondo anno di esperienze e, sopra tutto, avendo avuto la fortuna di poter raggiungere risultati positivi in alcuni punti di maggior interesse, sui quali non ci era stato dato finora di poterci pronunziare, vogliamo con la presente, in attesa del lavoro per esteso, oramai pronto, colmare le lacune precedenti.

È superfluo richiamare i quesiti del nostro studio: crediamo già di averli esposti con sufficiente chiarezza. Nel riassumere i fatti abbiamo posto in risalto che molte proprietà embrionali si verificano ancora quando abbozzi di organi di Anuri si trapiantano negli embrioni di Urodeli. È ben chiaro che una tale indagine è tutt'altro che una conferma di fatti noti, perchè rivede sotto una nuova luce (il valore dell'ambiente biochimico estraneo), i problemi affrontati nello sviluppo normale e sperimentale di una data forma. È risultato che molti fatti completamente nuovi si mettono in luce dal punto di vista della costituzione zoologica e su questo argomento rimandiamo il lettore alla nostra Nota III.

Tra le proprietà embrionali da noi indagate con nuove operazioni sperimentali sono le correlazioni morfogenetiche di sviluppo, specialmente in riguardo all'abbozzo olfattivo, le fusioni di organi simili, le comunicazioni nervose tra organi di senso (olfatto e occhio) con i centri, le regolazioni embrionali.

I. Per le correlazioni morfogenetiche abbiamo rivolto la nostra attenzione allo sviluppo dell'abbozzo olfattivo, in presenza o meno di parti di encefalo e mesenchima. Abbiamo ottenuto nei nostri trapianti di Anuri su

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1930.

(3) « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. X, 1929; « Atti della Soc. Ital. di Anat. », in « Monit. Zool. Ital. », vol. XL, 1929; « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XI, 1930; « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XI, 1930.

Urodeli i medesimi risultati che già ottenne il Luna nelle sue esperienze di trapianti omoplastici di abbozzo olfattivo di *Discoglossus pictus*.

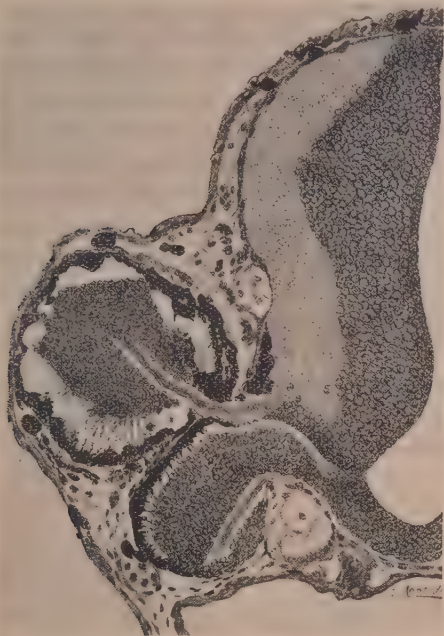
Ci eravamo preoccupati, altresì, di ricercare se tra Anuri e Urodeli si manifestano influenze (induzioni) morfogenetiche tra la vescicola ottica e il cristallino. Le riteniamo probabili; ma finora su questo punto nulla abbiamo raggiunto di sicuro: vogliamo ricordare a tal proposito il Lewis, il quale crede che « the optic vesicle of *Rana palustris* can stimulate lens-formation from the ectoderm of *Amblystoma* », ma riconosce che « it is not absolutely sure of their origine ». È stato invece dimostrato dal Filatow che tra forme differenti di Anuri tali induzioni sono possibili: così la vescicola ottica di *Rana esculenta* induce dall'ectoderma ventrale di *Bufo vulgaris* la formazione di un cristallino.

II. Il problema delle fusioni di organi simili nello sviluppo embrionale degli Anfibi fu studiato ampiamente dal Born, il quale stabilì che abbozzi di organi simili si fondono per opera di tessuto specifico; tra organi e tessuti differenti si trova invece interposto del connettivo. Le nostre ricerche, mirando a verificare tali problemi nei trapianti tra Anuri e Urodeli, vogliono darci pertanto una documentazione che talune proprietà embrionali, come quelle ora in esame, si conservano in tali operazioni. Abbiamo ottenuto le fusioni di vescicole ottiche, di queste con l'encefalo, di encefalo con encefalo. Esperienze personali di A. Spirito hanno dimostrato la fusione del placode olfattivo di *Bufo vulgaris* con quello di *Axolotl*. Per le vescicole ottiche abbiamo ottenuto vari gradi di processi di fusione tra *Rana esculenta* e *Triton taeniatus*, tra *Rana esculenta* e *Triton cristatus* e, ma poco accentuati, tra *Bufo vulgaris* e *Axolotl*. Vogliamo ricordare che il primo autore che ottenne nel *Discoglossus* fusione di vescicole ottiche fra individui diversi fu l'Anastasi, e che, nelle nostre ricerche, i gradi di fusione da noi descritti si possono riportare a quelli ottenuti, ma in ben diverse condizioni sperimentali, da quest'autore.

Si è verificata anche la fusione dell'encefalo di *Rana esculenta* con la retina di *Triton cristatus* e di *Triton taeniatus*; di pezzi trapiantati di encefalo di *Bufo vulgaris* con encefalo di *Axolotl* e di *Hyla arborea* con *Triton cristatus*. Tutto quest'ultimo gruppo di esperienze da noi riportate dimostra che vescicole ottiche e encefalo si comportano riguardo alle fusioni in maniera somigliante. Non abbiamo mai ottenuto processi di fusione tra organi a struttura istologica differente.

III. Un interessante problema, investigato anche col metodo del trapianto è quello riguardante la neurochemiotassi. È noto che Cajal ha introdotto tale concetto nello studio del sistema nervoso. Egli ritiene che speciali sostanze chemiotattiche, prodotte da cellule nervose, esercitino un'attrazione su fibre nervose in accrescimento, come pure sostanze chemiotattiche segregate da miotomi, epiteli sensitivi o altri organi potrebbero avere una uguale azione chemiotattica su fibre nervose. È opportuno avvertire che

finora si tratta di ipotesi molto seducenti e verosimili; ma se non c'è una sicura dimostrazione di queste sostanze ad azione chemiotattica, è pur vero che fibre nervose si accrescono a notevole distanza per raggiungere una determinata sede. Nelle nostre esperienze in un primo tempo (1929) abbiamo soltanto ottenuti che assoni provenienti dall'abbozzo oculare o da quello olfattivo di Anuri si mettessero in comunicazione con pezzi di encefalo di *Triton* trapiantato con esso, ossia con pezzi di encefalo della



propria forma, e ci limitavamo a dire che se ci sono queste sostanze chemiotattiche esse agiscono anche quando le cellule da cui provengono si trovano trapiantate in un ambiente biochimico differente. Ben più fortunate sono state l'esperienze di quest'anno; siamo riusciti ad ottenere che assoni provenienti dallo strato delle cellule ganglionari dell'occhio di *Bufo vulgaris* trapiantato in *Axolotl* penetrassero nel diencefalo dell'animale ospite, e ancor più di recente abbiamo ottenuto un medesimo risultato, illustrato nella figura 1, tra *Rana esculenta* e *Triton taeniatus*.

IV. È noto che fin dal 1907 il Lewis dimostrò che una parte dell'occhio di *Rana* trapiantata omoplasticamente dava un occhio completo e si rigenerava un altro occhio completo dalla parte residua nel donatore. Lewis dava così la dimostrazione che l'abbozzo oculare ha potere regolativo.

Già nelle Note precedenti abbiamo riferito di aver risolto un'altra questione attinente a quest'argomento: una porzione della vescicola ottica di *Rana esculenta* trapiantata in *Triton cristatus* o in *Triton taeniatus* conserva il medesimo potere regolativo come nei trapianti omoplastici. L'ambiente biochimico negli Urodeli, dunque, non ostacola le potenze regolative della vescicola ottica degli Anuri. Abbiamo cercato di ottenere una dimostrazione sempre più chiara del quesito da noi propostoci: le nuove esperienze ci permettono di confermare nella maniera più ampia e sicura quanto abbiamo già comunicato. Nelle operazioni di trapianto abbiamo avuto cura di asportare una metà (più o meno approssimativa) della vescicola ottica primaria di *Rana esculenta* mediante un taglio trasversale, in modo tale da poter interessare anche il territorio lentogeno; abbiamo ottenuto la regolazione dell'occhio trapiantato come dell'occhio rimasto *in situ*, e così pure abbiamo ottenuto un bel cristallino tanto nell'ospite come nel donatore.

Una questione di notevole interesse si profila a questo riguardo. Secondo il Lewis la somma dei volumi degli occhi derivanti da un unica vescicola può anche essere doppia del volume degli occhi normali lasciati *in situ*; noi crediamo che bisogna essere molto prudenti in tali apprezzamenti quantitativi: nel nostro caso mai abbiamo ottenuto queste somme di volume nè nelle vescicole ottiche nè nel cristallino, anzi un calcolo preciso volumetrico (riconducendo il cristallino a una sfera) ci ha dimostrato che la somma dei due cristallini ottenuti dalle nostre esperienze è rappresentata da un volume uguale a quello del cristallino normale.

*
* *

Esaurito lo studio, fin dove ci è stato possibile, inerente ai processi di sviluppo degli abbozzi trapiantati, vogliamo richiamare l'attenzione del lettore sul destino di questi abbozzi embrionali. Innanzi tutto essi vanno soggetti a distruzione quando nell'ospite sono intervenute le condizioni fisiologiche della vita larvale: ancora una volta vogliamo insistere che le nostre considerazioni su questo punto riguardano solo gli abbozzi con i quali abbiamo sperimentato. La conclusione ora riferita è stata da noi dedotta da numerose esperienze di trapianto di Anuri su Urodeli con risultati raggiunti nelle seguenti specie: *Rana esculenta* su *Triton cristatus*, *Rana esculenta* su *Triton taeniatus*, *Bufo vulgaris* su *Axolotl*, *Hyla arborea* su *Triton cristatus*. In queste esperienze abbiamo potuto seriare tutte le varie fasi dei processi distruttivi, dai primi segni che interessano la parte pigmentata a quelli massimi in cui si può trovare solo un ammasso di pigmento.

Un punto il quale pur avendo richiamato la nostra attenzione era rimasto di oscuro significato, riguarda il destino dell'occhio trapiantato di Anuri quando si siano riuscite a stabilire connessioni nervose con l'encefalo dell'ospite (Uro-

delo). Un risultato conseguito quest'anno (*Rana* su *Triton*) ci consente di ritenere che i processi distruttivi che a un dato momento rivelano l'incompatibilità (da noi chiamata biochimica) tra il trapianto e l'ospite entrano in azione pure nei casi in cui si era stabilito una tale connessione nervosa (fig. 1).

*
* *

Abbiamo riferito sui risultati conseguiti in esperienze di trapianti di Urodeli su Anuri (rimandiamo il lettore oltre che alle nostre note precedenti anche alla nota di T. Perri ⁽¹⁾): un punto di grande interesse che ci premeva di chiarire in una maniera definitiva era il destino dei trapianti di *Triton* su *Hyla*; gli unici (nel campo delle operazioni di Urodeli su Anuri) che ci abbiano dato risultati positivi: purtroppo quando ci eravamo risolti a chiarire questa questione ci è venuto a mancare il materiale di *Hyla* per proseguire le esperienze. I risultati che abbiamo ottenuti nei pochissimi casi nei quali si sono tenuti in vita per maggior tempo gli esemplari operati, ci fanno pensare che l'ambiente larvale dell'*Hyla* finisce con il distruggere l'occhio trapiantato. Tale nostra opinione però è espressa con le dovute riserve, e in un modo del tutto preliminare: ricerche analitiche saranno ancora eseguite per stabilire se non si possa comunque parlare di una resistenza maggiore che non si mostra in casi inversi di trapianto di Anuri su Urodeli.

Biologia (Fisiologia vegetale). — *Azione esercitata dal radio sulla germinazione dei semi.* Nota ⁽²⁾ di G. MEZZADROLI e di E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

Da tempo è conosciuta l'azione fisiologica esercitata dal radio.

Innumeri ⁽³⁾ studiosi riferiscono infatti sugli effetti dinamogeni e sugli effetti distruttori esercitati dal radio sui tessuti vegetali, che si osservano quando i semi o le piantine stesse vengano sottoposte ad una irradiazione fatta con diversi minerali radiferi, coi sali di radio e con l'emanazione del radio, ecc. in diversissime condizioni di sperimentazione.

I risultati riportati sull'argomento dalla letteratura sono spesso contraddittori, noi riteniamo che detta discordanza debba attribuirsi, come pure noi potemmo controllare durante le nostre esperienze al fatto della diversa

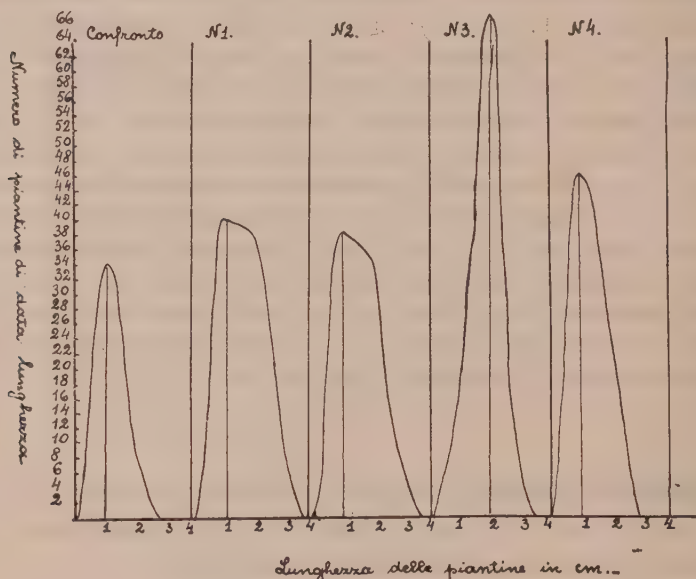
(1) «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XII, 1930.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1930.

(3) Un elenco bibliografico, per ricordare tutti gli studiosi, italiani ed esteri, che rivolsero la loro attenzione su questo argomento, riuscirebbe troppo lungo e per la brevità dello spazio che ci è consentito dobbiamo ometterlo, indicando solo qualche autore di cui si ricorda l'esperienza.

intensità, e diversa durata di irradiazione in modo che si può passare rapidamente da una azione eccitatrice favorevole ad una azione distruttiva dannosa.

L'azione fisiologica delle radiazioni sui vegetali, esercitata dalle onde elettromagnetiche fino ai raggi X, attraverso la gamma continua di lunghezza d'onda decrescenti (reazioni biofotochimiche) è una azione essenzialmente legata alla intensità e alla durata della irradiazione, nella numerosa serie delle nostre esperienze, che vertono su questo campo e che perseguiamo



da anni, abbiamo potuto constatare, come esista in tutti i casi un *optimum* di questi due fattori, ed un valore limite oltre il quale gli effetti si invertono, passando attraverso ad una azione nulla.

Tenendo presente queste constatazioni abbiamo potuto osservare, come il radio eserciti una azione favorevole sui semi esposti alla sua azione, prima della semina, quando si fanno esposizioni di breve durata, da cinque minuti in su, e se si impiegano dosi deboli di radio, mentre gli sperimentatori precedenti, sottoponendo i semi all'azione del radio, per giorni e settimane, avevano concluso, come tali semi perdessero tutto o in parte il loro potere germinativo, per esposizione all'azione del radio.

Una breve durata di irradiazione dei semi, coi raggi γ , del radio, imprime invece ad essi, uno stimolo che permane durante il periodo di vita latente e si manifesta poi, durante la germinazione, con un aumento della germinabilità, una maggior velocità di germinazione, ed uno sviluppo maggiore delle piantine.

Sembra che il radio stimoli i fattori di crescita, conferendo alle piantine nate da semi irradiati un maggiore sviluppo in altezza e un maggior peso.

TECNICA. — Abbiamo esposto i semi allo stato secco, entro un cilindro di cartone, all'azione di una soluzione di bromuro di radio racchiuso in un lungo e sottile tubicino di vetro⁽¹⁾.

I semi si trovano così esposti all'azione dei raggi γ , del radio, circa tutti nelle medesime condizioni (uguali distanze dal tubicino).

Le esposizioni vennero fatte con quantità diversa di soluzione di bromuro di radio, per durate di tempo variabili. I semi venivano poi posti a germinare su substrato di cotone inumidito, dopo un giorno di bagnatura.

Le esperienze vennero eseguite su semi di piante diverse, *semi di cereali*: orzo, frumento marzaio, frumento Ardito, *semi di leguminose*: piselli, ceci, fagioli, soja.

Riporteremo in questa Nota i risultati ottenuti con l'uno e con l'altro tipo di semi, mettendo in evidenza la differenza riscontrata, nella lunghezza delle piantine, e la differente distribuzione della lunghezza, nonché la differenza in peso.

PARTE SPERIMENTALE. — Le prime esperienze vennero eseguite ricorrendo ad una irradiazione di una soluzione di 3.9 milligrammi di bromuro di radio, per durate di tempo diverse, di 5-10-30 minuti e di 3 ore.

I semi dopo un giorno di bagno vennero seminati subito su cotone. Riportiamo i risultati relativi all'orzo per i cereali ed ai piselli per le leguminose.

Esperienza n. 1 eseguita sull'orzo.

Quattro gruppi di 100 semi di orzo ciascuno vennero esposti per tempo variabile all'azione del radio e precisamente:

N. 1	per 5 minuti
» 2	» 15 »
» 3	» 30 »
» 4	» 3 ore

Trascriviamo i risultati ottenuti dopo 8 giorni, relativi al numero di semi germinati, alla lunghezza totale delle piantine, e alla distribuzione diversa della lunghezza fra le singole piante.

(1) Il radio venne sempre gentilmente dosato dal prof. Bonino dell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Bologna, e ci è grato porgergli qui i più vivi ringraziamenti.

Confronto		N. 1		N. 2		N. 3		N. 4	
Num. di piante	Lunghezza cm.	Num. di piante	Lunghezza cm.	Num. di piante	Lunghezza cm.	Num. di piante	Lunghezza cm.	Num. di piante	Lunghezza cm.
20	0.5	16	0.5	24	0.5	18	0.5	24	0.5
26	1	24	1	14	1	6	1	24	1
8	1.5	16	1.5	24	1.5	6	1.5	22	1.5
2	2	16	2	8	2	30	2	14	2
6	2.5	18	2.5	26	2.5	38	2.5	8	2.5
		8	3	2	3	2	3		
		2	3.5	2	3.5				
Numero totale di piante: 62		Numero totale di piante: 100		Numero totale di piante: 100		Numero totale di piante: 100		Numero totale di piante: 92	
Lunghezza totale delle piante: 67 cm.		Lunghezza totale delle piante: 164 cm.		Lunghezza totale delle piante: 172 cm.		Lunghezza totale delle piante: 192 cm.		Lunghezza totale delle piante: 107 cm.	

Al giorno ottavo si aggiunse della terra di giardino attorno alle piantine, e dopo altri otto giorni si misurò la lunghezza delle piantine e si pesarono dopo averle tagliate rasente terra.

	Confronto	N. 1	N. 2	N. 3	N. 4
Lunghezza totale delle piantine d'orzo cm.	517	852	950	893	769
Peso totale » gr.	5.44	9.4	9.8	9.62	8.0
Lunghezza media » cm.	7.4	8.52	9.5	8.93	8.2
Peso medio » gr.	0.077	0.094	0.098	0.0962	0.086

OSSERVAZIONE. — I risultati riportati stanno a provare come già una irradiazione di 5 minuti provochi una notevole azione favorevole sulla germinazione dei semi e sulla crescita delle piantine, i risultati migliori, si ottengono in questo caso per una esposizione di 30 minuti, mentre l'esposizione di 3 ore, apportando pur sempre una notevole azione favorevole, rispetto alle prove di confronto, segna però una diminuzione dell'effetto rispetto alla irradiazione di durata inferiore.

Le curve statistiche ci mostrano come il massimo sia dato per la prova di confronto per le piantine di 1 cm.: nelle prove n. 1 e n. 2 tale massimo

è più elevato e si sposta fra le piantine di $1 \div 2$ cm. mentre per le piantine n. 3 il massimo è decisamente spostato sulle piantine di 2 cm., ed è molto grande: nella prova n. 4 si ritorna al massimo per le piantine di 1 cm. ma tale massimo è più elevato di quello caratteristico della prova di confronto.

In media si osserva come nel caso più favorevole le piantine hanno una lunghezza di 2 cm. in più ed un peso superiore di 0.02 gr.

Esperienza n. 2 eseguita sui piselli.

Anche in questa esperienza 4 gruppi di 100 semi di piselli ciascuno vennero esposti allo stato secco all'azione di 3.9 mgr. di bromuro di radio per una durata di tempo diversa, e precisamente:

N. 1	per 5 minuti
» 2	» 15 »
» 3	» 30 »
» 4	» 3 ore

I semi vennero seminati dopo un giorno di bagnatura su cotone inumidito.

Riportiamo i risultati ottenuti dopo 8 giorni, riguardo alla diversa lunghezza raggiunta dalle piantine cresciute dai semi delle varie prove.

Confronto		N. 1		N. 2		N. 3		N. 4	
Num. di piante	Lunghezza cm.	Num. di piante	Lunghezza cm.	Num. di piante	Lunghezza cm.	Num. di piante	Lunghezza cm.	Num. di piante	Lunghezza cm.
69	0.5	54	0.5	38	0.5	39	0.5	73	0.5
6	1	34	1	46	1	52	1	18	1
		6	2	10	2	9	2		
Numero totale di piante: 75		Numero totale di piante: 94		Numero totale di piante: 94		Numero totale di piante: 100		Numero totale delle piante: 91	
Lunghezza totale delle piante: 44.5 cm.		Lunghezza totale delle piante: 73 cm.		Lunghezza totale delle piante: 85 cm.		Lunghezza totale delle piante: 89.5 cm.		Lunghezza totale delle piante: 54.5 cm.	

Dopo l'ottavo giorno si aggiunse della terra alle piantine, e dopo altri otto giorni si misurarono le piantine in lunghezza e si pesarono dopo averle tagliate rasente terra.

		Confronto	N. 1	N. 2	N. 3	N. 4
Lunghezza totale						
delle piante di <i>pisello</i>	cm.	139.5	284	328	411	230.5
Peso totale	» gr.	20.4	29	30	32.4	26.4
Lunghezza media	» cm.	1.9	3	3.5	4.11	2.5
Peso medio	» gr.	0.27	0.308	0.309	0.324	0.29

OSSERVAZIONE. — Anche in questo caso si osserva come nel precedente lo stesso andamento nell'effetto della irradiazione, col variare della sua durata.

Abbiamo un numero maggiore di semi nati, le piantine della prova migliore (30 m. di irradiazione) superano quelle di confronto per una lunghezza media di 2 cm. e per un peso medio di 0.05 gr.

Le curve statistiche tracciate all'ottavo giorno, mostrano anche in questo caso oltre ad un valore maggiore del massimo anche uno spostamento verso le lunghezze maggiori da 0.5 cm. della prova di confronto a 1 cm. per il n. 2 e il n. 3 per ritornare a 0.5 cm. nel caso del n. 4.

Abbiamo fatto variare la dose di radio destinata alla irradiazione ed abbiamo potuto osservare come si debba variare in tale caso la durata di esposizione onde ottenere risultati analoghi a quelli caratteristici delle dosi più forti.

Così riducendo la soluzione di bromuro di radio circa alla metà e precisamente servendo si di un tubicino contenente 1.9 mgr. di bromuro di radio in soluzione, le durate di esposizione necessarie ad ottenere lo stesso effetto variarono del quintuplo circa.

Per dosi molto piccole di radio, gli effetti migliori si ottengono dopo un giorno intero di esposizione.

Interessante è il fatto della persistenza dell'azione stimolante, provocata dalla irradiazione col radio. Questo effetto permane durante la vita latente del seme, senza diminuire per 2-3 e più mesi.

Diamo in proposito un esempio relativo a semi di pisello, seminati due mesi dopo l'irradiazione.

I semi furono esposti infatti in febbraio per 5 ore all'azione di 1.9 mg. di bromuro di radio, e vennero poi seminati dopo bagnatura di un giorno, su cotone inumidito, il 17 aprile.

Riportiamo i dati relativi alla lunghezza, a peso totale e medio delle piantine e le curve statistiche di distribuzione delle lunghezze al 14° giorno.

Cento semi di pisello seminati su cotone inumidito.

Confronto: Semi esposti all'azione del radio:
Prova N. 1

4 piantine da 1 cm.				6 piantine da 1 cm.			
10	»	»	2	»	»	»	2
12	»	»	3	»	»	»	3
10	»	»	4	»	»	»	4
6	»	»	5	»	»	»	5
6	»	»	6	»	»	»	6
8	»	»	7	»	»	»	7
4	»	»	8	»	»	»	8
2	»	»	9	»	»	»	9
2	»	»	10	»	»	»	12
2	»	»	11	»	»	»	13

	Confronto	Prova N. 1
Numero totale delle piante germinate	70	86
Lunghezza totale delle piante . . . cm.	328	486
Peso totale delle piantine gr.	31.2	44.8
Lunghezza media delle piante . . . cm.	4.6	5.8
Peso medio delle piantine gr.	0.445	0.521

OSSERVAZIONI. — Anche in questo caso si osserva un aumento nel numero di semi germinati, la lunghezza media delle piantine della prova supera di 1.2 cm. quella delle piantine di confronto, e il peso di 0.1 gr.

Nelle curve statistiche si osserva come il massimo oltre ad essere più grande è spostato nelle lunghezze fra 6 o 8 cm. Mentre nella prova di confronto si trova fra 3 e 4.

CONCLUSIONE E RIASSUNTO. — Le esperienze da noi eseguite sulla influenza esercitata dalla irradiazione coi raggi γ del radio, sui semi di piante diverse, ci portano a concludere quanto segue:

1° Bisogna dosare attentamente la durata della irradiazione, che in dosi minime esercita un effetto molto favorevole, in dosi forti invece una azione nociva.

2° Le nostre esperienze eseguite con 3.9 milligrammi di radio, hanno posto in evidenza come l'azione favorevole si iniziò già in modo sensibile dopo una esposizione di 5 minuti, essa raggiunge un massimo per una

esposizione di 30 minuti, per diminuire poi come viene posto in evidenza nella prova di 3 ore.

Portando la quantità di radio alla metà le durate di esposizione vanno aumentate del quintuplo.

3° Le prove migliori hanno permesso di raggiungere il 30 % in più circa di semi germinati, ed un aumento dell'80 % della lunghezza totale delle piantine e dell'80 % in peso.

4° L'effetto stimolante una volta impresso al seme permane in esso, come è stato posto chiaramente in evidenza nelle prove fatte seminando i semi irradiati due mesi dopo la data di irradiazione.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1930 (Anno VIII).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Pseudo-integrali e pseudo-derivate.* Nota ⁽¹⁾
di G. ANDREOLI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

1. *Estremi di indeterminazione.* — Proseguendo la ricerca iniziata nelle due precedenti Note, ci proponiamo di estenderne la portata al campo funzionale: definizione di integrale, di derivata, classificazione di Baire.

Osserviamo, anzitutto, che le definizioni sinora date, permettono di ridurre l'intervallo di indeterminazione della funzione in un punto; ed occorre quindi modificare il concetto di estremo della funzione in un punto ed in un intervallo, per renderle tutte coerenti.

Noi diremo che M è lo pseudo estremo superiore di f nel punto x , se M è il minimo dei valori per i quali l'insieme dei punti dell'intorno di x per i quali $f(\xi)$ risulti maggiore di $M + \sigma$ risulti *sempre* di densità nulla in x .

Analoga definizione per lo pseudo-estremo inferiore; e ricordando la definizione di pseudo limite, si vede che se la funzione è pseudo-continua i due pseudo-estremi coincidono fra loro e col valore nel punto.

Viceversa, però, bisogna osservare che i due pseudo-estremi possono coincidere senza che vi sia nè continuità nè pseudo-continuità, in quanto

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1930.

il loro valore comune può essere diverso da quello che la funzione assume nel punto considerato.

Qualche esempio chiarirà meglio ciò.

Se $f(x)$ è tale che:

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{fuori di } \frac{1}{2^r}, \frac{1}{2^r} - \frac{1}{q^r} \\ f(x) = 1 & \text{in tale intervallo} \\ f(x) = \frac{1}{2} & \text{in } 0, -1 \end{cases}$$

si troverà come pseudo-estremo d'indeterminazione in 0, il valore $1/2$.

Più perspicuamente se

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2} & \text{in } \left(\frac{1}{2^{2r}}, \frac{1}{2^{2r+1}} \right) \\ \varphi(x) = 1 & \text{in } \left(\frac{1}{2^{2r+1}}, \frac{1}{2^{2r+1}} - \frac{2}{q^{2r+1}} \right) \\ \varphi(x) = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si troverà lo pseudo-estremo d'indeterminazione $\frac{1}{2}$, nel punto 0, mentre la definizione ordinaria darebbe 1.

2. *Pseudo-estremi in un intervallo.* — Se si vuol completare la definizione in modo da poter estendere le abituali proprietà e teoremi, occorre definire come pseudo-estremo superiore di $f(x)$ in (a, b) il minimo dei numeri M tali che:

$$\begin{cases} \text{I. Mis. inf. } \{f(x) - M\} = 0 \\ \text{II. Densità attorno a } \xi - \text{ generico} - \text{ di tale insieme} = 0. \end{cases}$$

Se valgono simultaneamente queste due ipotesi, varranno moltissime delle proprietà ordinarie.

Ad esempio — con la sola I — si ha che:

$$\begin{aligned} \alpha) & \text{ Se } M_1 \text{ è lo pseudo-estremo superiore in } (a, b), \\ & M_2 \text{ » » » » } (b, c), \\ & M \text{ » » » » } (a, c), \end{aligned}$$

allora

$$M \geq M_1 \quad ; \quad M \geq M_2$$

ove almeno una delle due eguaglianze è soddisfatta.

β) Se vale anche la II, allora:

Se M è lo pseudo-estremo superiore in (a, b) esisterà almeno un punto x , nel quale lo pseudo-estremo d'indeterminazione è ancora M (e si vede qui che la condizione II è assolutamente necessaria).

Come conseguenza di quanto precede, si potrà dire che una funzione è pseudo-limitata in un intervallo, allorchè è ivi limitata, se si esclude un insieme di misura nulla ed a densità dovunque nulla; e solo con tale definizione si potrà estendere il teorema di Weierstrass sulle funzioni limitate.¹

3. *Definizione di pseudo-integrale.* — Riesce agevole estendere ed utilizzare tali concetti per la definizione di un processo integrale. In effetti, se vogliamo seguire il procedimento di Darboux, noi possiamo spezzare l'intervallo dato in una somma di intervalli contigui; formare il prodotto dell'ampiezza di questi per i rispettivi pseudo-estremi superiori (o inferiori), e sommare tali prodotti — avendo somme per eccesso e somme per difetto.

A causa delle proprietà degli pseudo-estremi, si vede che:

I. Se si spezzano ulteriormente gli intervalli, le somme per eccesso diminuiscono — o per lo meno non crescono; — quelle per difetto crescono o non diminuiscono.

II. Per un certo stadio della suddivisione — quando cioè la massima ampiezza dell'intervallo parziale è sufficientemente piccola — la somma per eccesso si può rendere minore di qualsiasi altra somma per eccesso già calcolata; ed analogamente per quella inferiore.

III. Le somme per eccesso sono sempre maggiori di quelle per difetto.

Dunque restano definiti — come nel caso ordinario — un integrale per eccesso ed uno per difetto.

Se essi coincidono si avrà lo pseudo-integrale.

Quest'ultimo potrà essere calcolato formando la somma dei prodotti dell'ampiezza degli intervalli per un valore della funzione, dopo aver trascurato quelli di un certo insieme di misura e di densità nulli.

4. *Pseudo-derivata.* — Avendo fissato il concetto di pseudo-limite, resta anche definito il concetto di pseudo-derivata.

Per chiarirlo basterà il seguente esempio.

Sia definita $f(x)$ con

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ fuori di } \left(\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2^r} - \frac{1}{q^r} \right) = I_r \\ f(x) \text{ varia linearmente da } 0 \text{ a } 1 \text{ per } x \text{ crescente da } \frac{1}{2^r} \text{ a } \frac{1}{2^r} - \frac{2}{2q^r} \\ f(x) \text{ varia linearmente da } 1 \text{ a } 0 \text{ per } x \text{ crescente da } \frac{1}{2^r} - \frac{1}{2q^r} \text{ a } \frac{1}{2^r} - \frac{1}{q^r} \\ f(x) = 0 \text{ per } x = 0. \end{array} \right.$$

Se si forma il rapporto incrementale, nel senso ordinario, esso non avrà limite; e per dippiù la $f(x)$ non è continua in O .

Invece, attraverso le definizioni date, si vede che la $f(x)$ è pseudo continua ivi; ed inoltre, poichè il rapporto incrementale fra il punto O ed il punto x è nullo se x sta fuori di I_r , e la misura

$$\sum_{r=n}^{\infty} I_r$$

tende ovviamente a zero al divergere di n (cioè all'avvicinarsi di x allo zero) esisterà anche lo pseudo-limite del rapporto incrementale. E precisamente la pseudo-tangente è l'asse delle x .

5. *Conclusioni.* — I procedimenti che noi abbiamo assegnati sono da un lato componibili con quelli usuali; dall'altro si possono iterare.

In effetti — lo pseudo-limite di una successione — è definito attraverso due limiti nel senso ordinario: e cioè il limite di una successione parziale, e la frequenza nulla della complementare.

Se a lor volta tali limiti si intendono presi come « pseudo-limiti », si vede che il primo non dà varianti, ma il secondo li può dare.

Similmente per la variabile continua. Essa è collegata al concetto di *densità*, che è definita con un limite comune.

Pertanto, se a sua volta si sostituisce a questo uno pseudo-limite, si allargheranno le definizioni giungendo ad uno pseudo-limite di secondo ordine e così via indefinitamente.

Infine ci limitiamo ad osservare come le funzioni pseudo-continue possono appartenere a tutte le classi di Baire; ma che a lor volta, partendo da esse e servendosi dello pseudo-limite è possibile stabilire tutta una nuova classificazione delle funzioni discontinue.

Ma su ciò ritorneremo più esplicitamente.

Matematica. — *Derivazione parziale dei tensori in relazione con la loro rappresentazione intrinseca e parzialmente intrinseca.* Nota⁽¹⁾ di MARIA PASTORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

In una Nota in corso di pubblicazione presso questi « Rendiconti »⁽²⁾ ho svolto alcune considerazioni relative alla *derivazione parziale* dei tensori, rappresentati in forma covariante. Nella presente svolgo considerazioni analoghe per i tensori rappresentati in forma intrinseca; determino poi i legami tra i due tipi di derivazione parziale (intrinseca e covariante); mostro infine come la derivazione parziale sia spontaneamente legata alla rappresentazione parzialmente intrinseca dei tensori e come ad essa si giunga mediante operazioni dell'ordinario calcolo assoluto, quali la saturazione di alcuni indici e la derivazione tensoriale, seguita dalla saturazione degli altri indici.

1. *Derivazione parziale di un tensore rappresentato in forma intrinseca.*

Consideriamo in una varietà riemanniana ad n dimensioni una ennupla di congruenze ortogonali, di parametri λ^α ($\alpha, i = 1, 2, \dots, n$), e siano:

$$(1) \quad T_{ij} = T_{\alpha\beta} \lambda^\alpha_i \lambda^\beta_j$$

le componenti intrinseche di un tensore doppio \mathbf{T} . Come è noto, da esse si passa alle componenti intrinseche del tensore derivato applicando le formole⁽³⁾:

$$(2) \quad T_{ij/k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial s_k} + T_{\alpha j} \gamma_{\alpha i k} + T_{i \alpha} \gamma_{\alpha j k}.$$

La legge che si ricava da (2) sopprimendo uno dei due ultimi termini del secondo membro, ossia tenendo conto di uno solo degli indici delle componenti (1):

$$(3) \quad T_{(i) j/k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial s_k} + T_{i \alpha} \gamma_{\alpha j k}$$

verrà ancora chiamata derivazione parziale (intrinseca) come già la legge analoga applicata alle componenti covarianti di \mathbf{T} ⁽⁴⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1930.

(2) Ancora sulla derivazione parziale dei tensori, fasc. 1-2, p. 17, 1930.

(3) U. CISOTTI, *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto*, questi « Rendiconti », serie 5ª, vol. XXVII (1º sem. 1918) pp. 387-391.

(4) Cfr. la mia Nota citata.

Le (3) sono sistemi di funzioni, invarianti per un cambiamento di coordinate, ma che non possono considerarsi come componenti intrinseche di un tensore triplo. È facile infatti constatare (e del resto verrà calcolato più avanti) che, se si passa dall'ennupla considerata ad un'altra, pure ortogonale, di parametri:

$$(4) \quad \lambda^{\alpha}_{\bar{i}} = \lambda^{\alpha}_{\beta} c_{i\beta}$$

le (3) seguono la seguente legge di trasformazione:

$$(5) \quad \bar{T}_{(i)jk} = T_{(\alpha)\beta\delta} c_{i\alpha} c_{j\beta} c_{k\delta} + T_{\alpha\beta} c_{j\beta} \frac{\partial c}{\partial \bar{s}_k} \quad (1)$$

mentre per le componenti di un tensore triplo si ha:

$$(6) \quad \bar{T}_{ijk} = T_{\alpha\beta\delta} c_{i\alpha} c_{j\beta} c_{k\delta}$$

Caso particolare delle (5) per $T = a = a_{ik} \lambda^i \lambda^k = \varepsilon^{\alpha}_{\beta}$, $T_{(\alpha)\beta\delta} = a_{(\alpha)\beta\delta} = \gamma_{\alpha\beta\delta}$ ⁽²⁾, sono le formole di trasformazione dei coefficienti di rotazione di Ricci:

$$(5') \quad \bar{\gamma}_{ijk} = \gamma_{\alpha\beta\delta} c_{i\alpha} c_{j\beta} c_{k\delta} + c_{j\alpha} \frac{\partial c}{\partial \bar{s}_k}$$

È immediata l'estensione delle considerazioni esposte alle componenti intrinseche dei tensori m^{pli} ($m > 2$) ⁽³⁾. Per un tensore semplice si può considerare come derivazione parziale la derivazione rispetto agli archi delle congruenze. Posto infatti:

$$T_{(i)k} = \frac{\partial T}{\partial s_k} = \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha k}} \lambda^{\alpha}$$

si ha per le (4) e le (6) applicate a un tensore semplice:

$$(5'') \quad \bar{T}_{(i)k} = T_{(\alpha)\beta} c_{i\alpha} c_{k\beta} + T_{\alpha} \frac{\partial c}{\partial \bar{s}_k}$$

$$(1) \text{ Con } \frac{\partial c}{\partial s_k} = \frac{\partial c}{\partial x_{\beta k}} \lambda^{\beta}$$

(2) Cfr. la mia Nota: « Definizione intrinseca dei simboli di Christoffel e derivazione parziale dei tensori, nei « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXII, fasc. XVI-XX, 1929, pp. 821-826.

(3) Cfr. la prima delle mie Note citate.

È noto, d'altra parte, come le (5') servano per la eliminazione delle derivate $\frac{\partial c}{\partial \bar{s}_k}$ dalle (5'') così da dedurne le formole di derivazione intrinseca ⁽¹⁾.

2. *Legame tra i derivati parziali e gli ordinari tensori.*

In modo analogo a quello con cui, nella Nota precedente, si sono trovate le relazioni tra le derivate parziali delle componenti covarianti di un tensore e le componenti covarianti di altri tensori, si possono trovare legami tra le derivate parziali delle componenti intrinseche di tensori e le componenti intrinseche di nuovi tensori. Non si ha però in questo caso il tensore corrispondente a $T_{(i)j/k} - T_{(k)j/i}$ perchè non sono eguali le due

$$\text{derivate } \frac{\partial c}{\partial \bar{s}_k} \text{ e } \frac{\partial c}{\partial \bar{s}_i}.$$

Consideriamo, accanto ai coefficienti di rotazione di Ricci, i simboli così definiti:

$$\gamma'_{ijk} = \lambda_{\alpha i'} \lambda_{\beta j} \lambda_{\gamma k}^{\alpha \beta} \quad (2)$$

che, per una mutazione di congruenze seguono pure la legge (5'). Sostituendo le γ' alle γ nelle (3), si ha:

$$(3') \quad T_{(i)j/k} = \frac{\partial T}{\partial \bar{s}_k} + T_{i\alpha} \gamma'_{\alpha jk}.$$

Anche le (3') seguono, per una mutazione di congruenze, la legge (5). Da esse e dalle (3) si possono quindi ottenere le seguenti componenti di un tensore triplo:

$$(7) \quad V_{ijk} = T_{(i)j/k} - T_{(i)j/l} T_{l/k} = T_{i\alpha} (\gamma'_{\alpha jk} - \gamma_{\alpha jk}).$$

Esse non sono altro che le componenti intrinseche del tensore V , composto di T con ϱ ⁽³⁾. Si ha infatti:

$$(8) \quad \gamma'_{\alpha jk} - \gamma_{\alpha jk} = \left(\left\{ \begin{matrix} \gamma & \delta \\ & \beta \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} \gamma & \delta \\ & \beta \end{matrix} \right\} \right) \lambda_{\beta}^{\alpha} \lambda_{\gamma}^{\gamma} \lambda_{\delta}^{\delta} = \rho_{\gamma \delta}^{\alpha \beta} \lambda_{\beta}^{\gamma} \lambda_{\delta}^{\delta} = \rho_{\alpha jk}.$$

Ad un altro tensore, analogo a quello di componenti (8), si giunge con le seguenti considerazioni.

(1) Cfr. G. VRANCEANU, *Studio geometrico di sistemi anolonomi*, « Annali di matematica », serie IV, tomo VI, fasc. I e II (novembre 1928, febbraio 1929), pp. 9-43.

(2) Come nella prima delle mie Note citate, l'apice che segue il segno di derivazione sta ad indicare che, al posto dei simboli di Christoffel relativi al tensore fondamentale a_{ik} , si sono sostituiti altri simboli $\left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & \delta \end{matrix} \right\}'$ costruiti egualmente con un altro tensore doppio simmetrico b_{ik} .

(3) Cfr. la prima delle mie Note citate § 3.

Consideriamo accanto all'ennupla di parametri λ^{α} , un'altra ennupla di congruenze ortogonali, di parametri $\lambda^{*\alpha}$, e costruiamo i seguenti simboli:

$$(9) \quad \gamma_{ij}^{*} = \lambda_{\alpha/\beta}^{*} \lambda^{*\alpha} \lambda_{\beta}.$$

Si verifica facilmente che, se insieme all'ennupla considerata da principio, si impone anche alla nuova lo stesso cambiamento (4) ⁽¹⁾, le γ^{*} seguono la legge di trasformazione (5') ⁽²⁾. Da cui:

$$(10) \quad \gamma_{ijk}^{*} - \gamma_{ijk} = (\gamma_{\alpha\beta\delta}^{*} - \gamma_{\alpha\beta\delta}) \underset{i\alpha}{c} \underset{j\beta}{c} \underset{k\delta}{c}.$$

Le (10) sono quindi le componenti intrinseche di un tensore triplo \mathbf{T} . Così, sostituendo nelle (3) al posto delle γ le γ^{*} :

$$(3'') \quad \underset{(i)j/k}{T} = \frac{\partial T}{\partial s_k} \underset{ij}{T} + \underset{i\alpha}{T} \gamma_{\alpha/k}^{*}$$

e sottraendo le (3) dalle (3'') si hanno le componenti di un tensore triplo:

$$(11) \quad \underset{ijk}{W} = \underset{(i)j/k}{T} - \underset{(i)j/k}{T} = \underset{i\alpha}{T} (\gamma_{\alpha/k}^{*} - \gamma_{\alpha/k})$$

composto di \mathbf{T} con \mathbf{T} .

Evidentemente si otterrebbero le componenti intrinseche di tensori tripli anche costruendo le γ'^{*} e sottraendole dalle γ^{*} o dalle γ .

Se si passa dalle derivate parziali di primo ordine a quelle di secondo ordine, ossia se si applica due volte la legge (3), si ottengono sistemi di funzioni a 4 indici $\underset{(i)j/hr}{T}$ che sono legate nel modo seguente alle componenti di un tensore quadruplo \mathbf{U} ⁽³⁾

$$(12) \quad \underset{ijkr}{U} = \underset{(i)j/hr}{T} - \underset{(i)j/rk}{T} = \underset{i\alpha}{T} \gamma_{\alpha j, kr}$$

(1) I coefficienti c sono arbitrari, salvo soddisfare alle condizioni che derivano dalle ortogonalità delle due ennuple. Va escluso però il caso che essi siano i coseni degli angoli che formano le congruenze delle due ennuple, per cui si avrebbe un semplice scambio delle due ennuple.

(2) Nella formola (9) di definizione delle γ^{*} l'indice β è stato saturato riferendosi ai parametri della prima delle due ennuple considerate, affinchè nella formola corrispondente alla (5') l'ultimo termine del secondo membro sia eguale a quello delle (5').

(3) Ometto per brevità la dimostrazione che è analoga a quella relativa alle componenti covarianti (e contenuta nella Nota precedente), ma un po' meno semplice di essa. Infatti in questo caso non sono nulli i termini in cui figurano le differenze $\gamma_{jkr} - \gamma_{jrk}$; va inoltre applicata la formola di commutazione delle derivate seconde rispetto agli archi. (Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, Stock, 1925, pp. 289-290).

dove $\gamma_{aj,kr}$ sono i simboli a 4 indici di Ricci (componenti intrinseche del tensore di Riemann-Christoffel) definiti nel modo seguente:

$$\gamma_{aj,kr} = \frac{\partial \gamma_{ajh}}{\partial s_r} - \frac{\partial \gamma_{ajr}}{\partial s_k} + \{ \gamma_{aj\beta} (\gamma_{\beta kr} - \gamma_{\beta rk}) + \gamma_{\beta ar} \gamma_{\beta jk} - \gamma_{\beta jr} \gamma_{\beta ak} \}.$$

In particolare, per $T_{ij} = a$ si ha:

$$(12') \quad \frac{a}{(i)j|kr} - \frac{a}{(i)j|rk} = \gamma_{(i)jk|r} - \gamma_{(i)jr|k} = \gamma_{ij,kr}.$$

Le (12') vennero osservate la prima volta dal prof. Cisotti fin dal 1918⁽¹⁾.

3. *La derivazione parziale in relazione con la rappresentazione parzialmente intrinseca.*

È noto che le formole di derivazione intrinseca si possono ottenere da quelle di derivazione covariante saturando tutti gli indici del tensore derivato mediante i parametri (se si tratta di indici di covarianza) o i momenti (se si tratta di indici di contravarianza) di un'ennupla di congruenze ortogonali⁽²⁾.

D'altra parte, stabilite direttamente le formole di derivazione intrinseca, si possono ottenere da esse quelle di derivazione covariante mediante una saturazione analoga⁽³⁾.

Nasce quindi spontanea la domanda se la stessa relazione esista tra le derivate parziali. Si vede facilmente che ciò non è. Si ha precisamente:

$$T_{(i)j|k} \lambda^i \lambda^j \lambda^k = T_{(p)q|r} + T_{\alpha q} \frac{\partial \lambda_i}{\partial s_r} \lambda^i = T_{\alpha q} \left\{ \frac{i}{\beta} \frac{k}{\beta} \right\} \lambda_\beta \lambda^i \lambda^k.$$

Basta perciò tener conto delle relazioni di ortogonalità tra parametri e momenti, delle formole:

$$T_{ij} = T_{\alpha\beta} \lambda_i \lambda_j$$

e di quelle che definiscono i coefficienti di rotazione di Ricci. In modo analogo si trova⁽⁴⁾:

$$T_{(i)j|k} \lambda_p \lambda_q \lambda_r = T_{(p)q|r} - T_{\alpha q} \lambda^\alpha \frac{\partial \lambda_p}{\partial x_r} = T_{pq|r} - T_{\alpha q} \lambda^\alpha \lambda_{p/r}.$$

(1) U. CISOTTI, *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto*, Nota II, questi « Rendiconti », II sem., 1918, pp. 21-24.

(2) U. CISOTTI, prima Nota citata.

(3) A. PALATINI, *Sulla geometria intrinseca come strumento di calcolo*, « Rendiconti del Seminario Matem. e Fisico di Milano », vol. II, 1928, pp. 63-77.

(4) Oltre che di relazioni già ricordate, va tenuto conto delle seguenti:

$$\frac{\partial \lambda_p}{\partial x_r} \lambda^\alpha = - \lambda_p \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x_r},$$

che sono una conseguenza delle condizioni di ortogonalità.

Alle due formole di derivazione parziale (covariante e intrinseca) si giunge invece nel modo seguente.

Consideriamo le componenti parzialmente intrinseche del tensore doppio $T^{(1)}$:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{i \cdot j} = T_{\alpha j} \lambda_{i \cdot}^{\alpha} \quad ; \quad T_{i \cdot} = T_{i \alpha} \lambda_{\cdot}^{\alpha} \\ T_{i \cdot} = T_{i \alpha} \lambda_{\cdot}^{\alpha} \quad ; \quad T_i = T_{\alpha j} \lambda_{\cdot}^{\alpha} \end{array} \right.$$

Come ho già osservato⁽²⁾ le (13) possono anche essere interpretate come componenti covarianti di n tensori semplici (dove l'indice in basso è un indice ordinale) o come componenti intrinseche di n tensori semplici (dove l'indice a destra è un indice ordinale).

Seguendo la prima interpretazione, costruiamo gli n tensori doppi derivati, di componenti covarianti $T_{i \cdot j/k}$. Si trova facilmente:

$$(14) \quad T_{i \cdot j/k} \lambda_q^j \lambda_r^k = T_{(i) q/r}.$$

Seguendo la seconda interpretazione, costruiamo gli n tensori doppi derivati, di componenti intrinseche $T_{i \cdot}{}_{j/k}$. Si trova facilmente:

$$(15) \quad T_{i \cdot}{}_{j/k} \lambda_j^j \lambda_r^k = T_{(i) q/r}.$$

Le formole (14) e (15), già contenute in una delle mie Note ricordate⁽³⁾, mostrano come la derivazione parziale si presenti spontaneamente legata alla rappresentazione parzialmente intrinseca dei tensori e mettono in evidenza che alla derivazione parziale si giunge attraverso operazioni dell'ordinario calcolo assoluto, quali la saturazione di alcuni indici e la derivazione tensoriale, seguita dalla saturazione degli altri indici.

Dalle (14) scende poi subito la legge (5) di trasformazione per un cambiamento dell'ennupla, tenendo conto che, per tale cambiamento le $T_{i \cdot j/k}$ seguono la legge seguente⁽⁴⁾:

$$T_{i \cdot j/k} = T_{\alpha}{}_{\cdot j/k} \lambda_{i \alpha}^{\alpha} + T_{\alpha}{}_{\cdot j} \frac{\partial \lambda_{i \alpha}^{\alpha}}{\partial x_k}.$$

Anche gli altri risultati, a cui siamo giunti in precedenza, discendono facilmente dalle (14).

(1) Cfr. la mia Nota: *Sulla rappresentazione parzialmente intrinseca dei tensori*, questi « Rendiconti », vol. IX, serie 6^a, 1° sem., 1929, pp. 834-839.

(2) Cfr. la mia Nota, ultima citata.

(3) *Definizione intrinseca ecc.*

(4) Cfr. la mia Nota, *Sulla derivazione parziale dei tensori*, questi « Rendiconti », vol. X, serie 6^a, 2° sem., 1929, pp. 10-15.

Matematica. — *Sur l'ultraconvergence (Ueberkonvergenz) de certaines séries de Dirichlet.* Nota ⁽¹⁾ di VLADIMIRO BERNSTEIN, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

On sait que certaines séries de Taylor peuvent posséder des suites de sommes partielles convergentes dans des domaines qui s'étendent au-delà du cercle de convergence de la série elle-même. M. A. Ostrowski a étudié ce phénomène et lui a donné le nom allemand de *Ueberkonvergenz*; je crois qu'aucun terme français ne correspond jusqu'ici à ce terme allemand. M. P. Montel m'a suggéré le terme de *ultraconvergence* qui correspond assez bien au terme allemand (le mot « ultra » y est employé au même sens de « au-delà » que dans le terme physique de « rayons ultra-violet » et ne doit pas être interprété comme indication d'une convergence extrêmement forte).

J'ai étudié dans ma Thèse de Doctorat ⁽²⁾ les séries de Dirichlet dont la suite d'exposants possède une *densité maximum* finie ⁽³⁾ et j'ai montré que les propriétés du cercle de convergence des séries de Taylor se distribuent entre la droite de convergence et la droite d'holomorphie; d'une manière pas très précise mais assez expressive on peut dire que les propriétés qui dépendent du caractère analytique de la fonction représentée par la série, se rapportent à la droite d'holomorphie, tandis que celles qui dépendent plutôt de la série elle-même, se rapportent à la droite de convergence. M. P. Montel m'a signalé l'intérêt qu'il y aurait à étudier l'ultraconvergence de cette classe de séries de Dirichlet, et en particulier à voir si celles de ces séries, pour lesquelles les droites de convergence et d'holomorphie ne se confondent pas, ne sont pas nécessairement ultraconvergentes dans la bande comprise entre ces deux droites. J'expose dans cette Note quelques résultats que j'ai pu obtenir dans cette voie; quant aux démonstrations, j'espère avoir l'occasion de les publier prochainement dans un autre recueil.

Je rappelle les principaux résultats de M. A. Ostrowski pour les séries de Taylor:

I. *Toute série de Taylor qui possède une infinité de lacunes d'une largeur relative supérieure à un nombre positif fixe est ultraconvergente autour de chaque point régulier de son cercle de convergence* ⁽⁴⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1930.

(2) *Sur les singularités des séries de Dirichlet*, « Rendiconti R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXIII, fasc. 6-10, 1930.

(3) Pour la définition précise de la densité maximum voir G. POLYA, *Untersuchungen über Lücken* etc., « Math. Zeitschrift », T. 29, 1929, p. 559, et ma Thèse, § 1.

(4) « Berl. Sitz. », 1921, p. 557.

II. a) Toute série de Taylor qui est ultraconvergente autour d'un point régulier de son cercle de convergence peut être représentée comme la somme de deux séries, dont l'une possède des lacunes du type indiqué ci-dessus, et l'autre a un rayon de convergence supérieur à celui de la série donnée;

b) Si on considère une suite de sommes partielles d'une telle série

$$S_{n_1}(s), S_{n_2}(s), \dots, S_{n_k}(s), \dots$$

qui converge au-delà du cercle de convergence de la série, cette suite contient une infinité de somme partielles $S_{n_k}(s)$ telles que le nombre de termes de la série qu'il lui faut adjoindre pour obtenir la somme suivante est supérieur à un nombre positif fixe multiplié par l'exposant du terme auquel la première somme est arrêtée ⁽¹⁾.

La proposition I s'applique d'ailleurs non seulement aux séries de Taylor, mais aussi aux séries de Dirichlet les plus générales, comme l'a montré M. A. Ostrowski lui-même; quant à la proposition II, il est évident qu'elle ne peut pas être vraie pour toutes les séries de Dirichlet ⁽²⁾. Je dirai qu'il y a *ultraconvergence lacunaire* lorsque II. b) est vérifiée et qu'il y a *ultraconvergence serrée* lorsque II. b) n'est pas vérifiée.

Cela posé, nous pouvons énoncer les théorèmes suivants:

THÉORÈME I. Si la suite d'exposants de la série de Dirichlet

$$(1) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n}$$

a une densité maximum finie, et si l'abscisse de convergence σ de (1), supposée finie, est différente de son abscisse d'holomorphie \Re , toute la bande délimitée par les droites de convergence et d'holomorphie

$$\Re < \Re(s) \leq \sigma$$

représente un domaine de ultraconvergence serrée de la série (1).

THÉORÈME II. Le rang des termes, auxquels il faut arrêter les sommes partielles pour obtenir une suite convergente dans tout le demi-plan d'holomorphie, ne dépend que de la suite d'exposants et ne dépend aucunement des coefficients de la série particulière considérée; on obtient une telle suite en prenant les sommes partielles arrêtées aux termes dont l'exposant λ_n est tel que l'inter-

(1) «Berl. Sitz.», 1923, p. 185. La proposition II b) a été démontrée en 1921 par M. G. SZEGÖ, mais il ne l'a pas publiée; elle n'est pas énoncée sous cette forme par M. A. OSTROWSKI; elle représente toutefois un corrolaire immédiat de son théorème II (loc. cit.).

(2) On trouvera un exemple de série de Dirichlet pour laquelle la proposition II n'est sûrement pas applicable p. ex. dans l'ouvrage: G. VALIRON, *Théorie générale des séries de Dirichlet*, «Mém. Sc. Math.», XVII, p. 4.

valle $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$ contient des points qui n'appartiennent pas à l'ensemble $E(q)$ défini au § 2 de ma Thèse (q — assez petit) ⁽¹⁾.

THÉORÈME III. Si l'on considère la suite de toutes les sommes partielles construites suivant le procédé indiqué au théorème II, si

$$(2) \quad Q_n(s) = \sum_{v=m_n}^{v=m_{n+1}-1} a_v e^{-\lambda_v s}$$

désigne le groupe des termes de (1) qu'il faut adjoindre à la n -me de ces sommes pour obtenir la $(n+1)$ -me, et si l'on pose

$$Q_n(s) = A_n(s) \cdot e^{-\lambda_{m_n} s},$$

c. à d. si l'on met la série (1) sous la forme de série de Dirichlet

$$(3) \quad f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) \cdot e^{-\lambda_{m_n} s}$$

à coefficients variables, ces coefficients $A_n(s)$ satisfont uniformément dans tout domaine

$$\Re(s) > \sigma_0 \quad ; \quad |\arg(s - \sigma_0)| < \theta$$

(σ_0 — un nombre réel quelconque et θ — un angle aigu aussi voisin de $\frac{\pi}{2}$ que l'on veut) à la condition

$$(4) \quad |A_n(s)| < e^{(\mathcal{M} + \varepsilon)\lambda_n}$$

et ce quelque petit que soit le nombre positif ε .

Ces théorèmes se démontrent à l'aide des méthodes que j'ai appliquées dans ma Thèse; on applique le Théorème VII du § 9 de ma Thèse et l'on fait suivre un raisonnement analogue à celui que j'ai employé pour démontrer le Théorème I du § 7.

Notons que les inégalités (4), auxquelles satisfont les coefficients (variables) de (3), sont exactement de la même forme que celles, auxquelles satisfont les coefficients des séries de Dirichlet ordinaires, l'abscisse d'holomorphie de (1) prenant la place de l'abscisse de convergence. Ce fait permet de démontrer que la droite d'holomorphie de (1) possède certaines des propriétés du cercle de convergence des séries de Taylor, et ce en se servant des mêmes procédés de démonstration que l'on emploie pour les séries de Taylor. En particulier, on peut démontrer ainsi le théorème suivant:

(1) La « largeur relative » des intervalles de cet ensemble doit tendre vers zéro, de sorte que l'on se trouve bien devant un cas d'ultraconvergence serrée.

THÉOREME IV. Si la série (1), dont la suite d'exposants a une densité maximum finie, a une infinité de lacunes de largeur relative supérieure à un nombre positif fixe, c. à d. si, pour une infinité d'exposants, on a l'inégalité

$$(5) \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n > \alpha \lambda_n \quad (\alpha > 0),$$

cette série est ultraconvergente autour de chaque point régulier de sa droite d'holomorphie.

Ce théorème donne une généralisation du Théorème I sus-rapporté de M. A. Ostrowski, auquel il se réduit d'ailleurs pour les séries, pour lesquelles les droites de convergence et d'holomorphie se confondent.

On pourrait considérer à première vue qu'il n'est pas raisonnable de parler de lacunes, comme nous l'avons fait ici, en parlant de séries de Dirichlet. En réalité ce n'est pas le cas; en effet, l'inégalité (5) montre que la suite $\{\lambda_n\}$ n'est sûrement pas mesurable; si donc on construit la suite mesurable principale $\{l_m\}$ contenant la suite $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle⁽¹⁾, il sera logique de considérer la série (1) comme série lacunaire du type

$$\sum b_m e^{-l_m s} \quad (b_m = 0 \text{ pour } l_m \neq \lambda_n).$$

Les théorèmes précédents montrent que l'ultraconvergence serrée, qui ne se présente jamais pour les séries de Taylor, a toujours lieu dans toute la bande délimitée par les droites de convergence et d'holomorphie des séries de Dirichlet pour lesquelles ces deux droites ne se confondent pas. Il est très probable que le domaine d'ultraconvergence serrée ne peut jamais s'étendre au-delà du demi-plan d'holomorphie, de sorte que l'ultraconvergence qui peut, suivant le théorème IV, avoir lieu en dehors de ce demi-plan, est nécessairement lacunaire. Pour le démontrer il faudrait démontrer une proposition analogue à la proposition II sus-rapportée de MM. A. Ostrowski et G. Szegő.

La condition nécessaire pour que les droites de convergence et d'holomorphie de (1) puissent ne pas se confondre, est que l'on ait⁽²⁾

$$(6) \quad \delta = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{C}'(l_m)|}{l_m} \right| > 0,$$

où

$$\mathcal{C}(\chi) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\chi^2}{l_m^2} \right).$$

Cette condition montre que, pour que les droites d'holomorphie et de convergence ne se confondent pas, il est nécessaire que la série contienne en

(1) Voir ma Thèse, § 3.

(2) Voir ma Thèse, §§ 9 et 10.

nombre infini des groupes de termes à exposants extrêmement voisins. L'exemple de série à ultraconvergence serrée que nous avons rappelé plus haut⁽¹⁾ contient précisément une infinité de groupes de deux termes à exposants très voisins; les coefficients de ces termes sont égaux en valeur absolue et de signes contraires. Cet exemple paraissait être très spécial; or, si l'on tient compte de ce que nous venons de dire au sujet de la condition (6), et si l'on pousse plus avant l'étude des groupes de termes (2) considérés au théorème III, on arrive à la conclusion inattendue que toutes les séries (à suite d'exposants admettant une densité maximum finie), pour lesquelles les droites de convergence et d'holomorphic ne se confondent pas, sont construites suivant un principe du même genre. Nous énoncerons le résultat pour les groupes de deux termes, en nous bornant à indiquer que le résultat est général, mais que l'énoncé devient plus compliqué pour les groupes de plus de deux termes. Cela dit, voici le théorème pour les groupes de deux termes :

THÉOREME V. *Si parmi les groupes de termes (2), considérés au théorème II, il y a une infinité qui ne contient que deux termes, et si nous désignons la suite de ces groupes (ou bien une suite partielle infinie de tels groupes) par*

$$(7) \quad T_k(s) = a_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s} + a_{n_k+1} e^{-\lambda_{n_k+1} s} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

nous pouvons affirmer que si l'on désigne par \mathfrak{D} et \mathfrak{E} les quantités

$$\mathfrak{D} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |a_{n_k}|}{\lambda_{n_k}} - \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{E} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |a_{n_k}|}{\lambda_{n_k}} - \mathfrak{H}$$

les relations suivantes seront vérifiées, quelque petit que soit le nombre positif ε ,

$$e^{-(\mathfrak{D}+\varepsilon)\lambda_{n_k}} < \lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k} < e^{-(\mathfrak{E}-\varepsilon)\lambda_{n_k}}$$

$$a_{n_k+1} = -a_{n_k}(1 + \eta_k) \quad , \quad |\eta_k| < e^{-(\mathfrak{E}-\varepsilon)\lambda_{n_k}}.$$

La démonstration de ce théorème est basée sur les mêmes principes que celle du théorème III, mais elle nécessite quelques résultats supplémentaires sur les valeurs de la fonction

$$\mathfrak{C}(\chi) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\chi^2}{l^2} \right)$$

et une étude plus précise des expressions (2). Dans les applications on choisira la suite (7) de telle sorte que \mathfrak{E} soit voisin de \mathfrak{D} , et en tout cas de telle sorte que \mathfrak{E} soit positif.

(1) G. VALIRON, loc. cit.

Matematica. — *Singularités des solutions d'une classe d'équations intégrales.* Nota ⁽¹⁾ di M. RADU BADESCO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Les équations intégrales linéaires de type Volterra et leurs généralisations dont nous nous sommes occupés récemment ⁽²⁾, se divisent en deux catégories, les équations de première espèce

$$(1) \quad \int_a^b K(\zeta, s) \Phi(\zeta s) ds = \Psi(\zeta) \quad b > a$$

et celles de seconde espèce

$$(2) \quad \Phi(\zeta) - \lambda \left\{ F(\zeta) \Phi[\theta\zeta] + \int_a^b K(\zeta, s) \Phi[\zeta s] ds \right\} = \Psi(\zeta).$$

La première ⁽³⁾ peut être en général, ramenée à la seconde en multipliant les deux membres par ζ et effectuant une intégration par parties après avoir posé

$$(3) \quad X(\zeta) = \int_0^\zeta \Phi(u) du = \zeta \int_0^1 \Phi(\zeta s) ds.$$

On trouve l'équation du type (2)

$$(4) \quad X(\zeta) - \left\{ \frac{K(\zeta, \theta)}{K(\zeta, 1)} X(\theta\zeta) + \int_0^1 \frac{K'(\zeta, s)}{K(\zeta, 1)} X(\zeta s) ds \right\} = \frac{\zeta \Psi(\zeta)}{K(\zeta, 1)}.$$

Dans nos recherches, supposant que les fonctions $F(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, et $K(\zeta, s)$ sont holomorphes autour de l'origine, nous avons pu déterminer dans le cas où il existe une solution de l'équation (2) de la forme

$$(5) \quad \Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \Phi_n(\lambda)$$

toutes les singularités de cette solution dans le plan λ . Nous ne connaissons jusqu'à présent aucune recherche concernant la détermination des singularités de $\Phi(\zeta)$ dans tout le plan ζ et nous voulons maintenant indiquer

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1930.

(2) « Bull. de la Soc. des Sciences », Cluj, Roumanie, to. V, p. 13, et « Comptes-rendus », Paris, to. 189, p. 831.

(3) On fait d'abord les changements $s = tb$ et $\zeta = \zeta'/b$.

une catégorie très simple de noyaux $K(\zeta, s)$, $F(\zeta)$ étant une constante, pour lesquels ce problème a une solution très facile à obtenir.

Rappelons d'abord que si toutes les conditions relatives à l'existence d'une solution $\Phi(\zeta)$ de la forme (4) sont satisfaites, il y a une *expression analytique* de cette solution, développable en série de Taylor autour de l'origine O_ζ , qui garde un *caractère formel* si ζ est extérieur ou sur le cercle de convergence de cette série⁽¹⁾. Donc, le problème se réduit à la recherche des singularités d'une fonction définie autour de l'origine par un élément (4), fonction qui satisfait à l'équation intégrale (1) ou (2). Pour cela, nous utiliserons les théorèmes suivants, dûs à M. J. Hadamard⁽²⁾.

THÉORÈME I. Si la fonction $K(s)$ est intégrable dans l'intervalle $(0, 1)$ de l'axe réel, la fonction

$$(6) \quad \Psi(\zeta) = \int_0^1 K(s) \Phi(\zeta s) ds$$

ne peut avoir dans tout le plan ζ d'autres points singuliers que ceux de $\Phi(\zeta)$.

THÉORÈME II. Si les fonctions $F(\zeta)$ et $\Phi(\zeta)$, holomorphes autour de l'origine, sont représentées au voisinage de ce point par les éléments

$$(7) \quad F(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \zeta^m F_m \quad \Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \Phi_n$$

la fonction $\Psi(\zeta)$, définie par l'élément

$$(8) \quad \Psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n F_n \Phi_n$$

ne peut avoir dans tout le plan ζ , d'autre point singulier que les points $\alpha\beta$, α étant l'affixe d'un point singulier de $F(\zeta)$ et β l'affixe d'un point singulier de $\Phi(\zeta)$.

M. Borel a apporté un complément précieux à ce dernier théorème⁽³⁾: la nature de la singularité de $\Psi(\zeta)$ en $\alpha\beta$ dépend exclusivement de la nature de la singularité de $F(\zeta)$ en α et de $\Phi(\zeta)$ en β . Nous aurons encore besoin de la remarque suivante: si $F(\zeta)$ a un seul point singulier α dans tout le plan ζ , tous les points singuliers β de $\Phi(\zeta)$ ont leurs affixes compris dans la relation $\beta = \frac{\gamma}{\alpha}$, γ étant l'affixe d'un point singulier de $\Psi(\zeta)$.

Équation de première espèce.

Le cas le plus simple est évidemment fourni par l'équation (6), $\Phi(\zeta)$ étant la fonction inconnue. L'expression analytique de cette solution, obtenue

(1) Voir le mémoire cité, note 2 à la p. 52.

(2) « Journal de mathématiques », to. VIII, 1832, p. 369 et « Acta mathematica », to. XXII, 1898.

(3) « Bulletin de la Société mathématique de France », to. XXVI, p. 238.

par l'intermédiaire de la relation (3), acquiert donc d'après le théorème I, un caractère effectif dans tout le plan ζ , sauf aux points singuliers de $\Psi(\zeta)$, la nature de la singularité en ces points dépendant de la nature de $\Psi(\zeta)$ aux points correspondants ainsi que de celle de la fonction définie par l'élément

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \int_0^1 K(s) s^n ds = \int_0^1 K(s) \frac{ds}{1 - \zeta s}$$

au point $\zeta = 1$.

Ces résultats s'étendent aussi à des noyaux $K(\zeta, s)$, irréductibles à la forme $M(\zeta) \cdot H(\zeta, s)$, qui sont des polynômes en ζ , $\sum_{p=0}^q \zeta^p \cdot K_p(s)$, les $K_p(s)$ étant intégrables dans $(0, 1)$. Si $K(\zeta, s)$ est de la forme mentionnée, on n'a qu'à diviser l'équation (1)⁽¹⁾ par $M(\zeta)$ et remplacer dans les résultats précédents $\Psi(\zeta)$ par $\Psi(\zeta)/M(\zeta)$. Il faudra ajouter en général le point à l'infini comme point singulier pour $\Phi(\zeta)$. La fonction auxiliaire (9) sera remplacée pour ces noyaux $K(\zeta, s)$, par la suivante:

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \int_0^1 K(\zeta, s) s^n ds = \int_0^1 \sum_{p=0}^q \zeta^p K_p(s) \frac{ds}{1 - \zeta s}.$$

Équation de seconde espèce.

Pour l'équation (2), où $F(\zeta)$ est une constante et $K(\zeta, s)$ identique à $K(s)$, le second théorème de M. Hadamard permet d'affirmer que, outre les singularités Ψ_i de $\Psi(\zeta)$ ⁽²⁾, $\Phi(\zeta)$ admet comme singularités aussi les points $\theta\Psi_i$, et la nature de la singularité en un de ces points dépend de celle de $\Psi(\zeta)$ au même point. Enfin, le même théorème permet de passer à des noyaux $K(\zeta, s)$ représentés par des polynômes en ζ .

Dans le cas de l'équation intégrale ordinaire (2), $F(\zeta) \equiv 0$, le fait que l'on peut passer de l'équation (1) à (2) par l'intermédiaire de la relation (3), nous permet de démontrer que même si $K(\zeta, s)$ est une fonction rationnelle

$$(11) \quad K(\zeta, s) = \frac{\sum \zeta^p K_p(s)}{\sum \zeta^q L_q}$$

les L_q étant des constantes, les singularités de $\Phi(\zeta)$ sont les mêmes que celles de $\Psi(\zeta)$.

Nous reviendrons dans un mémoire plus détaillé sur les extensions immédiates de ces résultats.

(1) Pour laquelle $a = 0$ et $b = 1$.

(2) Où la nature dépend de celle de $\psi(\zeta)$ au même point, ainsi que de celle de la fonction (9) au point $\zeta = 1$.

Geometria. — *Sulle linee asintotiche sopra a una superficie.*
Nota ⁽¹⁾ di M. MANARINI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

In questa Nota, applicando la nozione di parallelismo di Levi-Civita, stabilisco una condizione necessaria e sufficiente perchè una linea tracciata sopra a una superficie sia una asintotica.

Inoltre faccio vedere come certe formule che ho stabilite in un altro lavoro, si prestino assai bene alla deduzione del teorema di Enneper-Beltrami per la torsione delle asintotiche ed ancora di altri risultati interessanti, alcuni dei quali furono già ottenuti da tempo col metodo delle coordinate dal prof. Burgatti.

1. Siano $P(s)$ una linea (L) tracciata sopra la superficie (σ) , \mathbf{n} il vettore unitario normale a (σ) nei punti P di (L) , $\mathbf{t} = \frac{dP}{ds}$ il noto vettore unitario tangente alla (L) ; consideriamo la linea (L_1) , immagine della linea (L) sulla sfera (S) di raggio unitario, luogo dei punti P_1 , tali che sia

$$(1) \quad P_1 - O = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n},$$

ove O è un punto qualunque.

I due vettori \mathbf{t} ed \mathbf{n} risultano evidentemente tangenti alla sfera (S) lungo i punti di (L_1) .

Orbene: *condizione necessaria e sufficiente affinché la linea (L) di (σ) sia una asintotica è che il vettore \mathbf{n} , tangente alla sfera (S) , si sposti per parallelismo di Levi-Civita sulla sfera (S) lungo la (L_1) .*

La condizione è necessaria.

Infatti se (L) è un'asintotica di (σ) , per essa abbiamo l'equazione differenziale ⁽²⁾:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dP}(dP) \times dP = 0$$

ossia, lungo (L) ,

$$(2) \quad d\mathbf{n} \times dP = 0.$$

Osserviamo che lungo la linea (L_1) definita da (1), $d\mathbf{n}$ risulta evidentemente normale alla (S) in quanto, per la (2) è perpendicolare a \mathbf{t} che

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1930.

(2) Cfr. « Analisi vettoriale generale », vol. II, *Geometria differenziale*, BURGATTI, parte 1^a, p. 43.

è tangente ad (S), ed è inoltre perpendicolare ad \mathbf{n} , che è pure tangente ad (S). Quindi, lungo la (L_1) possiamo scrivere

$$(3) \quad d_v \mathbf{n} = 0,$$

ove d_v è il simbolo di differenziale superficiale. Per la (3) possiamo affermare⁽¹⁾ che il vettore \mathbf{n} , tangenziale alla sfera (S), qualora (L) sia una asintotica, si sposta per parallelismo di Levi-Civita lungo la (L_1) .

Viceversa, se lungo (L_1) è

$$d_v \mathbf{n} = 0,$$

ciò significa che $d\mathbf{n}$ è sempre normale ad (S) ed in particolare, per la (1), è perpendicolare a \mathbf{t} ossia a dP , lungo la (L); perciò lungo questa curva (L) abbiamo

$$d\mathbf{n} \times dP = 0,$$

ciò che dimostra essere la (L) un'asintotica di (σ) . c. d. d.

2. Data una superficie (σ) , se per un punto P qualunque, immaginiamo passanti tre linee qualunque (L_1) , (L_2) , (L) tali che (L_1) ed (L_2) si taglino ad angolo retto, e la (L) formi con (L_1) l'angolo φ , fra le flessioni normali, e le torsioni normali (flessioni e torsioni delle geodetiche tangenti) passano le relazioni⁽²⁾

$$(1) \quad \frac{1}{\rho_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_{n,1}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_{n,2}} + \sin \varphi \cos \varphi \left(-\frac{1}{\tau_{n,1}} + \frac{1}{\tau_{n,2}} \right),$$

$$(2) \quad \frac{1}{\tau_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{\tau_{n,1}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\tau_{n,2}} + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{\rho_{n,1}} - \frac{1}{\rho_{n,2}} \right).$$

Se le due linee (L_1) ed (L_2) sono di curvatura (direzioni principali), le (1) e (2) diventano

$$(3) \quad \frac{1}{\rho_n} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_2},$$

$$(4) \quad \frac{1}{\tau_n} = \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right),$$

dove $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$ sono le flessioni di queste due linee di curvatura (flessioni principali). Nel caso che la (L) sia una sezione normale la (3) è la formula di Eulero.

(1) Cfr. op. cit., BOGGIO, parte 3^a, p. 256.

(2) Cfr. questi « Rendiconti », fasc. I, 2^o sem., 1930.

In una Nota del 1896 il prof. Burgatti ⁽¹⁾ considerò in ogni piano tangente alla superficie una involuzione principale di raggi tangenti che sostanzialmente è l'involuzione definita dalla dilatazione dell'omografia $n \wedge \frac{dn}{dP}$.

Le direzioni unite, sono le *direzioni principali* o direzioni delle linee di curvatura, le *direzioni coniugate ortogonali* sono quelle che bisecano quelle principali; le direzioni asintotiche, quando esistono, dividono armonicamente le direzioni principali e perciò sono *direzioni coniugate* (in generale non ortogonali) nell'involuzione principale.

Considerando allora le due direzioni coniugate ortogonali per il punto P, bisognerà fare nelle (3) e (4), $\varphi = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ rispettivamente, onde se ne deduce che le loro flessioni normali o delle geodetiche tangenti sono uguali ed hanno il valore $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$, semisomma delle flessioni principali, e le loro torsioni normali o delle geodetiche tangenti sono uguali e di segno contrario e date precisamente da:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \text{ e } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right),$$

semidifferenze delle flessioni principali.

Più in generale consideriamo due direzioni coniugate qualunque rispetto all'involuzione principale; poichè queste dividono armonicamente i raggi uniti, gli angoli φ_1 e φ_2 che esse formano con la direzione principale (L_1) sono uguali e contrari e poniamo $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$. Ne segue dalle (3) e (4) che le loro flessioni normali sono uguali e le loro torsioni normali risultano date rispettivamente da

$$\frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \text{ e } \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right),$$

ossia sono uguali e di segno contrario.

In particolare ciò accade per le *direzioni asintotiche* essendo direzioni coniugate nell'involuzione principale come fu già ricordato. Ma per le asintotiche la torsione normale (o della geodetica tangente) coincide con la torsione ordinaria della curva stessa, perciò abbiamo:

« in ogni punto P di una superficie le asintotiche (quando esistono) hanno torsioni uguali e contrarie e date da:

$$\frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) , \quad \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right),$$

(1) Sulla torsione geodetica delle linee tracciate sopra una superficie, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », to. X, 1896.

dove $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$ sono le flessioni delle linee di curvatura per P e φ è il valore assoluto dell'angolo di ciascuna di esse forma con la linea di flessione $\frac{1}{\rho_1}$. Si ha così il teorema di Enneper-Beltrami ed una semplice espressione delle torsioni delle asintotiche. Tenendo conto, che è per cose note

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_1}},$$

moltiplicando le due espressioni trovate delle torsioni delle asintotiche si ritrova $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ ossia la curvatura totale della superficie in P.

3. Se per direzioni (L_1) ed (L_2) prendiamo le direzioni coniugate ortogonali rispetto all'involuzione principale, poichè le loro flessioni normali sono uguali a $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$ e le torsioni normali sono uguali e di segno contrario e di valore $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$, detto θ l'angolo che una linea per P forma con (L_1) , le formule (1) e (2) del numero precedente diventano

$$(1) \quad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right),$$

$$(2) \quad \frac{1}{\tau_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos 2\theta,$$

ove $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$ sono sempre le flessioni principali. Quest'ultima formula (2) è precisamente la formula (7) del prof. Burgatti stabilita nel lavoro citato.

Qui in più viene precisato il valore di $\frac{1}{T_{vg}}$ ⁽¹⁾.

Queste formule (1) e (2) danno la flessione normale e la torsione normale (o della geodetica tangente) di una qualunque curva per P, che formi un angolo θ con la direzione che biseca l'angolo delle direzioni delle linee di curvatura, in funzione di θ e delle curvature principali.

(1) V. Nota citata del prof. BURGATTI.

Astronomia. — *Sull'orbita del pianeta ultranettuniano.* Nota II ⁽¹⁾
di M. PIERUCCI ⁽²⁾, presentata dal Socio A. BEMPORAD.

Nella pagina astronomica del n. 12, luglio corr., di « Nature » è riportata una ulteriore determinazione degli elementi del Pianeta di Lowell.

Accertata ormai l'identità di questo pianeta con l'oggetto sconosciuto di Bruxelles 1927 (sulla quale identità si basano le due precedenti determinazioni del Banachiewicz e del Crommelin da me prese in considerazione nella prima Nota) e con l'oggetto sconosciuto del quale si ha traccia in quattro fotografie eseguite al Monte Wilson nel 1919, il dott. Crommelin calcola ulteriormente:

$$\begin{aligned} \text{distanza perielia} & \quad 29.706 \\ \text{eccentricità} & \quad 0.253 \end{aligned}$$

da cui si ha subito: $a = 39.77$; $\sqrt{ab} = 39.12$.

Facendo quindi la media dei tre valori finora trovati per \sqrt{ab} (40.40 Crommelin I; 39.90 Banachiewicz; 39.12 Crommelin II) si ottiene

$$\sqrt{ab} = 39.81.$$

E la tabella di p. 1092 della mia prima Nota diviene

Pianeta	Raggio equivalente calcolato	Raggio equivalente osservato	Errore relativo	Errore medio
Mercurio	$0.362 \times 1 = 0.362$	0.383	5.80 %	4.31 %
Venere	$0.362 \times 2 = 0.724$	0.723	0.14 %	
Terra	$0.362 \times 3 = 1.086$	1.000	7.92 %	
Marte	$0.362 \times 4 = 1.448$	1.516	4.70 %	
Giove	$4.95 \frac{1}{2} \times 1 = 4.95 \frac{1}{2}$	5.199	4.92 %	
Saturno	$4.95 \frac{1}{2} \times 2 = 9.91$	9.548	3.65 %	
Urano	$4.95 \frac{1}{2} \times 4 = 19.82$	19.207	3.09 %	
Nettuno	$4.95 \frac{1}{2} \times 6 = 29.73$	30.109	1.27 %	
Pianeta di Lowell	$4.95 \frac{1}{2} \times 8 = 39.64$	39.81	0.46 %	

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1930.

(2) Vedi Nota I, questi « Rendiconti », p. 1091, 1930.

Qualora poi, come sembrerebbe ragionevole, si volesse dare maggior peso all'ultima determinazione del Crommelin (che si basa insieme sulle quattro fotografie del Monte Wilson e su quella di Bruxelles) si ricaverebbe per la media pesata del raggio equivalente un valore più basso di 39.81; cioè più vicino al valore voluto dalla regola (39.64); in ogni modo il valore voluto dalla regola è compreso fra quelli dati dall'osservazione.

È interessante osservare che facendo i calcoli con le nuove misure la costante della regola per i pianeti esterni riprende proprio il valore $(4.95 \frac{1}{2})$ già prima calcolato dai soli quattro pianeti allora noti.

In conclusione la scoperta del nuovo pianeta ha reso minore l'error medio relativo alla regola già proposta in base agli altri pianeti; i nuovi dati più precisi per la sua orbita lo rendono ancora minore.

Astronomia (Cronologia matematica e tecnica). — *Sulle prime vicende della riforma giuliana del calendario*. Nota di L. CALDO⁽¹⁾, presentata dal Socio F. ANGELITTI.

1. — Sulla riforma del calendario che Cesare dittatore, nella sua qualità di Pontefice Massimo, promulgò nell'anno del suo terzo consolato (708 u.c.), non ci è pervenuto alcun documento ufficiale autentico e nessuna attestazione di contemporanei. Poche e non concordi notizie non si hanno che da scrittori posteriori di un secolo almeno, i quali sembra ne abbiano scritto raccogliendo dalla tradizione. I cronologi, dallo Scaligero fino a Ginzell, hanno potuto perciò ricostruire la riforma nelle sue fasi soltanto attraverso lavori di critica più o meno congetturale.

Il criterio informatore della riforma fu quello di portare l'anno civile a coincidere quanto più strettamente era possibile con l'anno tropico, la cui lunghezza era ritenuta di poco differente da giorni 365.25. Anche prima della riforma i Romani davano all'anno civile la lunghezza media di giorni 365.25; però raggiungevano questo valore ogni 24 anni con una compensazione salutare e complicata che non veniva neanche seguita regolarmente. Il Collegio dei Pontefici infatti ebbe facoltà di variarla, specialmente per evitare che le *nundine* coincidessero col primo gennaio, coincidenza ritenuta infausta per la repubblica.

Assumendo il sudetto valore come lunghezza dell'anno civile, Cesare stabilì che in ogni quadriennio vi fossero tre anni di 365 e un anno di 366 giorni, inserendo il giorno in eccesso nel mese di febbraio, tra le feste Terminali, che cadevano il VII kal. mart., e il Regifugium, che cadeva il VI kal. mart., onde il giorno intercalato si disse *bis VI kalendas martias*, e l'anno fu detto *bisestile*.

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1930.

2. — Sulla maniera come fu attuata nei primi anni la riforma, Solino e Macrobio⁽¹⁾ riferiscono che, dopo la morte di Cesare, i Pontefici, invece d'intercalare il bisesto ogni quattro anni, lo intercalarono ogni tre anni e che ciò fecero per 36 anni, durante il quale periodo intercalarono 12 bisesti mentre se ne sarebbero dovuti intercalare 9. Scopertosi l'errore, fu corretto da Augusto, il quale ordinò che per 12 anni non fosse intercalato alcun bisesto, affinchè fossero riassorbiti i tre intercalati in eccesso, e poi fece ripigliare l'intercalazione ogni 4 anni secondo l'ordinamento di Cesare. Plinio accenna anch'egli a 12 anni lasciati decorrere senza intercalazione, ma lascia intravedere che ciò si fece per correggere un errore riconosciuto nella stessa riforma, errore dovuto a Sosigene, il quale in tre dissertazioni non cessò di emettere dubbi, correggendo se stesso. Ciò porterebbe ad ammettere che Sosigene si fosse imbarcato in una nuova determinazione della lunghezza dell'anno tropico e che l'avesse trovata di giorni 365 e un terzo, e che, continuando poi a lavorare nella stessa ricerca per 36 anni, avesse finalmente confermato il valore già noto e assodato di giorni 365.25 e avesse indotto Augusto alla correzione. Ma tutto questo è troppo lontano dalla tradizione; il passo di Plinio conterrà una lacuna nella quale si accennava all'errore dei Pontefici. La lunghezza dell'anno tropico era nota agli Egizi; inoltre Th. Mommsen trova che presso i Romani, accanto all'anno ufficiale vi fosse un « anno agricolo » di giorni 365.25 col ciclo quadriennale di tre anni di 365 e un anno di 366 giorni, giacchè ai lavoratori della terra non poteva essere di alcun vantaggio l'anno ufficiale così vagamente oscillante; sicchè la riforma, sotto questo aspetto, non avrebbe fatto altro che rendere ufficiale un anno già in uso presso gli agricoltori.

Senonchè, da un passo di Dione Cassio, citato da Ginzel per un altro intento, si dedurrebbe che l'ordinamento di Cesare non fosse stato mai turbato, perchè dice: « nell'anno antecedente (cioè nel 713 u. c.) uomini dell'ordine equestre uccisero fiere nella battaglia equestre dei giochi di Apollo (5 luglio) e fu intercalato un giorno oltre al consueto affinchè le nundine dell'anno seguente non cadessero nelle calende di gennaio, cosa che fu diligentemente evitata sin da tempi antichi, e fu poi tolto un giorno affinchè corrispondesse il tempo all'ordinamento di Cesare ». Questa notizia escluderebbe l'intercalazione triennale.

Nella questione può gettar lume il comportamento diverso delle nundine nell'intercalazione quadriennale e nella triennale, se pur ebbe luogo.

3. — Le nundine costituivano un ciclo di 8 giorni, formato da un giorno di mercato, o nundine, seguito da 7 giorni lavorativi, dopo dei quali al nono giorno si ripresentava il giorno di mercato. Istituito ai tempi di Servio Tullio,

(1) Mi dispenso dal citare i luoghi dei vari autori di cui fo cenno, rimandando per tutti all'opera di GINZEL, *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie*, II. Bd., Leipzig, 1911.

continuò senza subire interruzione per tutta l'era romana, fino a quando fu sostituito dal ciclo settimanale adottato dai Cristiani.

Con l'intercalazione quadriennale in un intervallo di 32 anni ciascun giorno dell'anno diventa nundine 4 volte, tranne il bisesto che lo diviene una sola volta. Le date delle prime nundine di gennaio, nei 32 anni, a cominciare p. es. da un anno bisestile avente le nundine al primo gennaio, formano il ciclo descritto nella seguente tabella:

(1)	{	1 _b 1	5 _b 4	9 _b 7	13 _b 2	17 _b 5	21 _b 8	25 _b 3	29 _b 6
		2 3	6 6	10 1	14 4	18 7	22 2	26 5	30 8
		3 6	7 1	11 4	15 7	19 2	23 5	27 8	31 3
		4 1	8 4	12 7	16 2	20 5	24 8	28 3	32 6

Con l'intercalazione triennale il ciclo delle nundine si presenta diversamente. Poichè il numero dei giorni del triennio è multiplo di 8, ad ogni triennio le nundine ricadono alle stesse date, e le date delle prime nundine di gennaio sono tre soltanto, rimanendo escluse le altre cinque, e a seconda della data che si fa corrispondere all'anno bisestile, formano le 8 terne distinte indicate nel seguente quadro:

(2)	{	1 _b	1	2	3	4	5	6	7	8
		2	3	4	5	6	7	8	1	2
		3	6	7	8	1	2	3	4	5

Si vede che con le disposizioni 1^a, 4^a e 7^a ad ogni triennio le nundine cadono il 1° gennaio, mentre con le altre una tale coincidenza viene evitata in perpetuo.

Dal quadro (1) si vede che, con l'intercalazione quadriennale, Cesare superò la superstizione della ricorrenza infausta delle nundine col 1° giorno dell'anno, e la notizia di Dione Cassio fa credere che dopo la morte di Cesare fosse rifiorita questa superstizione e che i Pontefici si fossero trovati costretti a studiare il modo di evitare tale coincidenza.

4. — Intanto è storicamente accertato che nel 711 u. c. le nundine caddero il 1° gennaio e dal brano di Dione Cassio si sa che nel 714 doveva verificarsi di nuovo tale coincidenza, che fu evitata intercalando un giorno oltre il consueto nell'anno precedente e ritogliendolo poi per non alterare l'ordinamento di Cesare. Accettando la notizia per intero, si inferisce che, se i Pontefici tolsero nel 714 il giorno intercalato in più nel 713, vuol dire che la coincidenza infausta non si doveva ripresentare a breve scadenza, e cioè p. e. nel 717. Pertanto, delle 4 coincidenze che a intervalli di 3 anni si verificano all'inizio del ciclo, quelle del 711 e del 714 erano le due ultime, e quindi nel ciclo il 711 piglia il 7° posto e il 714 il 10°. Ne viene che

il 709, collocato al 5° posto, fu bisestile ed ebbe le prime nundine al 4 gennaio (1).

Ai Pontefici si poteva ripresentare la necessità di intercalare un giorno verso la fine nel 736 u. c. per evitare la coincidenza infausta negli anni 737, 740, 743, 746 dopo della quale ultima si poteva ritogliere il giorno intercalato oltre il consueto, e poi verso la fine del 768, dell'800 u. c. e così via. Ginzel infatti dice che qualche volta, sotto Claudio, la coincidenza fu evitata.

La notizia di Dione Cassio appare esatta e mostra che l'ordinamento di Cesare non fu turbato e inoltre che nell'intenzione di Cesare gli anni bisestili furono, a cominciare dal 709 u. c., quelli denotati da numeri che divisi per 4 danno per resto 1; anni che sono stati effettivamente bisestili anche dopo Augusto e fino alla correzione gregoriana.

5. — I cronologi tutti, ritenendo esatte le notizie di Solino e Macrobio, ammettono l'adozione dell'intercalazione triennale attribuendola ad errore dei Pontefici, che non avrebbero saputo interpretare le disposizioni di Cesare. Però non è credibile che un collegio di Pontefici, che insieme con Cesare collaborarono a riformare il calendario, non avessero capito la maniera di eseguire le successive intercalazioni, la quale del resto risultava evidente dalla lunghezza che veniva attribuita all'anno.

È da supporre invece che i Pontefici ad arte avessero adottato l'intercalazione triennale per evitare in perpetuo la coincidenza delle nundine col 1° gennaio. Avrebbero potuto conseguire questo intento con 5 delle 8 disposizioni nundinali indicate nel quadro (2). Ma con l'intercalazione triennale del bisesto, ogni 12 anni si sarebbe intercalato un giorno in eccesso. Per ricondurre l'anno alla lunghezza media di giorni 365.25 e per non alterare il ciclo delle date nundinali, ogni 96 anni si sarebbero dovuti sopprimere 8 giorni e la disposizione delle date nundinali sarebbe rimasta la stessa. Con le disposizioni 2^a e 6^a la correzione si sarebbe potuta effettuare ogni 48 anni con la sola soppressione di 4 giorni, con che l'una disposizione sarebbe ricaduta nell'altra. Una correzione a intervallo più breve, sopprimendo p. es. 3 giorni ogni 36 anni, oppure 2 giorni ogni 24 anni, o uno ogni 12 anni, non sarebbe stata possibile, perchè da una disposizione che evita le nundine al 1° gennaio, si sarebbe caduti in un'altra che le ammette.

Se quindi si ammette l'intercalazione triennale, si hanno diverse disposizioni per le quali risulterebbero al 1° gennaio le nundine degli anni 711 e 714, ma non regge la notizia di Dione Cassio che fosse poi stato ritolto il giorno intercalato oltre il consueto nel 713, perchè ciò avrebbe riportato

(1) Ginzel è pervenuto per altra via alla conclusione che le prime nundine del 709 u. c. caddero il 3 gennaio, però ha supposto l'anno di 365 giorni, ritenendo che il precedente anno, detto di confusione, fosse di 445 giorni, come afferma Censorino. Se invece avesse ritenuto per l'anno di confusione la lunghezza di 444 giorni assegnata da Solino, avrebbe dovuto concludere che il 709 u. c. fu bisestile con le nundine al 4 gennaio.

la coincidenza delle nundine col 1° gennaio ogni triennio, in perpetuo. Se invece il giorno non fosse stato ritolto, si sarebbe caduti in una disposizione triennale che avrebbe evitato in perpetuo la coincidenza temuta. Le disposizioni possibili sono date dal seguente specchietto, in cui è aggiunta la lettera *b* agli anni che si fossero fatti bisestili.

(3)

709 _b 4	709 4	709 3	709 _b 4
710 6	710 _b 7	710 6	710 6
711 1	711 1	711 _b 1	711 1
712 _b 4	712 4	712 3	712 4
713 6	713 _b 7	713 6	713 _b 7
714 8	714 8	714 _b 8	714 8
715 _b 3	715 3	715 2	715 3
716 5	716 _b 6	716 5	716 _b 6
717 8	717 8	717 _b 8	717 8
718 _b 3	718 3	718 2	718 3

L'ultima disposizione verrebbe da un'intercalazione non perfettamente triennale all'inizio. La prima si stabilirebbe con le date 3. 5. 8. per le prime nundine di gennaio e la terza con le date 8. 2. 5. Entrambe potrebbero essere corrette con la soppressione di 8 giorni ogni 96 anni. La seconda e la quarta disposizione si stabiliscono con le date 6. 8. 3. e potrebbero essere corrette con la soppressione di 4 giorni dopo 48 anni ricadendo nelle date 2. 4. 7.

6. In conclusione si hanno due notizie egualmente precise nei particolari e presentate con eguale sicurezza: quella di Solino e Macrobio, che affermano l'intercalazione triennale, e quella di Dione Cassio, che afferma non essere stato turbato l'ordinamento di Cesare. Solino e Macrobio vissero nei secoli iv e v dell'era cristiana e furono dei grammatici; Dione Cassio visse nel ii secolo, fu senatore, pretore, console due volte e storico di professione: a lui non si dovrebbe negar fede. Intanto i cronologi non hanno tenuto conto della notizia da lui data, pur citandola come fa Ginzel.

Ad ogni modo, si può concludere che, se l'intercalazione triennale ebbe luogo, non fu per ignoranza dei sacerdoti, ma per qualche serio intento; e quello di evitare in perpetuo la coincidenza delle nundine col primo giorno dell'anno sembra assai probabile.

Geodesia. — *Sopra alcune formule per le correzioni topografiche nei rilievi eötvössiani.* Nota ⁽¹⁾ di G. BOAGA, presentata dal Corrisp. E. SOLER.

1. In una Nota inserita in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ abbiamo trattato di un metodo di riduzione topografica per le osservazioni eseguite con la Bilancia di torsione Eötvös, esposto dal dott. A. Belluigi ⁽³⁾, e che, come quelli escogitati da altri autori, tenderebbe a sostituire quello originario dell'Eötvös medesimo.

Con la nostra Nota ci proponevamo — dopo eseguite le integrazioni rigorose delle formule fondamentali per dette correzioni, cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{x\zeta} = 3 k \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho} \int_0^{\alpha\zeta} \frac{\varrho^2 (H - \zeta) \cos \alpha \, d\alpha \, d\varrho \, d\zeta}{\sqrt{\varrho^2 + (H - \zeta)^2}} \\ \text{ed analoga per } \Delta U_{y\zeta}, \end{array} \right.$$

che possono anche mettersi sotto le forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{x\zeta} = - 3 k \sigma \sum_b \int_{\alpha_b - \tau}^{\alpha_b} A_1 \cos \alpha \, d\alpha \\ \text{ed analoga per } \Delta U_{y\zeta} \end{array} \right.$$

[per il significato dei simboli adoperati rimandiamo il lettore alla nostra Nota ⁽²⁾], e seguendo il metodo indicato dal Belluigi nella Nota ⁽³⁾ — di provare la convenienza o meno del metodo esposto, dal punto di vista geodetico e pratico.

Presentando degli sviluppi numerici e applicando le formule dedotte alle osservazioni da noi fatte in una campagna eseguita con la Bilancia, abbiamo messo in evidenza come il nuovo metodo sia per la praticità calcolativa, sia per i risultati ottenuti nei confronti pendolari, non si è mostrato preferibile a quello originario dell'Eötvös.

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1930.

(2) G. BOAGA, *A proposito di semplici e rapidi procedimenti topografici.* « Rendiconti Acc. Lincei », dicembre 1929.

(3) A. BELLUIGI, *Semplici e rapidi procedimenti topografici.* « Rendiconti Acc. Lincei », aprile 1929.

Il dott. Belluigi in una seconda Nota ⁽¹⁾ ritorna sull'argomento per dare ulteriori chiarimenti su quanto avevamo esposto; riteniamo perciò dover esporre delle nuove osservazioni in proposito.

2. La formula contrassegnata con (3) nella nostra Nota precedente, cioè

$$(3) \quad A_i = \sum_k \left\{ \frac{\rho}{3 (\rho^2 + \chi_b^2)^{1/2}} - \frac{1}{3} \log_e \frac{\rho^2 + \rho \sqrt{\rho^2 + \chi_b^2}}{\chi_b^2} \right\}^{e_k + 1} \rho_k$$

è stata ricavata, tenendo conto delle limitazioni di integrazione poste alle variabili e seguendo il procedimento indicato nella accennata Nota ⁽²⁾ del Belluigi; dunque la formula (5) della Nota ⁽²⁾ del Belluigi, con opportune correzioni di cui alcune sono già state ammesse dallo stesso, come errori di trascrizione, deve coincidere con la nostra formula (3) soprascritta.

Detta formula (3) può essere adoperata per qualsiasi pendenza e accidentalità del terreno circostante il punto stazione. Ma noi abbiamo fatto della (3) uno sviluppo in serie, perchè questo è l'unico metodo per arrivare alla seguente (6) del Belluigi, Nota ⁽²⁾,

$$(6) \quad \Delta U_{xz} = \sigma \sum [\{ (\chi_1^2 + \chi_8^2) - (\chi_4^2 + \chi_5^2) \} c_e + \{ (\chi_2^2 + \chi_7^2) - (\chi_3^2 + \chi_6^2) \} c'_e]$$

dove c_e e c'_e sono coefficienti costanti caratteristici per ogni corona circolare, e gli indici delle χ si riferiscono ad 8 azimut. Lo sviluppo in serie seguito anche da altri autori, dà una maggiore praticità calcolativa alle formule della correzione topografica.

Osserviamo poi che per tutte le nostre stazioni, tenute nei calcoli effettivi, risultarono soddisfatte le condizioni poste per lo svolgimento in serie. S'intende del resto che se per qualche settore l'arresto ai termini del secondo ordine, come si fa per le serie accennate, non fosse sufficiente, allora si applicherebbe senz'altro la (3), con l'avvertenza però che quando nelle prossimità della stazione ci sono forti accidentalità (avvallamenti, canali, ecc.) è bene fare a parte i calcoli relativi ai contributi delle stesse, con formule del resto note ⁽³⁾.

La prova sperimentale decisiva dal punto di vista geodetico per la convenienza o meno della applicabilità di formule adoperate nell'uso della Bilancia, non può essere data che dal confronto delle differenze delle componenti verticali gravimetriche ottenute mediante il pendolo.

(1) A. BELLUIGI, *Sulle correzioni topografiche nei rilievi edtvössiani*. « Rendiconti Accademia Lincei », aprile 1930.

(2) Vedi nota (3) a p. 109.

(3) E. SOLER, *Seconda campagna gravimetrica con la Bilancia nei dintorni di Padova*. (R. Commissione Geodetica Italiana 1916).

Questo difatti è il metodo di verifica non solo tenuto dall'Eötvös, ma anche da insigni altri operatori quali l'Oltay, il Sans, ecc. (1).

E questo metodo abbiamo quindi tenuto per le formule nuove del Belluigi, ottenute considerando, non come fa l'Eötvös, la reale superficie del terreno nei settori nei quali viene divisa la regione circostante il punto stazione, ma immaginando detta superficie orizzontale ed assumendo per le singole χ , differenze di livello dai punti del settore considerato al punto stazione, una χ media oppure una χ di compensazione.

Osserviamo ancora che le derivate seconde ottenute dalla Bilancia, per la nostra campagna, sono state da noi corrette oltrechè per l'effetto topografico, anche per l'effetto cartografico $(U_{xz})_k$ e $(U_{yz})_k$ e che quindi detto effetto non è stato trascurato come ritiene il Belluigi nella seconda Nota (2), mentre dovendo fare il confronto coi dati pendolari non abbiamo tenuto conto dell'effetto normale $(U_{xz})_n$ (normale Wirkung), giacchè esso non è necessario al confronto geodetico dianzi accennato.

In quanto poi alla correzione accennata dal dott. Belluigi, sotto la dizione: *correzioni topografiche invisibili dell'immediato sottosuolo, e delle strutture regionali*, osserviamo che di essa non abbiamo trovato nessun cenno nè nelle altre Note del dott. Belluigi che sono a nostra cognizione, nè nei lavori di altri operatori.

3. Concludendo quindi non dobbiamo che riaffermare quanto abbiamo esposto nella Nota precedente, anche per ciò che riguarda il vantaggio dell'originario metodo dell'Eötvös.

Per chiarire del resto tale vantaggio dal punto di vista calcolativo basta la semplice ispezione delle formule dell'Eötvös e di quelle ricavate col procedimento indicato dal dott. Belluigi e citate a pp. 580 e 579 della nostra Nota.

Si aggiunga poi, per quello che concerne le nuove formule proposte, che se per la χ relativa ad un settore non si prendesse la χ media risultante da opportune livellazioni eseguite con la stadia, ma si volesse determinare per ogni settore la χ compensata, allora, il calcolo necessario per questa determinazione renderebbe il nuovo metodo già non semplice e rapido come lo ritiene il dott. Belluigi, assai più ingombrante di quello dell'Eötvös.

(1) K. ÖLTAY, *Die Genauigkeit der mit der Eötvös'schen Drehwaage durchgeführten Relativen Schwerkraftmessungen*, Budapest 1928; H. SANS, *Dos Campañas de ensayo con la Balanza de Torsion Eötvös-Schweydar*, Madrid 1928; ID, *Investigaciones geofísicas gravimétricas*, Madrid 1930.

(2) Per le campagne fatte dall'Istituto Geodetico di Padova nel 1913-1914 le correzioni cartografiche sensibili da applicarsi si trovano segnate a p. II della Memoria dianzi accennata del prof. Soler.

Geofisica. — *Ancora sulle caratteristiche fisiche della pianura marginale appenninica modenese.* Nota ⁽¹⁾ di A. BELLUIGI, presentata dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

1. In una precedente Nota ⁽²⁾ sono pervenuto ad una relazione fra suscettività magnetica differenziale e densità differenziale delle masse profonde e mezzo incassante nella pianura marginale appenninica modenese, che ha permesso la conclusione, tenuto conto della geologia delle colline del modenese, che le masse profonde, fisicamente perturbanti, possano riferirsi ai gessi o a minerali della serie gessoso-solfifera.

Mi propongo ora di pervenire a quella stessa conclusione con un'ulteriore considerazione e di riassumere brevemente la questione al punto ora raggiunto.

2. Ricordo che il fenomeno gravimetrico osservabile nella pianura marginale modenese si manifesta come un'ampia sinclinale gravifica con l'asse parallelo o quasi all'andamento appenninico, decorrente sotto alla base delle colline marginali.

L'andamento di quest'asse potrà dare preziose indicazioni sull'età geologica della sinclinale, se si pensa che se una sinclinale profonda non si chiude esternamente ad una data struttura emergente dalla pianura, è probabile che questa poggia su quella, a meno che non si ammettano faglie.

Questo principio, incidentalmente esposto, sarebbe bene fosse applicato nell'esame stratigrafico delle sinclinali gravifiche pedemontane rilevate nella pianura padana.

L'andamento delle isogamme di gravità ha permesso di definire una speciale giacitura delle masse profonde, masse molto estese in tutte le direzioni.

Tenendo conto della speciale morfologia e dell'orientamento di queste masse è possibile calcolare U_{xz} nella stessa unità di misura delle ordinarie grandezze eötvössiane, lungo profili normali alla giacitura, risultando, in tal caso: $U_{xz} = -U_{xx}$. Così U_{xz} risulta di un ordine di grandezza media di $-22 \cdot 10^{-9}$ C.G.S., valore costante fino all'altezza di una linea di andamento medio Nord Ovest-Sud Est, linea che decorre a Sud della dislocazione gravimetrica Novi-Mirandola.

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1930.

(2) A. BELLUIGI, *Sulle caratteristiche fisiche della pianura marginale appenninica modenese*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », aprile 1930.

Ciò costituisce una piena conferma che rocce della serie gessoso-solfifica si trovino in profondità, non potendosi giustificare $U_{\pi\pi} < 0$ se non con l'ammettere, appunto, in profondità, rocce meno dense delle ricoprenti.

3. Stabilita così la natura delle masse profonde, occorre conciliare quantitativamente le distribuzioni delle grandezze fisiche osservate con quelle calcolate.

Si è cercato, in un primo tempo di interpretare il fenomeno ⁽¹⁾ facendo intervenire influenze isostatiche, effettuando la correzione isostatica dei dati gravimetrici e modificando, conseguentemente, la distribuzione delle isogamme di gravità. Senonchè se con ciò si può pervenire ad una soluzione quantitativa del problema si è sempre ben lontani dallo stabilire il significato geologico dei risultati. Alla stessa soluzione quantitativa si perviene ammettendo ora, (in conseguenza dei nuovi risultati ottenuti), che le rocce della serie gessoso-solfifera si immergano e prolunghino per lungo tratto verso Nord, sotto alla pianura padana.

Questa nuova interpretazione è in accordo quantitativo con quella dedotta con la teoria isostatica, è in accordo con l'andamento della distribuzione regionale del geomagnetismo, con la deduzione riguardante la correlazione tra suscettività magnetica e densità, e con i profili che danno $U_{\pi\pi} < 0$; è in accordo con la distribuzione dei gradienti orizzontali osservati.

Circa l'andamento della distribuzione regionale del geomagnetismo è bene che aggiunga, a quelle già date nelle mie due Note ⁽¹⁾, ⁽²⁾, qualche altra notizia.

Riferendomi alla carta di distribuzione dei disturbi locali magnetici (componente verticale) in Europa del Nippoldt, si nota un certo parallelismo tra anomalie magnetiche e gravimetriche, almeno in molti settori della valle padana.

La carta del Nippoldt non può essere però, per una quantità di ragioni, eccessivamente esatta, e l'osservazione è stata pure fatta, di recente, anche dal Reich, a proposito di qualche anomalia magnetica rilevata nella stessa Germania.

Per questo eseguii, con variometri Schmidt, un rilievo magnetico regionale, di circa 650 Km² da Cavriago (Reggio) a Casalecchio di Reno (Bologna), dal margine appennino alla via Emilia, in modo da poter tracciare, con equidistanza di 10 γ le isodiname della componente verticale.

Più che la finalità di eventuali indicazioni di disturbi magnetici locali tenni presente quella di poter ottenere, con esattezza, una configurazione magnetica regionale, indipendentemente dalle indicazioni sommarie della carta magnetica del Nippoldt.

Ora le isodiname della componente verticale, secondo una nota formola di Bauer (campo omogeneo terrestre) risultano nella zona in esame, di Reggio-Bologna, inclinate di circa 70° Est rispetto al N. a., mentre quelle osservate

(1) A. BELLUIGI, *Caratteristiche fisiche fondamentali della pianura padana*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », luglio 1929.

risultano, oltre che ondulate, come è inevitabile, maggiormente inclinate, da 80° a 90° Est rispetto al N. a.

Si nota dunque una deformazione regionale del campo di Z rispetto al campo omogeneo, astrazione fatta di ciò che è stato definito disturbo regionale europeo, (disturbo riguardante soprattutto l'intensità della componente verticale), minore di quella corrispondente al campo omogeneo della Terra.

Questa posizione reciproca delle isodinamie osservate rispetto a quelle teoriche è da mettere in relazione con l'orientamento delle isogamme di gravità, inclinate in media più di 110° Est rispetto al N. a., il che rivela l'influenza di una stessa causa deformante le distribuzioni normali di gravità e di magnetismo osservate in superficie, anche per la rotazione delle isogamme magnetiche (osservate) verso le isogamme gravimetriche.

Meteorologia. — *Sul moto delle masse d'aria nell'atmosfera* ⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ di M. LOMBARDINI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

Recentemente il chiaro prof. Jaumotte, in una Memoria che porta questo stesso titolo ⁽³⁾, stabilisce con nuova dimostrazione una relazione fondamentale nella dinamica atmosferica.

La formula a cui perviene lo Jaumotte è la seguente ⁽⁴⁾:

$$(1) \quad N = \frac{dC_r}{dt} + \left(2\omega_x \frac{dS'}{dt} + 2\omega_y \frac{dS''}{dt} + 2\omega_z \frac{dS'''}{dt} \right)$$

dove:

N è il numero dei solenoidi *isobari-isosteri* abbracciati da una curva chiusa qualsiasi;

C_r è la circuitazione della velocità lungo la curva chiusa s ;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ sono le tre componenti della rotazione terrestre rispetto a un sistema cartesiano x, y, z ortogonale fisso rispetto alla terra;

S', S'', S''' misurano le proiezioni sui tre piani coordinati $(x, y), (x, z), (z, y)$ della superficie contornata da s .

La dimostrazione dello Jaumotte è alquanto laboriosa perciò il prof. Eredia ci consigliava di ricavare la formula in modo più breve e sintetico facendo uso del calcolo vettoriale; è questo lo scopo del presente lavoro.

(1) Lavoro eseguito all'Ufficio Presagi.

(2) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1930.

(3) *Sur le mouvement des masses d'air dans l'atmosphère*, « Académie Royale de Belgique de la Classe des Sciences », 5^a série, to. XV, n. 12, pp. 1018-1035.

(4) Op. cit., p. 1031.

§ 1. L'equazione di una massa fluida in movimento è ⁽¹⁾:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

dove \mathbf{v} è la velocità di ciascuna particella di fluido, p è la pressione, \mathbf{F} sono le forze che agiscono sul fluido riferite all'unità di massa. Se la forza è rappresentata dalla sola gravità \mathbf{g} , è

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Supponiamo che la velocità sia data in funzione della velocità \mathbf{u} relativa alla terra e indichiamo con $\boldsymbol{\omega}$ la rotazione terrestre. Abbiamo ⁽²⁾

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$$

e quindi

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

e anche

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} - \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Poichè, se s è un contorno chiuso qualsiasi, è ⁽³⁾ $N = - \int_s \frac{1}{\rho} \text{grad } p \times d\mathbf{P}$ sarà pure

$$(2) \quad N = - \int_s \mathbf{g} \times d\mathbf{P} + \int_s 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \times d\mathbf{P} + \int_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times d\mathbf{P}.$$

Venendo al calcolo dei tre integrali del secondo membro abbiamo anzitutto

$$\int_s \mathbf{g} \times d\mathbf{P} = 0$$

perchè \mathbf{g} dipende da un potenziale monodromo.

(1) Confronta per es. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Elementi di calcolo vettoriale*, Bologna, 2ª ediz., p. 192.

(2) Confronta per es. BURGATTI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Bologna, 2ª edizione, p. 349.

(3) V. BJERKNES, *On the dynamics of the circular vortex with applications to the atmosphere and atmospheric vortex and wave motions*, « Geofysiske Publikationer », vol. II. n. 4, Kristiania 1921, p. 8.

$$\text{Inoltre } \int_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times d\mathbf{P} = \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{u} \times d\mathbf{P} - \int_s \mathbf{u} \times d\mathbf{u} \text{ perchè } \frac{d}{dt} d\mathbf{P} = d\mathbf{u}$$

ma è $\mathbf{u} \times d\mathbf{u} = \frac{1}{2} d\mathbf{u}^2$, e perciò, il suo integrale lungo una linea chiusa è nullo. Quindi:

$$\int_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times d\mathbf{P} = \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{u} \times d\mathbf{P} = \frac{dC_r}{dt} \quad (\text{Teorema di Lord Kelvin})$$

dove C_r conserva il significato che già le abbiamo dato.

Abbiamo

$$\int_s 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \times d\mathbf{P} = \int_s 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \wedge d\mathbf{P} = 2\boldsymbol{\omega} \times \int_s \mathbf{u} \wedge d\mathbf{P}$$

analogamente a quanto abbiamo calcolato dianzi possiamo scrivere

$$\int_s \mathbf{u} \wedge d\mathbf{P} = \frac{d}{dt} \int_s (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge d\mathbf{P} - \int_s (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge d\mathbf{u}$$

dove \mathbf{O} è un punto fisso rispetto alla terra. Ma

$$(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge d\mathbf{u} = d[(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{u}] + \mathbf{u} \wedge d\mathbf{P}$$

perciò è

$$\int_s (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge d\mathbf{u} = \int_s d[(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{u}] - \int_s \mathbf{u} \wedge d\mathbf{P} = \int_s \mathbf{u} \wedge d\mathbf{P}$$

e quindi

$$2 \int_s \mathbf{u} \wedge d\mathbf{P} = \frac{d}{dt} \int_s (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge d\mathbf{P}.$$

Ma per una nota formula, conseguenza del teorema di Stokes⁽¹⁾, è

$$\int_s (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge d\mathbf{P} = \int_s \left\{ \operatorname{div}(\mathbf{P} - \mathbf{O}) - K \frac{d\mathbf{P}}{dP} \right\} \mathbf{n} d\sigma = \int_s (3 - 1) \mathbf{n} d\sigma = 2 \int_s \mathbf{n} d\sigma$$

intendendosi l'integrale superficiale esteso alla superficie contornata da s ed indicando con \mathbf{n} il vettore unitario parallelo alla normale dell'elemento superficiale $d\sigma$. Ponendo

$$\int_s \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{S}$$

(1) Confronta per es. BURGATTI, op. cit., p. 460.

(2) Confronta BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale*, Bologna 1920, vol. I, p. 242, formula [2].

abbiamo

$$\int \mathbf{u} \wedge dP = \frac{d\mathbf{S}}{dt} \quad \text{e} \quad 2\boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{u} \wedge dP = 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt}.$$

Sostituendo i valori trovati nella (2) abbiamo

$$(3) \quad N = \frac{dC_r}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt}.$$

§ 2. Questa formula coincide colla (1) perchè, preso un sistema di vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ unitario-ortogonale abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \int \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{i} \times \int \mathbf{n} d\sigma \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \int \mathbf{n} d\sigma \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \times \int \mathbf{n} d\sigma \cdot \mathbf{k} = \int \mathbf{i} \times \mathbf{n} d\sigma \cdot \mathbf{i} + \\ &+ \int \mathbf{j} \times \mathbf{n} d\sigma \cdot \mathbf{j} + \int \mathbf{k} \times \mathbf{n} d\sigma \cdot \mathbf{k} = \int dy dz \cdot \mathbf{i} + \int dx dz \cdot \mathbf{j} + \int dx dy \cdot \mathbf{k} = \\ &= S'' \mathbf{i} + S' \mathbf{j} + S' \mathbf{k} \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

quindi

$$2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt} = 2\omega_z \frac{dS'}{dt} + 2\omega_y \frac{dS''}{dt} + 2\omega_x \frac{dS'''}{dt}$$

serbando le notazioni dello Jaumotte. La formula (3) si presta perciò allo studio di tutti i casi particolari considerati dallo Jaumotte, che ci sembra superfluo riportare.

§ 3. Possiamo invece estendere ad un caso molto generale, la condizione del moto *barotropo*, trovata dallo Jaumotte in un caso speciale. Il moto è barotropo quando $N = 0$. Se supponiamo $\frac{dC_r}{dt} = 0$ deve perciò essere $2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt} = 0$ o anche $2\boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{u} \wedge dP = 0$.

Per una formula già ricordata⁽¹⁾ possiamo scrivere

$$2\boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{u} \wedge dP = 2\boldsymbol{\omega} \times \int \left\{ \operatorname{div} \mathbf{u} - K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \right\} \mathbf{n} d\sigma.$$

(1) Vedi nota (2) p. 116.

Se supponiamo $\text{div } \mathbf{u} = 0$, e se abbiamo presente la definizione dell'operatore K , otteniamo

$$2 \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt} = - \int_{\sigma} 2 \boldsymbol{\omega} \times K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\sigma} 2 \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{u}}{dP} \boldsymbol{\omega} d\sigma = - \int_{\sigma} 2 \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{u}}{d\boldsymbol{\omega}} d\sigma.$$

Perchè sia $N = 0$ occorre che sia $\frac{d\mathbf{u}}{d\boldsymbol{\omega}} = 0$. Da ciò risulta che *quando* $\frac{dC_r}{dt} = 0$ e $\text{div } \mathbf{u} = 0$ *condizione necessaria e sufficiente perchè la massa di aria si muova di moto barotropo è che si abbia* $\frac{d\mathbf{u}}{d\boldsymbol{\omega}} = 0$, *cioè occorre che, in ogni istante, tutti i punti di ciascuna parallela all'asse terrestre abbiano la stessa velocità relativa. In particolare perciò all'equatore* \mathbf{u} *dovrebbe essere costante lungo le rette parallele al suolo, mentre al polo dovrebbe essere costante lungo le rette normali al suolo.*

§ 4. Rientra in queste considerazioni il teorema dimostrato dallo Jaumotte, nella prima parte della sua memoria, relativo ad una massa di aria in moto permanente rispetto al suolo, tale che le linee di flusso siano delle rette orizzontali parallele e che la velocità sia uniforme per una stessa linea di flusso. Ciò si può esprimere ponendo

$$\mathbf{u} = u \mathbf{i} \quad \frac{du}{dP} \mathbf{i} = 0.$$

Per i calcoli del § 1 abbiamo

$$\mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{i} \times \int_s u \mathbf{i} \wedge dP = \int_s u \mathbf{i} \times \mathbf{i} \wedge dP = 0$$

perciò se indichiamo con $\boldsymbol{\omega}'$ la componente di $\boldsymbol{\omega}$ normale ad \mathbf{i} , cioè se poniamo

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega}'$$

viene

$$2 \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{S}}{dt} = 2 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} - \boldsymbol{\omega}') \times \frac{d\mathbf{S}}{dt} = 2 \boldsymbol{\omega}' \times \frac{d\mathbf{S}}{dt}.$$

Se indichiamo con $\frac{dS}{dt}$ la proiezione di $\frac{d\mathbf{S}}{dt}$ su $\boldsymbol{\omega}'$ ritroviamo la formula dello Jaumotte ⁽¹⁾

$$N = 2 \boldsymbol{\omega}' \frac{dS}{dt}$$

(1) JAUMOTTE, op. cit., p. 1027.

Possiamo applicare i calcoli del § 3 perchè è $\frac{dC_r}{dt} = 0$, $\text{div } \mathbf{u} = 0$ come risulta ovviamente dalle formule fondamentali fra i vettori. Infatti ⁽¹⁾

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{u} = u \frac{du}{dP} \mathbf{i} = 0 \quad \frac{dC_r}{dt} = \int_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times dP = 0$$

$$\text{div } \mathbf{u} = \text{div } u \mathbf{i} = u \text{ div } \mathbf{i} + \text{grad } u \times \mathbf{i} = \text{grad } u \times \mathbf{i} = \frac{du}{dP} \mathbf{i} = 0.$$

Dal § 3 risulta che, nelle ipotesi poste, sarà $N = 0$ solo quando \mathbf{u} sia costante per ogni retta parallela ad ω e perciò, nel caso speciale considerato, per ogni piano parallelo al piano di ω , \mathbf{u} e quindi anche al piano di ω' e \mathbf{u} , ed appunto sotto questa forma ⁽²⁾ lo Jaumotte enuncia il suo teorema.

Fisica. — *Sulla determinazione della tensione del vapore sul ghiaccio a temperature basse.* Nota ⁽¹⁾ di C. DEI, presentata dal Socio A. LO SURDO.

1. Scopo di questa Nota è di mostrare che la tensione del vapore d'acqua sul ghiaccio possa essere determinata con un metodo fondato su un principio assolutamente differente da quelli che sono stati applicati nelle determinazioni sperimentali sino ad ora fatte e cioè quelle di Scheel e Heuse ⁽⁴⁾, Nernst ⁽⁵⁾, Weber ⁽⁶⁾, Washburn ⁽⁷⁾.

In questo nuovo metodo si incomincia col determinare i valori del potenziale esplosivo, in un tubo di scarica, corrispondenti a diversi valori noti della densità del vapor d'acqua che riempie il tubo: i valori così trovati si rappresentano in un diagramma riportando sulle ascisse la densità e sulle ordinate i potenziali.

Fatta questa determinazione si introduce una piccola quantità di acqua nello stesso tubo di scarica adoperato prima, quantità sufficiente per mantenere saturo di vapore lo spazio interno del tubo a tutte le temperature

(1) Confronta BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Analisi vettoriale ecc.*, op. cit., p. 182, p. 179.

(2) Veramente l'A. a p. 1022 enuncia questa condizione così: « dans tous les plans perpendiculaires aux lignes h », le quali linee sono parallele a ω , ma ovviamente si tratta di un errore di stampa.

(3) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1930.

(4) « Annal. der Phys. », 29, 1909.

(5) « Verh. d. D. Phys. Ges. », 12, 1910.

(6) « Communic. from the Phys. Labor. of the Univ. of Leiden », 150, 1915.

(7) « Monthly Weather Review », 52, 488, 1924.

alle quali si esperimenta. Il tubo viene quindi immerso in un bagno opportuno in modo da poter variare la sua temperatura molto lentamente. Si determina così la temperatura alla quale avviene la scarica quando tra gli elettrodi si mantiene una determinata, costante differenza di potenziale scelta opportunamente nel campo delle differenze di potenziale che avevano prodotto la scarica nella prima serie di esperienze.

E poichè il potenziale esplosivo è funzione della sola densità dell'aeriforme che si trova fra gli elettrodi⁽¹⁾, qualunque sia la temperatura dell'aeriforme stesso, confrontando i risultati delle due serie di esperienze si può evidentemente ottenere la densità del vapor d'acqua alle diverse temperature. Basta infatti ricavare dal diagramma ottenuto colla 1^a serie di esperienze la densità corrispondente al potenziale costante che nella 2^a espe-

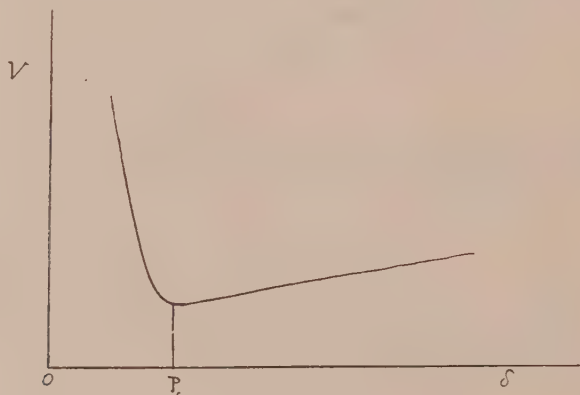


Fig. 1.

rienza ha prodotto la scarica quando la temperatura assumeva un certo valore, per ottenere così la densità del vapor d'acqua saturo a quella stessa temperatura.

Dai valori delle densità si passa poi alle tensioni massime colle note leggi dei gas.

Il diagramma avrà la forma ben nota (fig. 1) che mette in evidenza la densità critica $\delta_c = \overline{OP}_c$ alla quale corrisponde il minimo valore del potenziale esplosivo. E siccome la curva $V = V(\delta)$ è molto più ripida al disotto della densità critica che non al disopra, ne viene che a parità di errore nella valutazione del potenziale, gli errori corrispondenti che si hanno nella determinazione della densità sono più piccoli al disotto che non al disopra della densità critica. Possiamo realizzare facilmente la condizione necessaria per operare al disotto della densità critica (in un certo campo

(1) Cfr. per es. il trattato di TOWNSEND, *Electricity in gases*.

delle densità): basta per questo tener presente la legge approssimata che il prodotto della densità critica per la lunghezza della scintilla è costante e scegliere così la più opportuna distanza fra gli elettrodi.

2. Nella 1^a serie di esperienze si parte da un valore noto della densità del vapor d'acqua, opportunamente scelto per il tubo a scarica adoperato e poi con successive espansioni si ottengono altri valori opportuni della densità.

La fig. 2 rappresenta schematicamente la disposizione adoperata. Il tubo a scarica di volume noto V_c comunicava con una fiasca di volume pure noto V_F e con una moderna pompa a diffusione. La fiasca era in comunicazione poi con un recipiente contenente dell'acqua distillata attraverso ad

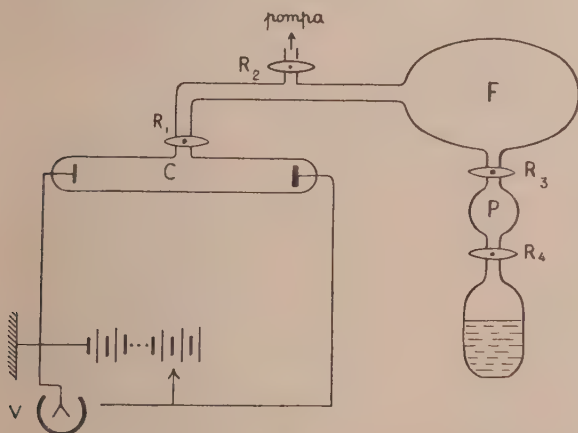


Fig. 2.

un palloncino di volume V_p . Lasciando aperti i rubinetti R_1, R_2, R_3 si faceva il vuoto nel sistema C, F, P. Chiudendo allora R_3 ed aprendo R_4 , nel palloncino P penetrava del vapor d'acqua proveniente dal recipiente contenente l'acqua (temperatura centigrada t').

Manovrando opportunamente i rubinetti si possono fra l'altro realizzare facilmente i valori seguenti delle pressioni del vapor d'acqua dentro il tubo di scarica:

$$p' = p'_0 \cdot \frac{V_p}{V_c + V_F + V_p}; \quad p'' = p' \cdot \frac{V_p}{V_c + V_F + V_p}; \quad p''' = p'' \cdot \frac{V_c}{V_c + V_F}$$

ove p'_0 rappresenta la tensione massima alla temperatura t' .

Siccome nelle mie esperienze era $V_c = 275 \text{ cm}^3$, $V_F = 908 \text{ cm}^3$, $V_p = 40.5 \text{ cm}^3$ e la temperatura dell'acqua risultò $t' = 22^\circ.7$ corrisponden-

temente alla quale si ha il valore base $p' = 20.69$ mm. Hg, facendo i calcoli si hanno i seguenti valori di p' , p'' , p''' in mm. di mercurio:

$$p' = 0.685 \quad ; \quad p'' = 0.0226 \quad ; \quad p''' = 0.00527.$$

In questo lavoro preliminare ho studiato tre soli punti della curva $V = V(\delta)$ e per questo la 1^a serie di esperienze consiste nella determinazione dei potenziali V' , V'' , V''' corrispondenti ai valori p' , p'' , p''' .

Per fare queste misure ho usato dei voltmetri elettrostatici ed una batteria di piccoli accumulatori coi quali potevo disporre di differenze di potenziale sino a 10000 Volta.

Con uno speciale artificio variavo in modo continuo il potenziale applicato agli elettrodi; così ho trovato i tre valori corrispondenti seguenti

$$V' = 1220 \text{ Volta}, \quad V'' = 860 \text{ Volta}, \quad V''' = 9000 \text{ Volta}.$$

La pressione critica risultò compresa fra p' e p'' .

Nella 2^a serie di esperienze siccome mi era necessario l'uso della pompa e dovevo essere sicuro della sua efficienza in ogni istante, ho creduto opportuno sostituire al sistema F, P (che non mi era più necessario) un secondo tubo a scarica, provando con esso frequentemente la rapidità con cui la pompa effettuava il vuoto. La 2^a serie di esperienze furono fatte immergendo totalmente il 1^o tubo a scarica (cioè quello con il quale abbiamo fatto la 1^a esperienza ed in cui abbiamo introdotto un po' di acqua distillata) in un recipiente Dewar contenente della neve carbonica sciolta in alcool. A seconda della maggiore o minore quantità di neve disciolta si possono avere temperature variabili del bagno (sino a circa -70°). A questa bassa temperatura si apriva il rubinetto R_1 a diverse riprese in modo da togliere qualche eventuale residua traccia di aria e non lasciarvi, richiudendolo, che il solo vapore dovuto al ghiaccio formatosi sul fondo del tubo. Della sicurezza di avere raggiunto queste condizioni ci era d'ausilio naturalmente anche il secondo tubo.

Si chiudeva allora il rubinetto R_1 e si applicava fra gli elettrodi una tensione esattamente eguale a $V_3 = 9000$ Volta. Nel tubo adoperato in cui la distanza fra gli elettrodi era di circa 20 cm. non passava la scarica alla temperatura di -70° ; però aumentando lentissimamente la temperatura del bagno si trova che alla temperatura $-t_3 = -66^\circ$ circa la scarica ha inizio (il termometro ad alcool adoperato è stato controllato alla temperatura di solidificazione del cloroformio che è -63.5°). Ciò vuol dire che la densità del vapor d'acqua a -66° è uguale alla densità del vapore che si ha nella 3^a osservazione della esperienza preliminare.

In modo analogo abbiamo trovato $-t_2 = -55^\circ$; $-t_1 = -22.3$ come valori della temperatura corrispondenti ai valori V_2 , V_1 del potenziale esplosivo.

Qualche altro valore è stato pure sperimentato: e da esso risulta in modo regolare ed evidentissimo che da -55° a -63° circa il potenziale cresce lentamente, mentre da -63° a -66° cresce con rapidità sempre maggiore denotando così che abbiamo già passato di molto la densità critica.

3. Guardiamo ora come le 3 temperature determinate permettono di calcolare le corrispondenti tensioni massime. Perciò se p_{-t} rappresenta la tensione massima a $-t$ gradi centigradi e con $p_{-t}^{(t')}$ indichiamo la pressione che la stessa massa di vapore avrebbe (restando invariato il volume) a t' gradi centigradi (non essendo più naturalmente in contatto col ghiaccio), avremo:

$$p_{-t} = c \cdot \delta \cdot (273 - t)$$

$$p_{-t}^{(t')} = c \cdot \delta \cdot (273 + t')$$

e quindi

$$(1) \quad \frac{p_{-t}}{p_{-t}^{(t')}} = \frac{273 - t}{273 + t'}$$

Ma poichè

$$p_{-22.7}^{(22.7)} = p' \quad , \quad p_{-55}^{(22.7)} = p'' \quad , \quad p_{-66}^{(22.7)} = p'''$$

in base alla (1) possiamo ricavare i valori $p_{-22.7}$; p_{-55} ; p_{-66} (purchè si conosca $p_{22.7}$ come abbiamo già osservato).

Siccome $p_{22.7} = 20.69$ mm. facendo i calcoli colla (1) risulta:

$$p_{-22.7} = 0.58 \text{ mm.} \quad ; \quad p_{-55} = 0.0166 \text{ mm.} \quad ; \quad p_{-66} = 0.0037 \text{ mm.}$$

Se $\delta_{-t_1}, \delta_{-t_2}, \dots$ sono le densità del vapor saturo alle temperature $(-t_1), (-t_2), \dots$ un facile calcolo mostra che:

$$\frac{\delta_{-t_1}}{\delta_{-t_2}} = \frac{p_{-t_1}^{(t'_1)}}{p_{-t_2}^{(t'_2)}}$$

e quindi in particolare:

$$(2) \quad \frac{\delta_{t'}}{\delta_{-t}} = \frac{p_{t'}}{p_{-t}^{(t')}}.$$

Se quindi oltrechè conoscere la tensione massima $p_{t'}$ alla temperatura t' conosciamo anche la densità $\delta_{t'}$ del vapore saturo alla stessa temperatura, la (2) in base ai valori di $p_{-t}^{(t')}$ (ossia p', p'', p''', \dots) e di $(-t)$ (ossia $(-t_1), (-t_2), (-t_3), \dots$), trovati col metodo presente, permette di ricavare δ_{-t} .

Osserviamo ora che le diverse cause di errore sono: misura delle temperature, misura del potenziale esplosivo e fenomeno del lag (ritardo nel-

l'iniziarsi della scarica), misura dei volumi delle diverse parti dell'apparecchio ecc.

L'errore massimo di temperatura nelle mie esperienze può precisarsi dicendo $\frac{3}{10}$ di grado. L'errore principale nella misura dei volumi è quello relativo al palloncino: è da ritenersi non eccedere 0.2 cm^3 a cui corrisponde un errore appena superiore a $\frac{1}{10}$ grado. Infine l'incertezza nella determinazione del potenziale è di circa 100 Volta per i potenziali attorno ai 9000 Volta; e siccome nelle vicinanze di questo valore il potenziale varia di circa 3000 Volta variando di un grado la temperatura, ne viene che l'ordine di grandezza dell'errore dovuto a questa 3^a causa è di $\frac{1}{30}$ grado. Tutto sommato quindi l'errore non può essere superiore ai $\frac{4}{10}$ di grado.

Risultano dunque in definitiva i seguenti tre valori:

$$p_{-22.3} = 0.58 \pm 0.023$$

$$p_{-55} = 0.0166 \pm 0.0008$$

$$p_{-66} = 0.0037 \pm 0.0002$$

e quindi possiam concludere che i valori trovati col metodo presente concordano abbastanza bene coi valori trovati dagli altri autori (come può osservarsi consultando le tabelle di Landolt).

Il metodo che abbiamo esposto si presenta soprattutto sensibile operando al disotto della densità critica, ed è suscettibile di una maggiore precisione col ridurre ulteriormente le cause di errore.

Esso può evidentemente essere applicato anche alla determinazione della tensione di vapore di altre sostanze.

Fisica. — *Ricerca di un analogo termico dell'effetto Barkhausen* ⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ di B. DEL NUNZIO, presentata dal Corrisp. A. AMERIO.

Il processo della magnetizzazione nelle sostanze ferro-magnetiche avviene in maniera discontinua; il fatto era conosciuto nella tecnica radiotelegrafica, dove esso era considerato come un disturbo nell'uso del detector magnetico di Marconi; ma si deve al Barkhausen (1919) l'inizio di ricerche sistematiche sul fenomeno, che perciò prese nome da lui. Soprattutto con il potente aiuto dato dalla moderna tecnica degli amplificatori a triodi è stato possibile rilevare, mediante le correnti indotte in solenoidi, di cui le sostanze in esperimento costituivano il nucleo, le brusche variazioni della magnetizzazione progressiva ed accertare ch'esse si producono nelle parti irreversibili del ciclo di isteresi ad opera del rovesciamento degli elementi magnetici contenuti nei campi elementari. Quegli elementi, orientandosi come comanda il campo esterno, mettono in vibrazione il nucleo ed alla loro volta le vibrazioni producono modificazioni della magnetizzazione, che si traducono in impulsi di induzione irregolari (W. Gerlach e P. Lertes).

Nelle ricerche più recenti è stato possibile mettere in evidenza e misurare discontinuità corrispondenti al rovesciamento della magnetizzazione di gruppi di 10^{10} atomi, cioè di circa 10^{-13} cm.³ di materia.

In due lavori precedenti ⁽³⁾ ho studiato alcuni caratteri di queste discontinuità in molte sostanze ferromagnetiche e specialmente nel nichel, trattato meccanicamente nella maniera indicata dal Forrer. Questo trattamento sembrava dare alle particelle elementari della sostanza una organizzazione particolare, a cagione della quale nel ciclo di isteresi risultavano nettamente separate le parti reversibili da quelle irreversibili ed in queste il processo della magnetizzazione si compiva sicuramente per grandi salti, i quali raggiungevano ordinariamente ampiezze eguali alla decima parte della magnetizzazione totale.

L'aumento della temperatura non turbava quella organizzazione ed io ho potuto registrare brusche variazioni portando il materiale in esame a temperature anche elevate.

In questa nota dò conto di alcuni tentativi che feci per mettere in evidenza un analogo termico dell'effetto Barkhausen. La conservazione delle proprietà caratteristiche del nichel trattato nella maniera speciale anche a

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica Applicata della R. Scuola d'Ingegneria di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1930.

(3) «Atti R. Istituto Veneto Lettere Scienze ed Arti», 1928, p. 941; «N. C.», 1930.

temperature prossime al punto di Curie mi indusse a studiarne il comportamento variando in maniera continua la temperatura e mantenendo invece costante il campo magnetizzante. L'annullarsi della magnetizzazione nel filo per effetto del riscaldamento oltre il punto di Curie o viceversa lo stabilirsi di quella magnetizzazione per effetto del raffreddamento si sperava avvenisse in maniera discontinua, per grandi o piccoli salti a seconda del particolare stato della sostanza.

Esperimenti per estendere in altri campi l'effetto Barkhausen variando il valore di altre grandezze, da cui dipende la magnetizzazione dei corpi ferromagnetici, non sono mancati. Mc Keehan⁽¹⁾ trovò che gli assi atomici risultano orientati secondo una direzione particolare in un materiale magnetico, che si trovi in istato di tensione meccanica: variando questo stato il corrispondente cambiamento nella orientazione avviene in maniera discontinua rivelando un effetto Barkhausen meccanico. Sperimentalmente il fatto si mette in evidenza con i metodi impiegati per lo studio dell'effetto magnetico; secondo Tyndall⁽²⁾ esiste una differenza fondamentale tra i due effetti: mentre quello magnetico produce in una bobina indotta impulsi di tensione unidirezionali, quello meccanico invece produce sempre impulsi in tutte le direzioni. Il prof. Cantone si è occupato di questo effetto meccanico; ma non mi risulta che abbia reso pubblici i risultati delle sue esperienze.

L'insieme degli apparecchi, di cui mi servii per questa ricerca fu quello già descritto; le lievi modificazioni per produrre il riscaldamento del materiale in esame non mutarono sostanzialmente il metodo della ricerca e i mezzi per la registrazione delle brusche variazioni.

Nell'interno di una delle due spirali magnetizzanti fu posta una seconda bobina fatta con conduttore di nichel-cromo isolato, avvolto a filo doppio in maniera che la corrente destinata alla produzione di calore percorresse ogni strato dell'avvolgimento nei due sensi. Avendo avuto cura nella costruzione di questa bobina, potei verificare sul magnetometro che la sua azione magnetica era veramente nulla; dentro di essa era poi posto il filo di nichel da provare.

L'andamento di ogni esperimento è facile ad immaginare: mandata la corrente di valore costante nelle bobine magnetizzanti si chiudeva successivamente il circuito del riscaldatore di nichel-cromo. Dopo alcuni minuti la temperatura nelle immediate vicinanze del filo di nichel raggiungeva i 400° C e li poteva anche sorpassare.

Come nella ricerca precedente, una pila termoelettrica misurava quella temperatura: la corrente, da essa generata, passava attraverso un galvanometro, che rifletteva sulla carta fotografica il fascetto di raggi luminosi pro-

(1) « Phys. Rev. », 1926.

(2) « Phys. Rev. », dicembre 1927.

veniente dallo specchietto del magnetometro. Siccome la deviazione di questo era verticale e quella del galvanometro era invece orizzontale, si poteva ottenere sulla carta fotografica due tracce rettilinee perpendicolari tra loro, se le deviazioni si facevano avvenire separatamente. Dopo le prime prove e i miglioramenti apportati nella installazione degli apparecchi la regolarità

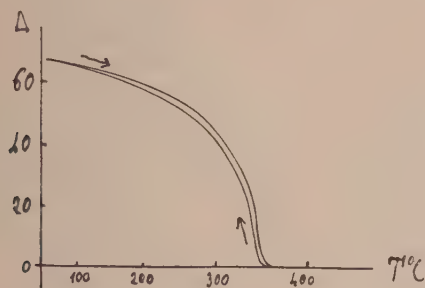


Fig. 1.

della registrazione era quasi perfetta. La fig. 1 mostra la variazione con la temperatura della magnetizzazione del nichel avuto dal commercio: è la curva assai nota che non rivela nulla di nuovo tranne una leggera isteresi tra i due tempi di riscaldamento e di raffreddamento. Il punto di Curie è circa 357°C .

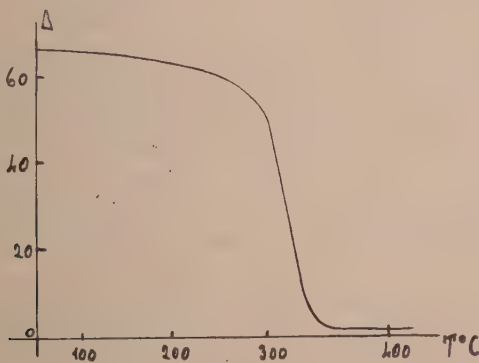


Fig. 2.

La successiva fig. 2 indica l'annullamento della magnetizzazione per riscaldamento del medesimo filo di nichel, sottoposto al consueto trattamento speciale, cioè trazione fino alla rottura e curvatura con forte trazione intorno ad una puleggia. L'andamento della curva è sostanzialmente diversa da quello precedente e vi appare la separazione quasi completa tra le parti

della variazione lenta e di quella rapida; il punto di Curie è leggermente superiore a quello precedente. Mancano però le brusche variazioni; tutt'al più se ne possono intravedere soltanto lievi accenni.

Prima di affermare un tale risultato negativo ho voluto accertarmi meglio ascoltando al telefono durante la variazione per temperatura della magnetizzazione: il filo di nichel costituiva il nucleo di una bobina di sottile filo di rame avente n. 7280 spire, il diametro interno di mm. 2, quello esterno di mm. 12; gli estremi di questa bobina facevano capo ai morsetti di ingresso di un amplificatore a tre stadi, di cui uno aveva una valvola di potenza, del tipo a resistenze e capacità per evitare l'impiego di ogni trasformatore. Il fattore di moltiplicazione dell'amplificatore, misurato per una tensione alternata a 42 periodi, era 2500; l'amplificazione non era perciò grande, ma tuttavia più che sufficiente per fare ascoltare il fenomeno magnetico, dando impulsi al telefono assai intensi e distinti.

La bobina indotta ed il filo di nichel si trovavano dentro una seconda bobina magnetizzante, percorsa dalla corrente. Non potendo riscaldare il filo di nichel con il piccolo forno a nichel-cromo, che mi aveva servito nel precedente studio al magnetometro, mandai nel filo stesso una corrente continua di intensità tale da riscaldarlo al rosso; quindi lo lasciavo raffreddare sotto l'azione del campo magnetico della bobina esterna. A volte invece stavo attento a quello che accadeva al telefono durante il breve tempo del riscaldamento; mai mi è accaduto di udire il caratteristico crepitio prodotto dalle discontinuità della magnetizzazione, per quanto abbia fatto numerosissime prove in condizioni assai diverse: con il filo di nichel libero completamente oppure sottoposto a trazione per mezzo di un adatto peso, di valore diverso volta a volta. Particolare notevole è che, ritornato il filo alla temperatura ambiente, ricomparivano le discontinuità quando si faceva variare il campo esterno in una delle solite maniere, o mediante il movimento di una calamita permanente oppure mediante l'azione della corrente variabile fornita da un invertitore elettrolitico.

Questi ultimi risultati, che ho ottenuto sulla influenza della variazione continua della temperatura, hanno interesse anche fuori del campo puramente sperimentale, giacchè se veramente dovesse mancare l'effetto termico si verrebbe a ristabilire, mi sembra, una concordanza completa tra i fatti sperimentali e le previsioni della teoria classica di Langevin-Weiss, la quale concordanza sembrava dubbia dopo i risultati di Forrer, come mostrai nella mia nota precedente.

A spiegare la diversità dei risultati che si ottengono assai netti ed intensi nell'effetto magnetico con quelli che si hanno invece nell'effetto termico; è sufficiente, mi sembra, pensare alle diverse condizioni fisiche, cui si vengono a trovare i singoli elementi presenti nell'aggregato materiale, che si comporta come una unità: gli elementi periferici di questo sentono le azioni magnetiche diversamente da quelli interni; d'altra parte l'agitazione

termica deve produrre la disorganizzazione dell'aggregato procedendo dalle parti meno a quelle più vincolate, perciò agendo, se non in modo continuo, per salti enormemente minori di quando l'azione si manifesta su tutto il gruppo in un solo tempo.

Sicchè, concludendo, è probabile che anche l'effetto termico esista, ma per essere rivelato, esso ha bisogno di apparecchi dotati di potere amplificatore assai più elevato in confronto a quelli, che sono sufficienti invece per l'effetto magnetico.

Fisica-Matematica. — *Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale.* Nota ⁽¹⁾ di D. GRAFFI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. Volendo studiare matematicamente il fenomeno della trasmissione del calore per convezione naturale (ossia per quel caso in cui il moto del fluido è prodotto dalle differenze di temperatura in seno al fluido stesso), è necessario, come in altre questioni della Fisica-matematica, stabilire le equazioni differenziali e le condizioni ai limiti che determinano le grandezze che compaiono nel problema considerato. Le grandezze che entrano nel problema della convezione sono la velocità \mathbf{v} , la pressione p e la temperatura T del fluido, grandezze queste, in generale funzioni del punto P del campo che verrà considerato e del tempo. Esse sono legate nel caso che il fluido sia omogeneo in tutto il campo, come sempre supporremo da tre equazioni differenziali. La prima di queste, che è dovuta a Oberbeck ⁽²⁾ e che fu ritrovata dal Boussinesq ⁽³⁾ consiste in una modificazione dell'equazione fondamentale del moto dei fluidi, per cui si possa tener conto dei moti prodotti dalle differenze di temperatura ed ha con le solite notazioni vettoriali la seguente forma ⁽⁴⁾:

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{v} \text{ grad } D \frac{d\mathbf{v}}{dP} - \alpha T \mathbf{g} + \mathbf{g}$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1930.

(2) OBERBECK, « Wiedemann Annalen », VII, p. 271, 1879.

(3) BOUSSINESQ, « Comptes-Rendus », 1901, 1^o sem., p. 1328. Vedi anche il trattato del BOUSSINESQ, *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, 1904.

(4) È da notare che in questa equazione si è ommesso il termine $\lambda \text{grad div } \mathbf{v}$ che appare talvolta nelle equazioni del moto dei fluidi, perchè, come si vedrà, $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Il Boussinesq poi considerando solo fluidi perfetti trascura anche il termine $\mathbf{v} \text{ grad } D \frac{d\mathbf{v}}{dP}$. Bisogna anche osservare che l'equazione (1) è valida solo per piccoli valori di T e che perciò occorre anzitutto prendere come origine delle temperature una temperatura poco diversa da quelle assunte dal fluido nel campo considerato.

in cui ρ è la densità del fluido riferita alla temperatura presa come origine, ν il coefficiente cinematico di viscosità, α il coefficiente di dilatazione ⁽¹⁾, g la accelerazione della gravità in grandezza e direzione e t è il tempo.

La seconda equazione è quella detta di continuità alla quale il Bousinesq in base di alcune approssimazioni dà l'espressione:

$$(2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Infine l'ultima equazione è quella della trasmissione del calore per convezione cioè:

$$(3) \quad C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \operatorname{div} \operatorname{grad} T - C_p \rho \operatorname{grad} T \times \mathbf{v}$$

in cui k è la conducibilità termica del fluido e C_p il calore specifico a pressione costante ⁽²⁾.

A queste equazioni valide in tutto il campo bisogna aggiungere alcune condizioni al contorno che ne determinino le soluzioni in modo univoco. Queste condizioni consistono, se il campo è finito, nella conoscenza della velocità e della temperatura in tutto il campo all'inizio dei tempi e nella conoscenza in ogni istante della velocità e della temperatura al contorno del campo. È da notare che, supposto il fluido viscoso, supposta l'aderenza e se il contorno del campo è costituito da pareti solide (come succede spesso in pratica) la \mathbf{v} è nota al contorno perchè è nulla. Se invece il fluido si suppone perfetto per l'unicità basta l'annullarsi al contorno di $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ essendo \mathbf{n} il vettore unitario normale al contorno, diretto verso l'interno del campo. Se poi il campo si estende all'infinito, occorre, oltre alle condizioni sopra citate sulle superfici che lo limitano al finito anche le condizioni di convergenza all'infinito e precisamente che \mathbf{v} , T , p , $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$, $\operatorname{grad} T$ tendano a zero o a un valore noto per P tendente all'infinito con ordine maggiore o uguale a due. Come si è detto, con queste condizioni al contorno le soluzioni delle (1) (2) (3) sono uniche ⁽³⁾, ma, per quanto mi consta, non è stata data di ciò una dimostrazione analitica completa e sarà perciò scopo di questa Nota di dare tale dimostrazione. Detto teorema di unicità, oltre ad avere qualche interesse dal punto di vista analitico, può servire a rendere rigorosi alcuni risultati teorici sulla trasmissione del calore per convezione. Il principale risultato teorico ottenuto sull'argomento consiste in una for-

(1) I coefficienti α e ν si suppongono indipendenti dalla temperatura (per l'ipotesi della piccolezza di T) e sono relativi all'intervallo di temperatura che viene considerato.

(2) Si supponrà sempre conformemente all'esperienza ρ , C_p , k e ν positivi.

(3) S'intende soluzioni uniche nel senso solito della Fisica-matematica, cioè soluzioni finite e continue insieme alle loro derivate prime. Noi consideriamo poi stati non stazionari, perchè nella pratica il moto del fluido generalmente è turbolento cioè non stazionario.

mula, in buon accordo con l'esperienza, che esprime la quantità di calore ceduta da un solido immerso in un fluido, formula ⁽¹⁾ che se contiene ancora una funzione incognita da determinarsi sperimentalmente, permette di ridurre di molto il numero delle esperienze necessarie per risolvere il problema ⁽²⁾. Ora tale formula fu dimostrata da Lord Rayleigh ⁽³⁾ e dal Davis ⁽⁴⁾ in base all'analisi dimensionale, dal Nusselt ⁽⁵⁾ e dal Boussinesq ⁽⁶⁾ con altre considerazioni. Ma come ha dimostrato il Foà ⁽⁷⁾ per rendere rigorosi i metodi dell'analisi dimensionale è necessario il teorema di unicità e lo stesso si può osservare per la precisione dei metodi di Nusselt e Boussinesq.

Il teorema di unicità può servire anche a rendere rigorosi alcuni recenti risultati del Nusselt ⁽⁸⁾ il quale osservando che l'equazioni fondamentali della diffusione convettiva sono analoghe a quelle della convezione, ha tratto importanti relazioni fra i due fenomeni, relazioni che però sono dimostrate in modo esatto se le soluzioni delle equazioni con le stesse condizioni ai limiti sono uniche.

2. Volendo dunque dimostrare il teorema di unicità sopra enunciato, procediamo, al solito per assurdo. Supponiamo che esistano due soluzioni delle (1), (2), (3), \mathbf{v} , p , T e \mathbf{v}_1 , p_1 , T_1 soddisfacenti alle stesse condizioni ai limiti e alle stesse condizioni iniziali e dimostreremo che \mathbf{v}_1 , T_1 debbono essere necessariamente nulle, cioè la soluzione è unica ⁽⁹⁾.

Ora se le \mathbf{v} , p , T e \mathbf{v}_1 , p_1 , T_1 soddisfano le (1), (2), (3), sostituendole in queste equazioni e sottraendo membro a membro le equazioni analoghe dopo semplici trasformazioni si ottiene:

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}_1}{dP} \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_1 + \frac{d\mathbf{v}_1}{dP} \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p_1 + \nu \text{grad D} \frac{d\mathbf{v}_1}{dP} - \alpha T_1 \mathbf{g},$$

$$(5) \quad \text{div } \mathbf{v}_1 = 0,$$

$$(6) \quad C_T \rho \frac{\partial T_1}{\partial t} = k \text{div grad } T_1 - C_T \rho \mathbf{v}_1 \times \text{grad } T - C_T \rho \text{grad } T_1 \times (\mathbf{v} + \mathbf{v}_1).$$

(1) Questa formula sarà ricavata in modo rigoroso in una prossima Nota.

(2) Per applicazioni di questa formula vedi la Memoria di DAVIS che citeremo più innanzi.

(3) LORD RAYLEIGH, «Nature», vol. 95, p. 66, 1915.

(4) DAVIS, «Philosophical Magazine», vol. 46, p. 692, 1920.

(5) NUSSULT, *Gesundheit Ingenieur*, 1915 (di questo lavoro non sono riuscito a trovare la Memoria originale, ma ne ho visto un largo sunto nel trattato del ten. BOSCH, *Die Wärmeübertragung*, Springer, 1927).

(6) BOUSSINESQ. loc. cit.

(7) FOÀ, «L'Industria», 1928, n. 19-20.

(8) NUSSULT, «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», 1930.

(9) Supposto dimostrato che \mathbf{v}_1 e T_1 siano nulle dalle nostre equazioni risulta subito che la p_1 non può avere che un valore costante rispetto alle coordinate in tutto il campo, e questo valore costante si riduce a zero se la p è nota in un punto del campo. Del resto questa costante è inessenziale per la questione.

Moltiplichiamo scalarmente la (4) per \mathbf{v}_i e la (6) per T_i . Otterremo le equazioni:

$$(7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \times \mathbf{v}_i + \frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \mathbf{v} \times \mathbf{v}_i + \frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = \\ = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p_i \times \mathbf{v}_i + \nu \text{grad } D \frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \times \mathbf{v}_i - \alpha T_i \mathbf{g} \times \mathbf{v}_i,$$

$$(8) \quad C_p \rho T_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = k T_i \text{div grad } T_i - C_p \rho T_i \mathbf{v}_i \times \text{grad } T \\ - C_p \rho T_i \text{grad } T_i \times (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i).$$

Ora si osservi che, in base a note trasformazioni e ricordando la (2), si ha:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \mathbf{v} \times \mathbf{v}_i = K \frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v_i^2 \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{div } (v_i^2 \mathbf{v}).$$

In modo analogo si dimostrano le relazioni:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \text{div } (v_i^2 \mathbf{v}),$$

$$\text{grad } p_i \times \mathbf{v}_i = \text{div } (p \mathbf{v}_i) - p \text{div } \mathbf{v}_i = \text{div } (p \mathbf{v}_i),$$

$$\text{grad } D \frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \times \mathbf{v}_i = \text{div} \left(D \frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \mathbf{v}_i \right) - I_i \left(D \frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \right)^2,$$

$$T_i \text{div grad } T_i = \text{div } (T_i \text{grad } T_i) - (\text{grad } T_i)^2,$$

$$T_i \text{grad } T_i \times (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} \text{grad } T_i^2 \times (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \text{div } (T_i^2 (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)) - \frac{1}{2} T_i^2 \text{div } (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} \text{div } (T_i^2 (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)).$$

Sostituendo questi risultati nella (7), (8) si ottiene:

$$(9) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{div } (v_i^2 \mathbf{v}) + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \text{div } (v_i^2 \mathbf{v}_i) = \\ = -\frac{1}{\rho} \text{div } (p_i \mathbf{v}_i) - \alpha T_i \mathbf{g} \times \mathbf{v}_i + \nu \text{div } D \frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \mathbf{v}_i - \nu I_i \left(D \frac{d\mathbf{v}_i}{dP} \right)^2,$$

$$(10) \quad \frac{1}{2} C_p \rho \frac{\partial T_i^2}{\partial t} = k \text{div } (T_i \text{grad } T_i) - k (\text{grad } T_i)^2 \\ - C_p \rho T_i \mathbf{v}_i \times \text{grad } T - \frac{C_p \rho}{2} \text{div } (T_i^2 (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i)).$$

Supponiamo anzitutto che il nostro campo che indicheremo con S sia finito e limitato dalla superficie σ . Integriamo le (9) e (10) su tutto S e applichiamo dove è possibile il teorema della divergenza. Si ottengono così degli integrali di superficie che però sono nulli perchè contengono in evidenza v_i e T_i che sono nulli in superficie ⁽¹⁾. Perciò rimangono le relazioni:

$$(11) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S v_i^2 dS + \nu \int_S I_i \left(D \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right)^2 dS = - \int_S \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i dS - \int_S \alpha T_i \mathbf{g} \times \mathbf{v}_i dS,$$

$$(12) \quad \frac{1}{2} C_P \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_S T_i^2 dS + k \int_S (\text{grad } T_i)^2 dS = - C_P \rho \int_S T_i \mathbf{v}_i \times \text{grad } T dS.$$

Ora se nel primo membro della (11) sopprimiamo il secondo integrale il quale è positivo o al più nullo (poichè per ipotesi $\nu > 0$ ed è $I_i \left(D \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right)^2 \geq 0$) si ottiene che il primo membro della (11) risulta minore o uguale al secondo e a maggior ragione risulta minore o uguale del valore assoluto del secondo membro della (11), il quale è a sua volta minore o uguale della somma degl'integrali dei valori assoluti delle funzioni che compaiono sotto il segno di integrazione sempre nel secondo membro della (11). Perciò si ha:

$$(13) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S v_i^2 dS \leq \int_S \left| \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i \right| dS + \int_S \left| \alpha T_i \mathbf{g} \times \mathbf{v}_i \right| dS.$$

Ora poichè l'omografia $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$ si suppone limitata si può dimostrare ⁽²⁾ che esiste un numero $L(P)$ indipendente da \mathbf{v}_i positivo tale che:

$$\left| \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i \right| < L(P) v_i^2.$$

(1) È da notare che nel caso dei fluidi perfetti ($\nu = 0$) basta l'annullarsi di $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ perchè spariscono gli integrali superficiali.

(2) Per dimostrare ciò basta osservare intanto che $\frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = D \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i$ $D \frac{d\mathbf{v}}{dP}$ essendo la parte dilatazione di $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$. Allora presi come assi le direzioni principali di $D \frac{d\mathbf{v}}{dP}$ la $\left| \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i \right|$ assume la forma $|A v_{ix}^2 + B v_{iy}^2 + C v_{iz}^2|$ in cui v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} sono le componenti sugli assi di \mathbf{v}_i . Allora si ha:

$$\left| \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i \right| \leq |A| v_{ix}^2 + |B| v_{iy}^2 + |C| v_{iz}^2 \leq L(P) (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2) = L(P) v_i^2$$

essendo $L(P)$ il maggiore fra gli $|A|, |B|, |C|$.

Poi si ha:

$$|\alpha T_1 \mathbf{g} \times \mathbf{v}_1| \leq |\alpha \mathbf{g}| |T_1| |\mathbf{v}_1| \leq \frac{|\alpha \mathbf{g}|}{2} (T_1^2 + v_1^2).$$

Perciò sostituendo nella (13) si ha:

$$(14) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S v_1^2 dS \leq \int_S \left(L(P) + \frac{|\alpha \mathbf{g}|}{2} \right) v_1^2 dS + \int_S \frac{|\alpha \mathbf{g}|}{2} T_1^2 dS.$$

Passando alla (12) notiamo che essendo $k > 0$ il secondo integrale del primo membro di essa è positivo o al più nullo, perciò si ha, come nel caso precedente:

$$\frac{C_{p\rho}}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S T_1^2 dS \leq \frac{|C_{p\rho}|}{2} \int_S |T_1 \mathbf{v}_1 \times \text{grad } T| dS.$$

Ora $\frac{C_{p\rho}}{2} > 0$ è comune ad ogni membro della disuguaglianza, perciò si può sopprimere. D'altra parte:

$$|T_1 \mathbf{v}_1 \times \text{grad } T| \leq |T_1| |\mathbf{v}_1| |\text{grad } T| \leq \frac{T_1^2 + v_1^2}{2} |\text{grad } T|.$$

Allora:

$$(15) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S T_1^2 dS \leq \int_S \frac{v_1^2}{2} |\text{grad } T| dS + \int_S \frac{T_1^2}{2} |\text{grad } T| dS.$$

Ora indicato con $\frac{R^{(1)}}{2}$ il massimo in tutto S e nell'intervallo $(0, t)$ di $L(P) + \left| \frac{\alpha \mathbf{g}}{2} \right|$ e di $\left| \frac{\text{grad } T}{2} \right|$ che si deve supporre limitato si ottiene nella (14) e (15)

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_S v_1^2 dS \leq R \int_S v_1^2 dS + R \int_S T_1^2 dS,$$

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_S T_1^2 dS \leq R \int_S v_1^2 dS + R \int_S T_1^2 dS.$$

Integrando queste disuguaglianze da 0 a t e ricordando che per ipotesi $\int_S v_1^2 dS, \int_S T_1^2 dS$, sono nulli per $t = 0$ si ottiene:

$$\int_S v_1^2 dS \leq R \int_0^t dt \int_S v_1^2 dS + R \int_0^t dt \int_S T_1^2 dS,$$

$$\int_S T_1^2 dS \leq R \int_0^t dt \int_S v_1^2 dS + R \int_0^t dt \int_S T_1^2 dS.$$

(1) Questo R è evidentemente positivo o al più nullo.

Ora queste diseguglianze ammettono ⁽¹⁾ per soluzioni finite nell'intervallo $(0, t)$ (t grande qualsiasi) solo $\int_S v_1^2 dS = 0$, $\int_S T_1^2 dS = 0$ da cui segue $v_1 = 0$ e $T_1 = 0$ in tutto S per ogni t come si doveva dimostrare.

Nel caso in cui il campo S si estenda all'infinito, si può renderlo finito considerando una sfera Σ che abbracci tutte le superfici che lo limitano al finito. Allora quando si applica il teorema della divergenza, compaiono degli integrali estesi a Σ che però si annullano facendo tendere il raggio di Σ all'infinito per le già poste condizioni di convergenza ⁽²⁾. Rimangono così equazioni analoghe alle (16) e (17), dalle quali si deduce col ragionamento già fatto $T_1 = v_1 = 0$.

(1) Infatti un sistema della forma:

$$(\alpha) \quad a \leq R \int_0^t a \, dt + R \int_0^t b \, dt$$

$$(\beta) \quad b \leq R \int_0^t a \, dt + R \int_0^t b \, dt$$

se a e b sono supposte limitate e non negative in tutto $(0, t)$ e $R \geq 0$ ammette per soluzioni solo $a = b = 0$. Ponendo infatti al posto di a, b in (α) e (β) il numero m loro limite superiore $0, t$ si ha:

$$a \leq 2 R m t \quad , \quad b \leq 2 R m t$$

e sostituendo ancora nel secondo membro di (α) e (β)

$$a \leq 4 R^2 m \frac{t^2}{2} \quad , \quad b \leq 4 R^2 m \frac{t^2}{2}$$

e così proseguendo:

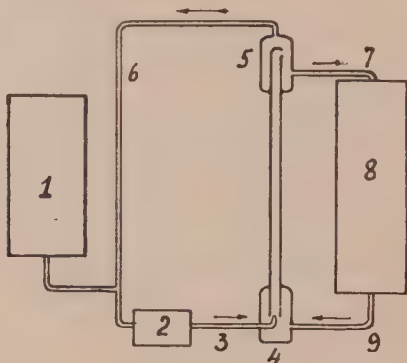
$$a \leq \frac{(2 R)^n m t^n}{n!} \quad , \quad b \leq \frac{(2 R)^n m t^n}{n!}$$

da cui segue $a = b = 0$.

(2) È evidente che il teorema dimostrato rimarrebbe valido anche con altre condizioni di convergenza all'infinito.

Fisica tecnica. — *Sul funzionamento di alcuni apparecchi ad insufflazione di gas* ⁽¹⁾. Nota II ⁽²⁾ di G. BOZZA, presentata dal Corrisp. L. CAMBI.

Si abbia un apparecchio destinato alla reazione fra un gas e un liquido, costituito schematicamente come nella figura: si abbia cioè in 4-5 un tubo verticale calibro, nella parte inferiore del quale si possa far venire una corrente del gas impiegato, attraverso un orifizio da cui esso esca suddiviso in minute bolle. Il liquido nel quale è immerso il tubo viene trascinato verso l'alto, si separa dalle bolle in 5 e va, per il tubo 5-7, nel serbatoio 8, dal quale può ritornare nel tubo 4-5 sotto l'azione del gas.



Il gas eventualmente può essere ricircolato per mezzo di un compressore 2, e la quantità assorbita dal liquido viene sostituita prelevandola dal serbatoio 1 in parallelo.

Nella colonna 4-5 si hanno perciò le condizioni che conducono alle equazioni sviluppate nella Nota I ⁽³⁾.

Possiamo verificare senz'altro che la condizione semplificativa introdotta per rendere possibile l'integrazione della $[15, I]$ e analoghe ⁽⁴⁾, la

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1930.

(3) Questi « Rendiconti ».

(4) Le formule svolte nella Nota I saranno richiamate con il loro numero seguito dall'indicazione I.

costanza cioè del rapporto fra la velocità del liquido e quella del gas lungo il tubo, è in questo caso generalmente soddisfatta.

Difatti non è conveniente che la colonna 4-5 venga costruita molto lunga, anche per non avere una pressione troppo grande (quando si adottassero colonne molto lunghe è sempre possibile determinare un valore medio della velocità di scorrimento del gas nel liquido). Quindi la variazione di pressione fra l'introduzione del gas nel tubo e la sua uscita non può essere molto grande; con una colonna di 2 metri di acqua, se la pressione finale è l'atmosferica quella all'ingresso è 1.2 atmosfere; poichè la velocità di ascesa delle bolle di gas è inversamente proporzionale alla potenza $\frac{1}{6}$ della pressione [6, I], la velocità varierà come da 1 a 1.031 fra

l'ingresso e l'uscita, cioè in un modo trascurabile, se non si ha assorbimento. Siccome poi, affinchè il dispositivo funzioni soddisfacentemente, è utile che si alimenti gas in forte eccesso e una quantità notevole ne sfugga dall'alto, la variazione di volume per assorbimento, che è di segno opposto alla variazione per la diminuzione di pressione, può essere dallo stesso ordine di questa; e la sua influenza sulla velocità è anch'essa corrispondente alla potenza $\frac{1}{6}$. È quindi sufficientemente giustificato tenere costante

la velocità propria di ascesa delle bolle di gas, w_g . Inoltre bisogna considerare che le bolle, in un tubo di diametro generalmente non molto grande, salgono fortemente influenzate dalle pareti: qualunque formula che si volesse stabilire per la velocità, sarebbe perciò illusoria, e solo con l'esperienza si può fissare una velocità media.

Assunta come costante w_g , resta a vedere se il rapporto $\frac{W_1}{W_1 + w_g}$ ha una variazione sufficientemente piccola al variare di W_1 . È evidente che per w_g molto piccolo rispetto a W_1 la condizione è senz'altro soddisfatta entro un campo molto grande di valori W_1 . Ma anche per w_g dello stesso ordine di W_1 , se il salto di pressione è, come abbiamo supposto, limitato, la variazione di W_1 è sufficientemente piccola per supporre costante il rapporto: ad es., con un deflusso di 10 volumi di liquido e 20 di gas allo scarico per unità di sezione, con una velocità $w_g = 10$ e un salto di pressione corrispondente a 2 metri di acqua, e scarico a pressione atmosferica, risulta ⁽¹⁾

$$W_1 = 21.4 ; \quad \frac{W_1}{W_1 + w_g} = 0.682 \text{ (ingresso)}$$

$$W_1 = 24.15 ; \quad \frac{W_1}{W_1 + w_g} = 0.708 \text{ (uscita)}.$$

(1) Applicando la formula (3, I) e la (5, I).

È relativamente piccola perciò la variazione che si avrebbe nel caso di non assorbimento. Essa diminuisce ancora se questo esiste; un assorbimento di 20 % del gas darebbe nel caso precedente

$$W_1 = 20.8; \quad \frac{W_1}{W_1 + w_g} = 0.676 \text{ (uscita).}$$

È perciò lecito assumere, data anche la limitata precisione che si può pretendere nelle misure e date le ipotesi semplificative già fatte, un valore medio per il rapporto in questione. Sussistono allora le formule [17, I] o [25, I], che per integrazione danno le [18, I], [20, I], [27, I], in ogni caso una relazione in termini finiti fra la pressione e la quantità di gas assorbita durante il passaggio nella colonna. Si può cioè dedurre, conosciute che siano le quantità che intervengono nella costante C [16, I] e le pressioni, quanto è il gas che rimane assorbito ogni secondo (perchè le P_g sono appunto quantità di gas al secondo).

Ma generalmente alcune di queste grandezze non sono note e devono appunto essere determinate con l'esperimento: ad es. la costante K che compare in C. Ed è agevole dedurla.

Sia V il volume complessivo di liquido contenuto in tutto l'apparecchio: come è stato definito nella Nota I, $\frac{P_1}{\rho}$ è il volume che fluisce al secondo attraverso il tubo. Questo volume assorbe precisamente la quantità di gas che viene calcolata con le [18, I], [20, I], [27, I], quando in queste si pongano come limiti le pressioni di entrata e di uscita dal-tubo, nella ipotesi che in un passaggio la K di assorbimento non vari sensibilmente. Indichiamo questa quantità con ΔP_g .

Ammettiamo che per assorbimento del gas si formi un composto M, che si possa in qualche modo dosare. La concentrazione di questo ad un dato istante sia s (gr. massa per litro), e una quantità α di gas dia origine a una quantità α di M: la quantità ΔP_g assorbita al secondo darà origine a $\alpha \Delta P_g$ massa di composto, che si ripartisce nel volume V, dando un aumento di concentrazione

$$(1) \quad \frac{\alpha \cdot \Delta P_g}{V} \text{ al secondo: cioè } \frac{ds}{dt} = \frac{\alpha}{V} \cdot \Delta P_g.$$

Una determinazione analitica che stabilisca il valore di $\frac{ds}{dt}$ fissa così anche la quantità ΔP_g ; da questa per mezzo delle [18, I], ecc. si può risalire alla K di velocità di assorbimento o di reazione.

Se la K rimane costante al variare della concentrazione del composto formato, e purchè viscosità, densità, ecc. del liquido non varino molto, $\frac{ds}{dt}$ è costante, perchè ΔP_g ha sempre lo stesso valore, quindi la concen-

trazione aumenta linearmente con il tempo. Viceversa un aumento lineare con il tempo indica l'indipendenza di K dalla concentrazione stessa.

Se invece la curva $t-s$ non è una retta, la K può dipendere dalla concentrazione, ma anche da qualche altro fattore che varii durante l'esperienza: così la viscosità del liquido influenza, a parità di deflusso di gas, i deflussi di liquido; lo stesso dicasi per la densità; una variazione di tensione superficiale fa variare il diametro delle bolle uscenti da uno stesso orifizio, e quindi anche il loro numero e la superficie di contatto fra gas e liquido, nonchè la velocità di ascesa di esse. Ma il caso più importante si ha quando esiste una dipendenza qualunque fra la costante di velocità di assorbimento e la concentrazione del prodotto che assorbe il gas nel liquido; in altre parole quando nella K da noi considerata è implicita l'influenza della concentrazione σ del prodotto N che reagisce con il gas.

In tutti questi casi si può, dall'esperienza, ricavare una linea $t-s$, la cui derivata ci fornisce, per ogni valore di s , e quindi anche per ogni valore di σ , che diminuisce al crescere di s , il valore corrispondente di ΔP_g e in conseguenza quello di K . Si può cioè avere una relazione empirica fra K e la suddetta concentrazione σ .

Ma può talora essere interessante vedere quale dipendenza della concentrazione s dal tempo risulti per una data dipendenza di K dalla concentrazione σ . Conviene allora ragionare come segue.

Il prodotto N sia tale che per ogni unità di massa del gas assorbito ne vengano impiegate β unità, producendo α unità del prodotto M . Si supponga che

$$(2) \quad K = f(\sigma).$$

All'inizio del tubo sia σ_i la concentrazione di N , in un punto qualunque di esso sia σ . Si deve avere

$$(3) \quad \frac{P_i}{\rho} (\sigma_i - \sigma) = \beta (P_{g_i} - P_g)$$

ossia

$$\sigma = \sigma_i - \frac{\beta \rho}{P_i} (P_{g_i} - P_g)$$

e quindi

$$(4) \quad K = f\left(\sigma_i - \frac{\beta \rho}{P_i} (P_{g_i} - P_g)\right).$$

Sostituito questo valore in [16, I], rimangono corrispondentemente modificate le [17, I] o [25, I], e, supposto che si possano ancora agevolmente integrare (in dipendenza dalla forma di f), si determinano, per ogni concentrazione iniziale σ_i , le ΔP_g corrispondenti. Viene così definito l'assorbi-

mento nel caso che si alimenti continuamente un liquido che abbia la concentrazione σ_1 in prodotto che reagisce, e la velocità di reazione sia influenzata dal valore di detta concentrazione secondo la (2).

Più complesso naturalmente risulta il trattamento quando non si alimenti continuamente un liquido di concentrazione costante, ma si faccia circolare sempre lo stesso liquido, nel quale perciò la concentrazione di ingresso andrà gradatamente diminuendo (si ammette sempre che nel serbatoio si abbia mescolanza immediata e completa fra liquido giungente e liquido preesistente). Se supponiamo che la misura della velocità avvenga attraverso la concentrazione s del prodotto formato, si deve avere

$$(5) \quad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{ds}{dt}$$

o anche

$$(6) \quad \sigma = \sigma_0 - \frac{\beta}{\alpha} (s - s_0)$$

se s_0 e σ_0 sono le concentrazioni di M e di N all'inizio. ΔP_g , che secondo la (4) risulta una funzione, in un apparecchio di date caratteristiche, della concentrazione σ_1 con cui il liquido entra nel tubo, diviene qui, attraverso la (6), una funzione di s , concentrazione di prodotto M nel serbatoio 8. Si può perciò porre

$$(7) \quad \Delta P_g = \varphi(s)$$

e l'espressione (1) diviene

$$(8) \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\alpha}{V} \varphi(s)$$

che lega la concentrazione richiesta al tempo. Generalmente non si può pensare ad una integrazione, e bisogna ricorrere a procedimenti grafici.

Completamente analogo è il trattamento nel caso che la concentrazione σ non rappresenti la massa attiva del prodotto che reagisce, ma fra questa e la concentrazione sussista una dipendenza qualunque, o anche il prodotto che si forma influenzi la massa attiva del primo in un modo qualunque: ossia, se è σ_a la concentrazione attiva,

$$(9) \quad \sigma_a = \psi(\sigma, s).$$

Poichè vale sempre la relazione stechiometrica (6), si può eliminare σ , risolvendo poi rispetto ad s

$$s = \chi(\sigma_a)$$

e quindi

$$(10) \quad \frac{\alpha}{V} dt = \frac{\chi'(\sigma_u) \cdot d\sigma_u}{\Delta P_g}$$

che risolve il problema.

Le considerazioni sopra svolte sono state utilizzate per la determinazione della costante K della velocità di assorbimento nel caso della reazione fra etilene e soluzioni di acido ipocloroso studiata dall'A. con un apparecchio del tipo schematizzato⁽¹⁾. Esse si possono evidentemente applicare allo studio di diversissime reazioni fra gas e liquidi.

Chimica. — *La struttura cristallina dei gas inerti. Esame del Kripto*⁽²⁾. Nota II di A. NASINI e G. NATTA, presentata⁽³⁾ dal Socio G. BRUNI.

Come avevamo accennato nella prima Nota⁽⁴⁾ abbiamo dovuto eseguire alcuni cambiamenti nel dispositivo sperimentale usato per l'esame della struttura cristallina dello Xeno onde poterci mettere nelle condizioni adatte all'esame del Kripto. Possedendo questo una tensione di vapore relativamente troppo alta (mm. 17,4 a 88°,6 K) ad una temperatura corrispondente a quella della superficie esterna del capillare di quarzo raffreddato con aria liquida, per abbassare maggiormente la temperatura del capillare siamo ricorsi all'azoto liquido, che abbiamo ottenuto in laboratorio lasciando espandere dell'azoto gassoso compresso, preraffreddato con aria liquida entro un serpentino di rame.

Conveniva poi avere una pressione di Kripto notevolmente superiore alla sua tensione di vapore a quella temperatura, ed abbiamo quindi pensato come cosa più conveniente di mantenere entro la camera di Debye un'atmosfera di Kripto. Era necessario, date le piccole quantità di questo gas di cui disponevamo, avere una camera a perfetta tenuta di vuoto e col minimo volume interno. Abbiamo perciò costruito una camera avente tutte le parti smontabili collegate con coni smerigliati a perfetta tenuta, provvedendo a chiudere il foro di entrata del fascio dei raggi X mediante una foglia di alluminio. Per ridurre al minimo il volume interno abbiamo inoltre posto entro la camera, in posizioni adatte, dei dischi di metallo o di ebanite, in modo da lasciare libero soltanto uno spazio cilindrico alto 8 mm.

(1) «Giornale di Chimica Industriale ed Applicata», 12, 1930.

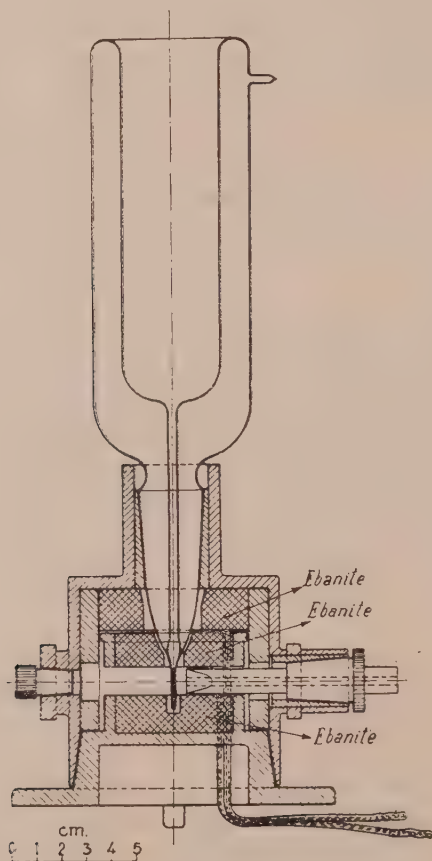
(2) Lavoro eseguito nei Laboratori di Chimica Generale e di Chimica Industriale del R. Politecnico di Milano.

(3) Nella seduta del 30 maggio 1930.

(4) «Rend. Accad. Lincei» Nota I.

La camera era fornita anche di due tubature metalliche che servivano per l'immissione o, volendo, per la circolazione del gas. Dalla figura annessa risultano evidenti i dettagli di costruzione della camera usata.

Per iniziare l'esperienza si faceva il vuoto entro la camera preessicata, si introduceva azoto liquido nel Dewar e, quando il capillare era sufficientemente raffreddato, si immetteva gradatamente il gas secco raccolto su



mercurio; 7 o 8 cc. erano sufficienti per ottenere un buon fotogramma. Terminato questo, si poteva agevolmente recuperare il gas mediante una pompa a mercurio di Töpler. I fotogrammi, ottenuti a mezzo di un tubo Philips ad, anticatodo di ferro elettrolitico, presentavano 14 linee, di cui 4 appartenenti alla radiazione β , tutte ordinabili per una forma cubica del tipo a facce centrate. I dati sperimentali da noi ottenuti per il Kripto sono raccolti nella tabella I^a, nella quale i simboli posti alla testa delle colonne hanno il noto significato.

TABELLA I.
Fotogramma del Kripto.
Fe/ant.

$\sin \frac{\theta}{2}$	d	hkl	K	a	Intensità	
					Osservata	Calcolata
0.2658	3.297	111	β	5.710	m	—
0.2924	3.307	111	α	5.726	ff	4.61
0.3378	2.863	002	»	5.726	d	3 —
0.4330	2.024	220	β	5.723	(m)	—
0.4771	2.027	220	α	5.731	m	4.24
0.5062	1.732	113	β	5.742	md	—
0.5288	1.658	222	β	5.743	dd	—
0.5579	1.734	113	α	5.752	ff	7.23
0.5827	1.660	222	»	5.750	mf	3.46
0.6718	1.440	004	»	5.760	d	1.50
0.7312	1.322	331	»	5.764	mf	5.50
0.7489	1.291	240	»	5.772	mf	5.37
0.8200	1.179	224	»	5.775	mf	4.90
0.8702	1.111	115	»	5.773	mf	4.62
0.9469	1.021	410	»	5.780	dd	2.22

Si nota dalla tabella I che tutte le linee presenti si ordinano nel sistema cubico e corrispondono a facce aventi indici o tutti dispari o tutti pari. Questo dimostra che il Kripto possiede una struttura a faccie centrate come quelle dell'Argo e dello Xeno. Il lato della cella elementare, supponendo che questa contenga 4 atomi, risulta 5,78 Å, il volume 193.10^{-24} cc., la densità = 2,83. Il raggio dell'atomo di Kripto, ammettendo la tangenza degli atomi nel reticolo, risulta 2,04 Å.

Nella tabella II abbiamo riportato alcuni dati riguardanti i gas rari sinora esaminati a mezzo dei raggi X, dove T è la temperatura di fusione, a la costante reticolare, v il volume della cella, d la densità, ed R e σ sono i raggi atomici calcolati rispettivamente dalle misure röntgenografiche e da quelle di viscosità dei gas. Nell'ultima colonna vien dato il rapporto fra i raggi atomici calcolati con i due metodi. Dall'esame di questa tabella

si rivela il noto incremento dei valori nel passaggio dal Neo allo Xeno. Confrontando i valori d della densità allo stato solido con quelli d_1 al punto di ebollizione (i soli noti nella letteratura ⁽¹⁾ per tutti i gas presi in esame) si vede come essi, tenuto naturalmente conto delle differenze di temperature e di stato di aggregazione, si corrispondano, avvalorando quindi le ipotesi fatte nel calcolo dei dati röntgenografici.

TABELLA II.

	T	a	v	d	d_1	R	σ	$\frac{R}{\sigma}$
Ne	— 248.8	4.52	92	1.44	1.204	1.59	1.18	1.35
A	— 189.1	5.42	159	1.65	1.404	1.92	1.436	1.34
Kr	— 169	5.78	193	2.83	2.47	2.04	1.56	1.31
Xe	— 140	6.18	236	3.64	3.063	2.18	1.70	1.29

Dal rapporto dei raggi atomici, dato nell'ultima colonna, risulta la ottima concordanza, sebbene naturalmente non assoluta, fra i dati ottenuti allo stato gassoso ed allo stato solido.

Altro confronto interessante che si può fare è quello fra i raggi atomici dei tre gas rari ed i raggi degli ioni degli elementi, vicini nel sistema periodico, che possiedono l'orbita esterna completa ad otto elettroni ⁽²⁾. Nella tabella III vengono riportati questi valori e si può notare come essi sieno in discreto accordo. Simile concordanza invece non si osserva nel caso dei raggi degli

TABELLA III.

Ne 1.59	A 1.92	Kr 2.04	Xe 2.18
F ⁻ 1.33	Cl ⁻ 1.81	Br ⁻ 1.96	J ⁻ 2.20
O ⁻ 1.32	S ⁻ 1.74	Se ⁻ 1.91	Te ⁻ 2.03

ioni degli elementi alcalini che raggiungono l'abito elettronico di gas raro mediante la perdita di un elettrone: infatti il raggio dell'ione positivo è per il sodio: 0.98 A., per il potassio: 1.53 A., per il rubidio: 1.49 A. e per il cesio: 1.65 A. I raggi degli atomi neutri degli stessi elementi alcalini sono invece maggiori di quelli corrispondenti dei gas rari, e precisamente per il

(1) GMELIN, *Handbuch der anorg. Chem.*: Die Edelgase (1926).

(2) *Geochem. Verteilungsgesetze d. Elem.*, « Norske Vidensk. Akad. », Oslo, 7, 54, 1926.

sodio: 1,86 A., per il potassio: 2,27 A., per il rubidio: 2,43 A., per il cesio: 2,66 A. ⁽¹⁾.

Dalle misure note sui metalli alcalini risulta che tutti posseggono una struttura cubica a corpo centrato; dalle misure dei quattro gas nobili sinora studiati si rileva invece che tutti questi posseggono una struttura cubica a faccie centrate. Simili analogie si ritrovano paragonando gli elementi che appartengono ad altri sottogruppi del sistema periodico (Cu, Ag, Au cubici a faccie centrate, Be, Mg, Zn, Cd, Hg esagonali etc.) e quindi riteniamo probabile che l'elio, ed il nito posseggano, come i loro omologhi, una struttura cubica a faccie centrate.

Accenneremo ora a qualche altra relazione esistente fra i raggi atomici dei gas rari e la grandezza di alcune molecole, paragonando i dati röntgenografici con quelli basati sulla teoria cinetica dei gas (misure di viscosità).

Relazioni tra le grandezze molecolari allo stato solido ed allo stato gassoso. — Varie esperienze furono eseguite, in ispecial modo dal Rankine e dai suoi collaboratori, ⁽²⁾ sulla viscosità di gas che dovevano presentare, in base alle teorie elettroniche della valenza, eguaglianza o similitudini di grandezze molecolari. Senza riportare qui le varie discussioni, ormai note, sull'argomento ci limitiamo al confronto di alcuni casi che riguardano in particolar modo i gas rari.

Per paragonare le dimensioni molecolari, risultanti dalle aree d'urto delle molecole allo stato gassoso ottenute da misure di viscosità, con quelle deducibili dalle misure röntgenografiche, abbiamo raccolto nella tabella IV, per alcuni gas, i valori che risultano, supponendo le molecole sferiche in entrambi i casi (ipotesi puramente convenzionale) ed ammettendo nei reticoli la tangenza delle sfere tra di loro.

Per i gas rari questa ipotesi è meno lontana dal vero, ed il raggio molecolare naturalmente coincide con quello atomico.

Per le molecole più complesse questa ipotesi è meno giustificata, ma può fornire dei dati relativi confrontabili tra di loro, soprattutto per i composti non ionici, per i quali in genere la molecola nei reticoli mantiene la sua unità. Siccome paragoniamo soltanto dei gas che allo stato solido presentano delle strutture a faccie centrate, i valori sono paragonabili ed assumiamo come raggio delle molecole la semi-distanza fra i centri degli atomi coordinanti. Essendo cubici tutti i gas considerati, tale raggio risulterebbe $\frac{a}{4}\sqrt{2}$. Anche per l'ossido di carbonio e per l'azoto abbiamo considerato lo stesso valore.

(1) F. SIMON e E. VOHSEN, «Naturwiss.», 15, 398, 1927.

(2) A. O. RANKINE, C. J. SMITH ed altri. Una serie di lavori apparsi nei «Proc. Royal Soc. A.» (London) e nel «Phil. Mag.» dal 1919 al 1924; e poi vedi LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Tabellen*, Ergänzungsband, 1927.

TABELLA IV⁽¹⁾.

	σ	R	$\frac{R}{\sigma}$
Ne	1.18	1.59	1.35
A	1.43	1.92	1.34
NH ₃	1.42	1.82	1.28
Kr	1.56	2.04	1.31
CO	1.56	1.99	1.28
N ₂	1.56	2.00	1.28
CH ₄	1.57	2.24	1.42
H ₂ S	1.57	2.04	1.30
HBr	1.56	2.04	1.31
Xe	1.69	2.18	1.29
PH ₃	1.70	2.19	1.29
HJ	1.71	2.18	1.28

Dalla tabella si osserva che in genere per molecolè semplici vi è una rispondenza soddisfacente tra i valori confrontati. Il rapporto $\frac{R}{\sigma}$ sta entro limiti molto ristretti (1,28–1,35). Fa solo eccezione il metano, la cui struttura cristallina non è ancora nettamente definita⁽²⁾.

(1) I valori di R sono stati tratti dalle seguenti pubblicazioni: per l'ammoniaca (H. MARK e E. POHLAND, «Zeitschr. f. Krist.» 61, 532, 1925), per l'azoto (L. VEGARD, «Zeitschr. f. Phys.», 58, 497, 1929, e J. DE SMEDT e W. H. KEESOM, «Proc. K. Akad. Wetensch. Amsterdam», 32, 745, 1929), per l'ossido di carbonio (L. VEGARD, «Zeitschr. f. Phys.», 61, 185, 1930), per l'idrogeno solforato (G. NATTA, «Rend. Accad. Lincei», VI, II, 679, 1930), per il metano (v. nota pag. seguente), per la fosfina, l'acido bromidrico e l'acido iodidrico da lavori in corso di pubblicazione di G. NATTA, per il Kripto e lo Xeno dai nostri lavori, per l'Argo (SIMON e SIMSON, «Zeit. f. Phys.», 25, 160, 1924), per il Neo (W. H. KEESOM e H. H. MOOY, «Comm.», Leiden, 203 e, 1930. I valori di σ sono stati tratti dalle tabelle del LANDOLT BÖRNSTEIN, eccettuati quelli del Kripto e dello Xeno (A. G. NASINI e C. ROSSI, «Gazzetta», 58, 433, 1928).

(2) J. C. Mc. LENNAN e W. G. PLUMMER, «Phil. Mag.», VII, 361, 1929.

Passando ai confronti singoli si può notare l'ottima concordanza tra i valori del Kripto, ossido di carbonio ed azoto. Facciamo anche osservare che altre due molecole « isosteriche », CO_2 e N_2O , presentano, secondo i due metodi d'indagine, grandezze molecolari tra loro praticamente uguali. ($R=1,99$ per il CO_2 , $2,02$ per N_2O , $\sigma=1,62$ per entrambi). Buona concordanza pure si nota fra lo Xeno, la fosfina e l'acido iodidrico.

È stata notata una differenza costante tra le aree di urto rispettivamente dell'ammoniaca e del neo, della fosfina e dell'argo, dell'arsina e del kripto.

Nel confronto dei dati röntgenografici si nota solamente una variazione nello stesso senso. Concludendo si osserva che la costanza del rapporto $\frac{R}{\sigma}$ è soprattutto soddisfacente nel confronto di molecole aventi lo stesso numero di atomi.

Riassunto:

1° È stato esaminato coi raggi X, col metodo delle polveri, e con una speciale camera, il Kripto solido.

2° Il Kripto presenta una struttura cubica a faccie centrate. La cella, contenente quattro atomi, possiede un lato di $5,78 \text{ \AA}$, un volume di $193 \times 10^{-24} \text{ cc}$. La densità risulta $2,83$.

3° Sono state discusse varie relazioni esistenti tra le grandezze atomiche dei gas rari e quelle di ioni e di molecole a loro simili.

Aggiunta durante la correzione delle bozze.

Contemporaneamente ad una nostra lettera all'Editore del giornale inglese « Nature », in data 31 maggio, sulla struttura del Kripto, è apparsa sullo stesso giornale, recante la stessa data, una lettera dei sigg. Keesom e Mooy sul medesimo argomento.

I risultati di questi autori concordano con i nostri riguardo al tipo della struttura assegnata al Kr, differiscono però notevolmente nelle dimensioni assegnate alla cella elementare (circa 2 decimi di Ångstrom in meno). Si deve notare che Keesom e Mooy hanno operato alla temperatura dell'idrogeno liquido (ca. 50 gradi al disotto di quella da noi adottata) quindi la differenza è nel senso che deve aspettarsi; il suo valore numerico sembra però più alto di quello che potrebbe prevedersi per un intervallo di temperatura come quello indicato; notiamo però che i coefficienti di dilatazione termica a così basse temperature non sono ancora conosciuti.

Noi ci siamo nuovamente assicurati, per mezzo dell'analisi spettroscopica, della purezza del gas adoperato che era stato fornito, ad uno di noi, in tubo di vetro, saldato alla fiamma, dal prof. A. Lepape con garanzia del 99.99 % di purezza, e abbiamo accuratamente ricontrollato il dispositivo della camera röntgenografica: siamo quindi certi dell'esattezza dei nostri risultati.

Chimica. — *Sulle reazioni cromatiche dei molibden-otto-cianuri*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio R. NASINI.

Le ricerche di O. Olsson⁽³⁾ e quelle recenti di W. R. Bucknall e W. Wardlaw⁽⁴⁾ hanno ormai accertato che, oltre alla serie degli otto-cianuri del molibdeno tetravalente, il cui primo termine $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ fu descritto da A. Chilesotti⁽⁵⁾, e che furono studiati da A. Rosenheim⁽⁶⁾ e allievi, esiste una serie di otto-cianuri del molibdeno pentavalente che corrispondono all'acido $H_3Mo(CN)_8$.

Ambedue queste serie di composti contengono l'anione complesso $[Mo(CN)_8]$, la prima con quattro cariche elettriche, la seconda con tre, e quindi, fatta astrazione dalla valenza dell'atomo centrale, si può dire che i composti della prima serie stanno a quelli della seconda come i ferrocianuri stanno ai ferricianuri.

Un altro punto di contatto tra gli otto-cianuri del molibdeno tetravalente e i ferrocianuri si ha nella seguente reazione notata per la prima volta dal Chilesotti: le soluzioni che contengono l'anione $[Mo(CN)_8]^{IV}$ per aggiunta di un sale ferrico assumono una intensa colorazione azzurra che ricorda il bleu di Prussia solubile.

In considerazione dell'importanza che in questi ultimi anni si va attribuendo al colore dei composti in rapporto alla loro intima struttura⁽⁷⁾, mi è parso che il fatto della somiglianza nell'anormalità del colore che presentano i sali ferrici degli acidi $H_4Mo(CN)_8$ e $H_4Fe(CN)_6$ non fosse da considerarsi come una circostanza fortuita, ma fosse un segno rivelatore di un'analogia di struttura e di comportamento tra i cianuri complessi del molibdeno e quelli del ferro, e che sarebbe stato interessante verificare se detta analogia si manifestasse effettivamente anche in altre reazioni.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1930.

(3) « Ber. », 47, p. 917 (1914).

(4) « J. Chem. Soc. », p. 2981 (1927).

(5) « Gazz. Chim. Ital. », 34, II, p. 497 (1904).

(6) « Zeitschr. Anorg. Chem. », 49, p. 148 (1906); 54, p. 97 (1907), 65, p. 166 (1909); 66, p. 95 (1910).

(7) J. MEISENHEIMER, « Zeitschr. f. phys. Chem. », 97, p. 304 (1921); K. FAJAN, « Naturwissenschaften », 11, p. 165 (1923); H. REILHEN, « Ann. », 451, p. 75 (1927); L. CAMBI, « Gazz. Chim. Ital. », 58, p. 57 (1928).

Guidato da queste considerazioni ho esaminato il comportamento dei cianuri complessi del molibdeno con tutti i reattivi che coi cianuri complessi del ferro danno vistose reazioni cromatiche. Dalle mie ricerche è risultato che tra i due ordini di composti esiste, nel loro comportamento, un vero parallelismo. Tale parallelismo mi è stato utile per chiarire una interessante reazione tra $K_4Mo(CN)_8$ e l'acido molibdico, che era stata descritta dal Chilesotti, ma della quale egli aveva riconosciuto di non poter dare una spiegazione plausibile.

Reazione coi sali ferrici.

Per studiare le reazioni cromatiche dell'anione $[Mo(CN)_8]^{IV}$ coi sali ferrici e con altri reattivi venne impiegata una soluzione al 2% del sale $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ e per studiare quelle dell'anione $[Mo(CN)_8]^V$ si utilizzò la stessa soluzione dopo di averla acidificata con acido solforico e ossidata con permanganato fino a comparsa di una debole colorazione rosea. 10 cc. della soluzione di $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ richiesero cc. 4 di una soluzione N/10 di $KMnO_4$, cioè precisamente la quantità calcolata per far passare il molibdeno contenuto nella soluzione da tetravalente a pentavalente.

La soluzione di $K_4Mo(CN)_8$ addizionata con egual volume di una soluzione ferrica, che conteneva 5% di allume ferrico-ammonico e 4% di acido solforico, assume un'intensa colorazione turchina. Questa è la reazione di cui fa cenno il Chilesotti, secondo il quale il cianuro complesso di molibdeno può quindi essere un reattivo sensibile per il ferro.

Detta reazione venne da me ripresa in esame per metterla a confronto con la reazione analoga dei ferrocianuri e su di essa ho potuto fare le seguenti osservazioni.

Facendo reagire il $K_4Mo(CN)_8$ con un sale ferrico anche in soluzioni concentrate e in diversi rapporti, si ottengono sempre liquidi turchini limpidi, e non mai dei precipitati. È tuttavia da ritenere che la sostanza azzurra che si forma nella reazione si trovi in soluzione allo stato colloidale perchè essa non diffonde attraverso la carta pergamenata. La soluzione di $K_4Mo(CN)_8$ diventata azzurra per aggiunta di un sale ferrico e poi sottoposta alla dialisi, lentamente intorbida e deposita un precipitato azzurro gelatinoso che ricorda il bleu di Prussia.

Il bleu ottenuto col molibdencianuro è però molto meno stabile, forse perchè meno complesso, del bleu di Prussia: esso si comporta quasi come un vero sale ferrico. Il suo colore si attenua sotto l'azione di acidi minerali forti, scompare per azione dell'ossalato di ammonio. Le soluzioni turchine danno reazioni di doppio scambio; coi sali di rame, precipitato violetto amorfo di $Cu_2Mo(CN)_8$ e coi sali d'argento, precipitato gelatinoso giallastro di $Ag_4Mo(CN)_8$. Se queste reazioni di doppio scambio si fanno avvenire tra soluzioni concentrate i precipitati che si ottengono sono fortemente colorati

in azzurro perchè i sali insolubili di rame e di argento trascinano con sé per assorbimento parte della sostanza turchina che esiste in soluzione allo stato colloidale.

Le soluzioni di $K_4Mo(CN)_8$ dopo di esser state ossidate con permanganato non cambiano colore per aggiunta di sali ferrici: restano giallo-chiare. Se vengono esposte alla luce diretta solare, oppure illuminate con una lampada a mercurio assumono, in pochi minuti, un'intensa colorazione turchina. Ciò si spiega facilmente col fatto già noto⁽¹⁾ che per azione della luce gli anioni $[Mo(CN)_8]^{V''''}$ si riducono ad anioni $[Mo(CN)_8]^{IV''''}$. Viceversa una soluzione turchina preparata con $K_4Mo(CN)_8$ e un sale ferrico, per aggiunta di permanganato si scolora.

Il comportamento dell'acido $H_3Mo(CN)_8$ con i sali ferrici ricorda dunque quello dell'acido ferricianidrico.

Reazioni coi sali ferrosi.

Io ho osservato che mentre le soluzioni contenenti gli anioni $[Mo(CN)_8]^{IV''''}$ addizionate con un sale ferroso, esente da sale ferrico, danno un precipitato bianco cristallino che all'aria diventa azzurro, e che quindi rassomiglia al ferrocianuro ferroso, le soluzioni contenenti gli anioni $[Mo(CN)_8]^{V''''}$ per aggiunta di un sale ferroso si colorano intensamente in turchino. Questa reazione corrisponde evidentemente alla formazione del bleu di Turnbull la quale - com'è noto - venne interpretata o come un semplice doppio scambio tra ferricianuro e sale ferroso o ammettendo che gli ioni $[Fe(CN)_6]^{III''''}$ venissero prima ridotti a $[Fe(CN)_6]^{II''''}$ a spese del sale ferroso. Nel nostro caso è facile dimostrare che effettivamente il sale ferroso riduce gli ioni $[Mo(CN)_8]^{V''''}$ a $[Mo(CN)_8]^{IV''''}$ e che quindi la sostanza turchina che si forma con i sali ferrosi è identica a quella che abbiamo visto formarsi con i sali ferrici. Se, infatti, si tratta con solfato di rame una soluzione turchina preparata con un sale ferroso, non si forma il precipitato verde caratteristico dell'acido $H_3Mo(CN)_8$ ma il precipitato violetto caratteristico dell'acido $H_4Mo(CN)_8$: e con un sale di argento non si forma $Ag_3Mo(CN)_8$, precipitato rosso bruno, ma $Ag_4Mo(CN)_8$, precipitato giallo chiaro.

Reazioni coi sali di uranile.

Aggiungendo alle soluzioni contenenti l'ione $[Mo(CN)_8]^{IV''''}$ una soluzione di acetato di uranile (2%) ho osservato una colorazione rosso-bruna che

(1) BUCKNALL e WARDLAW, « J. Chem. Soc. », p. 2981 (1927).

ricorda il colore del precipitato che i sali di uranile danno col ferrocianuro potassico.

Le soluzioni contenenti l'ione $[\text{Mo}(\text{CN})_8]^{v'''}$ non cambiano colore coi sali di uranile come non cambiano colore le soluzioni dei ferricianuri.

Una soluzione contenente l'ione $[\text{Mo}(\text{CN})_8]^{v'''}$ e un sale di uranile, dopo alcuni minuti di esposizione alla luce solare diretta diventa rosso-bruna, causa la riduzione operata dalla luce sull'ione $[\text{Mo}(\text{CN})_8]^{v'''}$.

Reazioni con l'acido molibdico.

Nella sua Nota del 1904 Chilesotti descrive la seguente reazione: « Il sale $\text{K}_4\text{Mo}(\text{CN})_8 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ agisce come riduttore sulle soluzioni di MoO_3 in HCl e sulle soluzioni dei molibdati acide per acido solforico diluito. L'azione riduttrice si manifesta con un'intensa colorazione rosso-bruna simile a quella

delle soluzioni di $\text{MoO}(\text{OH})_3$ la quale sparisce per ossidazione con acqua ossigenata o con permanganato. Titolando con quest'ultimo una soluzione di molibdato ammonico in eccesso colorata per azione di una quantità nota del cianuro si trovò che l'ossidazione richiede un equivalente di ossigeno per ogni molecola. Una spiegazione plausibile di questo fatto non è facile a darsi ».

La somiglianza tra la colorazione bruna che si ha in questa reazione con quella delle soluzioni diluite dei sali del molibdeno pentavalente ha tratto in errore il Chilesotti facendogli ammettere che il molibdencianuro agisse da riducente sull'acido molibdico. Che nelle soluzioni rosso-brune che si ottengono con la reazione suddetta non sia contenuto un prodotto di riduzione dell'acido molibdico è facile dimostrarlo aggiungendo ad esse un alcali caustico, che fa scomparire la colorazione rosso-bruna *senza che si formi alcun precipitato*.

La reazione che è da considerarsi invece come perfettamente analoga a quella osservata dal Chilesotti, è quella, molto nota, che si produce nelle soluzioni di ferrocianuri e molibdati quando vengono acidificate. Se si acidifica con acido acetico diluito si ha una colorazione rosso-bruna senza formazione di precipitato; se si impiega un acido minerale forte si ottiene un precipitato gelatinoso rosso-bruno che contiene acido ferrocianidrico e acido molibdico. L'aggiunta di un alcali caustico fa scomparire tanto la colorazione che il precipitato perchè si riforma ferrocianuro e molibdato. Anche il permanganato può far scomparire la colorazione rosso-bruna e più lentamente il precipitato rosso-bruno, in quanto che ossida l'acido ferrocianidrico a ferricianidrico che, com'è noto, con l'acido molibdico non forma nè colorazione, nè precipitato.

Nella reazione osservata dal Chilesotti il permanganato che fa scomparire la colorazione non agisce sopra un prodotto di riduzione dell'acido

molibdico, ma sull'acido $H_4Mo(CN)_8$ ossidandolo ad $H_3Mo^V(CN)_8$, che analogamente all'acido ferricianidrico non forma con l'acido molibdico composti colorati.

Reazioni coi sali d'argento.

È noto che mentre il composto $Ag_4Mo^V(CN)_8$ è un precipitato giallo-chiaro, il composto $Ag_3Mo^V(CN)_8$ è un composto rosso-bruno, e quindi il primo corrisponde al ferrocianuro d'argento che è quasi bianco, e il secondo al ferricianuro d'argento che è rosso-aranciato.

In ricerche ancora inedite io ho osservato che il ferricianuro d'argento forma con l'esametilentetrammina un prodotto di addizione $Ag_3Fe^{III}(CN)_6 \cdot 2C_6H_{12}N_4$ che si presenta in bei *cristalli neri*. Ho constatato che anche il composto $Ag_3Mo(CN)_8$ forma con l'esametilentetrammina un prodotto di addizione bruno, quasi nero, di cui non si è ancora ultimata l'analisi.

Reazioni coi sali di rame.

Le soluzioni di $K_4Mo^{IV}(CN)_8$ per aggiunta di un sale di rame danno un precipitato amorfo intensamente colorato in violetto-porpora. Questa reazione venne descritta da A. Rosenheim ⁽¹⁾ che inoltre ottenne, dalla soluzione del precipitato violetto in ammoniaca, il composto $Cu_2Mo^{IV}(CN)_8 \cdot 4NH_3 \cdot 7H_2O$ in cristalli verdi.

Il colore del composto $Cu_2Mo(CN)_8 \cdot NH_2O$, così diverso da quello dei comuni sali di rame e da quello dei molibden-cianuri, ricorda nella sua anomalia il colore del ferrocianuro rameico che sta tra il rosso-bruno e il violaceo.

H. Reihlen ⁽²⁾ nelle sue ricerche recenti sulla struttura dei cianuri metallici complessi interpreta il ferrocianuro rameico come un composto polinucleato: in esso non sarebbe più contenuto il complesso $[Fe^{II}(CN)_6]^{4-}$ ma il complesso $[(CN)_2Cu(CN)_2Fe(CN)_2]^{2-}$ cioè sarebbe da considerare come il sale rameico di un acido bibasico ferro-cupri-cianidrico. Questa interpretazione dà ragione del colore anormale del composto, e anche del fatto che dalle soluzioni ammoniacali del ferrocianuro rameico si ottiene un ammoniacato con soltanto quattro molecole di NH_3 . Siccome il numero di coordinazione del rame nei suoi complessi con l'ammoniaca è di regola quattro, bisogna ammettere che un solo atomo di rame del ferrocianuro rameico si

(1) « Zeitsch. anorg. Chem. », 54, p. 102 (1907).

(2) « Ann. », 451, p. 87 (1927).

circondi di molecole di ammoniaca, e ciò sta in accordo con la formula di Reihlen secondo la quale l'atomo di rame che si trova nella sfera esterna deve essere più facilmente reattivo di quello che entra a far parte del complesso negativo.

Ammessa l'interpretazione di Reihlen per il ferrocianuro rameico, è logico estenderla anche al composto $\text{Cu}_2\text{Mo}(\text{CN})_8$ ^{IV} che pure ha colore anormale, e che sciolto nell'ammoniaca non eccessivamente concentrata fornisce un ammoniacato cristallino con soltanto quattro molecole di ammoniaca. Anche nel composto $\text{Cu}_2\text{Mo}(\text{CN})_8$ è da ammettere, quindi, un solo atomo di rame nella sfera esterna, l'altro deve entrare a far parte del complesso negativo. Reihlen suppone che la struttura ottaedrica del complesso $[\text{Fe}(\text{CN})_6]$ ^{II} si trasformi per l'introduzione di un atomo di rame, in una struttura bitetraedrica: un tetraedro avrebbe come atomo centrale il ferro, e l'altro il rame; e i due tetraedri avrebbero in comune uno spigolo, cioè due gruppi (CN).

Nel caso del molibdeno le condizioni sono un po' diverse. Nel complesso $[\text{Mo}(\text{CN})_8]$ ^{IV} i gruppi (CN) sono disposti attorno all'atomo di molibdeno come ai vertici di un cubo⁽¹⁾; lo stabilirsi della struttura polinucleare necessita che il cubo si risolva in due aggruppamenti: un tetraedro con al centro un atomo di rame, e un ottaedro con al centro l'atomo di molibdeno. Tetraedro e ottaedro avrebbero in comune uno spigolo, cioè due gruppi (CN).

È presumibile che il parallelismo messo in luce da queste ricerche tra il comportamento degli otto-cianuri del molibdeno e quello degli esa-cianuri del ferro, possa manifestarsi anche in altri ordini di composti, per esempio nei prodotti di addizione con basi organiche, e perciò mi propongo di estendere ai cianuri del molibdeno le ricerche da me eseguite recentemente sui ferro- e ferri-cianuri⁽²⁾.

(1) P. PFEIFFER, « Zeitschr. anorg. allgem. Chem. », 105, p. 26 (1919).

(2) G. A. BARBIERI, « Gazz. Chim. Ital. », 60, p. 229 (1930).

Chimica. — *Decomposizione catalitica dell'alcool cetilico* ⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ di C. SANDONNINI e S. BEZZI presentata dal Socio N. PAR-
RAVANO.

La decomposizione degli alcoli primari saturi monovalenti col calore può avvenire essenzialmente in due modi diversi: eliminazione di idrogeno e formazione di aldeidi o disidratazione con formazione di idrocarburi non saturi; gli alcoli secondari e terziari si decompongono quasi esclusivamente in questo secondo modo. In generale tanto le aldeidi come pure gli idrocarburi non saturi così generati, subiscono una ulteriore e più profonda decomposizione.

P. Sabatier e Mailhe ⁽³⁾ riprendendo alcune osservazioni di Gregorieff ⁽⁴⁾ sulla decomposizione dell'alcool etilico col calore ed in presenza di allumina, hanno studiata l'azione di molti altri ossidi metallici e li suddivisero in ossidi deidrogenanti, disidratanti e misti, secondochè facilitavano l'uno o l'altro od entrambi i due modi di decomposizione. Risultò così che l'allumina è uno tra i più attivi catalizzatori di disidratazione, mentre tra gli ossidi che favoriscono quasi esclusivamente la deidrogenazione sono da annoverarsi l'ossido di zinco e l'ossido di vanadio. I sesquiossidi di cromo e di ferro si debbono invece considerare come catalizzatori misti.

Da qualche tempo abbiamo iniziato ricerche sistematiche sui prodotti di disidratazione degli alcoli superiori e polivalenti, e sulla idratazione degli idrocarburi non saturi, in varie condizioni, processi che presentano un grande interesse e sui quali non si hanno che dati frammentari.

Ci era anzitutto necessario conoscere come procedeva la decomposizione catalitica degli alcoli superiori con questo procedimento, poichè ben poche notizie si avevano in proposito.

Come alcool primario a lunga catena normale venne scelto l'alcool cetilico. Questo venne in parte preparato in laboratorio dagli spermaceti ed in parte venne ottenuto per purificazione di quello del commercio. Il punto di fusione dell'alcool usato nelle esperienze che seguono giaceva a 49,5°.

Secondo alcuni autori l'alcool cetilico per distillazione subisce una lenta decomposizione e perciò abbiamo voluto assicurarci come questa procede in assenza di catalizzatori specifici.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Farmaceutica della R. Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1930.

(3) « Ann. Chim. Phys. » (8) 20, 341 (1910).

(4) « J. Soc. Chim. Phys. Russ. », 33, 175 (1901).

L'alcool veniva posto in una piccola storta della capacità di circa 60-70 cc. ed immersa in bagno di sabbia. La tubulatura, molto breve e protetta dall'irraggiamento del calore con un rivestimento di amianto, era collegata con un tubo di vetro di Jena del diametro di 25 mm. e lungo circa 40 cm. contenuto a sua volta in un fornetto tubolare a resistenza elettrica. Questo tubo, dalla parte opposta della storta, era collegato con un piccolo collettore raffreddato, dal cui tubo adduttore potevano uscire i gas che si fossero eventualmente sviluppati, per essere poi raccolti in un piccolo gasometro ripieno di soluzione satura di sal comune.

Prima di incominciare il riscaldamento tutta l'aria contenuta nell'apparecchio veniva scacciata con una corrente di azoto.

In una prima esperienza l'alcool cetilico posto nella storta venne riscaldato a 260-265° ed i suoi vapori vennero fatti passare per il tubo, mantenuto a temperatura ordinaria. Dopo qualche tempo sulle pareti di questo va raccogliendosi una massa solida perfettamente bianca, mentre che non si nota il minimo sviluppo gassoso. La massa bianca raccolta fondeva a 49° e si dimostrò essere alcool cetilico inalterato.

Allo stesso risultato si pervenne anche facendo passare i vapori dell'alcool attraverso il tubo di vetro riscaldato a 325-350°.

Constato in questo modo che sino a questa temperatura la decomposizione dell'alcool cetilico può considerarsi trascurabile, vennero fatte esperienze ponendo diversi ossidi nel tubo di vetro, mantenuto sempre alla medesima temperatura.

Questi vennero preparati in laboratorio dagli idrati ottenuti per precipitazione con ammoniaca da soluzioni diluite di sali solubili dei metalli corrispondenti, accuratamente lavati sino a scomparsa di ammoniaca ed in fine mantenuti a lungo a 350°.

Per aumentare la superficie di contatto ed assicurare il passaggio dei gas, gli ossidi vennero posti nel tubo di catalisi frammisti a grosse perle di vetro.

L'analisi dei gas venne fatta raccogliendo campioni a parte, quando dal volume di gas uscito si poteva ritenere che la massima parte dell'azoto che riempiva l'apparecchio all'inizio dell'esperienza era stata già scacciata.

OSSIDO DI ALLUMINIO. - La storta, contenente l'alcool cetilico, durante l'esperienza venne rigorosamente mantenuta a 260-265°; il tubo di catalisi riempito per due terzi di ossido di alluminio, preparato nel modo ora visto, fu mantenuto a 340-350°. Vennero usati 10 grammi di alcol. In questa esperienza occorsero circa due ore per farne passare la massima parte attraverso il tubo di catalisi. Nel collettore si raccolsero due liquidi non miscibili, e non si ebbe il minimo sviluppo gassoso, oltre a quello iniziale dovuto alla dilatazione durante il riscaldamento e che infatti era costituito da solo azoto.

Finita l'esperienza, e dopo il raffreddamento, l'apparecchio venne smontato, e si constatò che la massa del catalizzatore era divenuta leggermente grigia, assai probabilmente per leggera carbonizzazione. Nella parte del tubo verso il collettore, che durante l'esperienza emergeva dal forno, le pareti erano ricoperte di un leggero strato di alcool cetilico inalterato.

Dei due strati liquidi quello superiore (circa 6,3 cc.) aveva reazione neutra, quello inferiore (circa 0,5 cc.) aveva reazione acida. Questo dal suo punto di congelamento e dal suo punto di ebollizione risultò essere costituito da acqua contenente in soluzione piccola quantità di una sostanza acida, che tuttavia non venne identificata.

Lo strato superiore era costituito da un liquido che congelava tra $+5^{\circ}$ e $+4^{\circ}$; trattato con acqua di bromo, ne assorbiva rapidamente una notevole quantità dando un bromoderivato che raccolto e purificato per assorbimento su piastra porosa raffreddata a -5° fondeva poi a $+15^{\circ}$.

Da queste sue proprietà si può arguire che esso era essenzialmente costituito da esadecilene (P. F. dell'esadecilene puro $+4^{\circ}$; P. F. del bromoderivato $+14^{\circ}$). Il mancato sviluppo gassoso e la formazione di acqua nella quantità pressochè teorica rispetto all'esadecilene formato, fanno ritenere che anche l'alcool cetilico in queste condizioni venga essenzialmente disidratato ad esadecilene.

OSSIDO DI ZINCO. — Se si mantengono le stesse condizioni dell'esperienza precedente; ma in luogo dell'ossido di alluminio nel tubo di catalisi si pone ossido di zinco, la decomposizione dell'alcool cetilico avviene in modo del tutto diverso.

Durante l'esperienza durata circa due ore si ebbe un continuo sviluppo gassoso. Quando si ritenne che la massima parte dell'azoto era stata spostata, si raccolse, per l'analisi, un campione del gas sviluppato. Tuttavia, per la piccola quantità di alcool cetilico usato, non si riuscì mai a spostare completamente l'azoto ed in tutte le analisi si ottenne sempre una percentuale di circa il 10% di gas inassorbibile ed incombustibile. I risultati seguenti rappresentano la media di tre analisi e si riferiscono a gas privo di azoto.

CO_2	C_nH_{2n}	CO	$\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$	H_2
1.40	2.30	3.24	—	93.06

Nel collettore si raccolsero soltanto prodotti solidi a temperatura ordinaria. Il punto di fusione di questi risultò $+61^{\circ}$. Per la forte quantità di idrogeno ottenuto e l'assenza di acqua era da ritenere che la reazione principale in questo caso fosse stata quella di deidrogenazione con formazione di aldeide palmitica. Secondo Le Sueur⁽¹⁾ questa fonde a 34° , ma polimerizza facilmente dando un trimero $(\text{C}_{16}\text{H}_{32}\text{O})_3$, che fonde a $+73^{\circ}$.

(1) « Chem. Soc. » 87, 1888 (1906).

Supponendo che la massa solida ottenuta potesse essere una miscela di alcool cetilico passato inalterato e di aldeide palmitica polimerizzata, si procedette alla loro separazione approfittando della quasi insolubilità di questa nell'etere etilico, in opposto alla facile solubilità dell'alcool cetilico in questo solvente.

La massa venne estratta ripetutamente con etere a freddo. Il residuo lasciato in essiccatore su piastra porosa per alcuni giorni nel vuoto, fondeva a 71° , punto molto vicino a quello ottenuto da Le Sueur per $(C_{16}H_{32}O)_3$, ed era completamente solubile in cloroformio ed in benzolo. Tuttavia non si riuscì ad ottenere la sua depolimerizzazione mediante distillazione a pressione ridotta.

Per evaporazione dell'estratto eterico si ottenne una massa solida che fondeva a 49° , costituita da alcool cetilico.

Si deve pertanto ritenere che la deidrogenazione dell'alcool cetilico in queste condizioni sia la reazione principale e che oltre alla polimerizzazione dell'aldeide palmitica non si abbiano reazioni secondarie in ammontare considerevole, come lo dimostra anche la composizione dei gas svolti.

SESQUIOSSIDO DI CROMO. — Vennero usati circa venti grammi di alcool cetilico.

Durante l'esperienza, durata circa due ore, si ha anche in questo caso un notevole sviluppo gassoso. La composizione del gas ottenuto differisce notevolmente da quella ottenuta nel caso precedente:

CO	C_nH_{2n}	CO	C_nH_{2n+2}	H_2
10.2	5.3	5.1	12.0	67.4

Data la quantità relativamente piccola di idrocarburi saturi non venne eseguito il loro frazionamento. Nel collettore si raccolse una massa semisolida; spremendo questa su filtro di porcellana porosa a temperatura ordinaria si ottenne un liquido nel quale per raffreddamento si poté riscontrare una piccola quantità di esadecilene. Nella parte solida rimasta sul filtro si poté riscontrare la presenza di aldeide palmitica polimerizzata e di alcool cetilico indecomposto nel modo visto sopra. La maggior quantità di anidride carbonica, di ossido di carbonio, e di idrocarburi inferiori riscontrati nei gas starebbe a dimostrare che in questo caso avviene una più profonda decomposizione ulteriore dei prodotti di scomposizione primaria.

SESQUIOSSIDO DI FERRO. — L'andamento della decomposizione con questo ossido fu in tutto simile a quello ottenuto coll'ossido di cromo. I gas sviluppati avevano la seguente composizione media:

CO_2	C_nH_{2n}	CO	C_nH_{2n+2}	H_2
14.8	tracce	10.9	12.2	62.5

Anche in questo caso come prodotti solidi si ottenne una miscela di alcool cetilico inalterato e di $(C_{16}H_{32}O)_3$. Dalla percentuale di idrogeno ottenuta si può dedurre che la maggior parte dell'alcool che entra in reazione subisce la deidrogenazione, che anche in questo caso è accompagnata da una più profonda decomposizione.

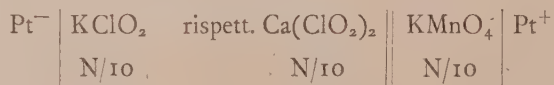
Riassumendo: l'alcool cetilico alla temperatura di $340-350^\circ$ in presenza degli ossidi di alluminio, zinco, cromo, ferro, si comporta in modo perfettamente analogo agli altri alcoli primari a minore numero di atomi di carbonio.

La sua disidratazione con ossido di alluminio offre un metodo molto semplice, e con ottimo rendimento, per la preparazione dell'esadecilene, che ci serve ora per la preparazione di alcoli polivalenti, che necessitano per le nostre ricerche.

Chimica. — *Pile di ossidazione e riduzione di cloriti alcalini* ⁽¹⁾.
Nota II ⁽²⁾ di G. R. LEVI e D. GHIRON, presentata dal Socio G. BRUNI.

In una Nota precedente abbiamo riferito su diverse pile nelle quali il clorito si riduce a cloruro in ambiente neutro: rimandiamo a quella Nota per le modalità al riguardo e riferiamo nella presente su alcune altre reazioni a potenziale più o meno ben definito: riportiamo in primo luogo i risultati di alcuni esempi in cui il clorito si ossida a clorato e cioè il platino, elettrodo del comparto clorito, si carica negativamente.

1. Pila clorito potassico (o di calcio)-permanganato potassico.



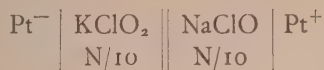
Il potenziale della pila, nella quale il clorito passa a clorato e il permanganato a biossido di manganese, è 0.175 volta a 20° .

Se si usa il clorito potassico si ha questo valore inizialmente ma poi, per l'alcali liberatosi, il potenziale sale rapidamente oltre 0.4 volta e non si ha stabilizzazione della pila: usando invece del clorito di calcio che dà l'alcalinità in Ca(OH)_2 , il che aiuta la precipitazione di MnO_2 come manganese di calcio, si ha un valore che si mantiene perfettamente costante a 0.175 volta.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Presentata all'Accademia il 14 luglio 1930.

2. Pila clorito potassico-ipoclorito sodico.



L'ipoclorito sodico impiegato era un prodotto del commercio che fu diluito alla N/10 rispetto al peso di NaClO. In tali condizioni la soluzione presentava un'alcalinità N/30.

A 20° la pila dava inizialmente il valore 0.084 volta che saliva a 0.100 volta in qualche ora per poi diminuire regolarmente in funzione del tempo.

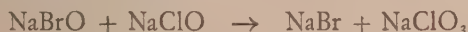
La caratteristica di questo risultato è data dal fatto che il platino dello scomparto clorito funziona da elettrodo negativo in accordo con il meccanismo di reazione.



dato da Dolch (1).

Analogo risultato si ha dall'azione degli ipobromiti sui cloriti, sebbene la pila abbia un valore più basso: (circa 0.06 volta inizialmente).

Il potenziale sale a 0.08 fino a 0.09 volta senza stabilizzarsi; l'analisi del meccanismo di reazione.



risulta dal fatto che il platino del comparto clorito funziona da elettrodo negativo.

Nella pila ipoclorito-ipobromito si hanno valori assai più bassi (circa 1/10); anche in essa è l'ipoclorito che si ossida e l'ipobromito che si riduce.

Per quanto riguarda la reazione ipioditi-cloriti nulla si può affermare dalla pila corrispondente, che presenta valori intorno a 0.1 volta ed è di segno invertito rispetto alle precedenti. Nulla si può dedurre perchè, come abbiamo mostrato in un precedente lavoro (2) la pila ioduro-clorito è dello stesso segno di questa e ioduri sono di necessità, presenti anche in questo caso.

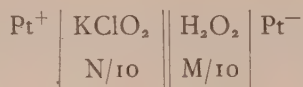
Per la stessa ragione non possiamo dar valore alle pile di ipocloriti o ipobromiti contro ipioditi nelle quali naturalmente l'elettrodo del comparto ipiodito + ioduro funziona da negativo.

3. Pila clorito potassico-acqua ossigenata.

(1) *Dissert.*, Dresda 1912, FOERSTER, *Elektrochemie wässriger Lösungen*, 1923, p. 657.

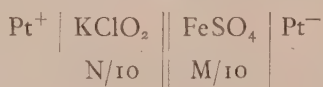
(2) Questi « Rendiconti », fascicolo n. 12, p. 1104.

Per decomporre rapidamente i cloriti, senza alterare i clorati eventualmente presenti basta evaporare a bagno maria due o tre volte la soluzione in presenza di un eccesso di acqua ossigenata come ha mostrato Dolch (loc. cit.) e come noi stessi abbiamo potuto confermare. La pila di riduzione del clorito:



ha a 20° il valore iniziale 0.20 volta che sale poi a circa 0.25 volta senza diventare costante.

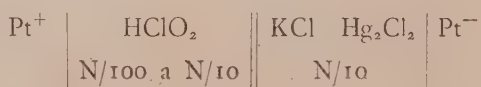
4. Pila clorito potassico-solfato ferroso.



La pila si stabilizza a 0.253 volta abbastanza rapidamente,

Sulla stabilità delle soluzioni di acido cloroso.

Nulla è noto finora sull'esistenza o meno dell'acido cloroso libero. La presenza di cloruri nelle soluzioni esaminate da precedenti autori non permette di trarre alcun indizio, data l'azione immediata dell'acido cloroso sul cloridrico. Abbiamo perciò condotto due serie di ricerche preliminari su soluzioni di clorito potassico N/10 perfettamente puro, le prime per stabilire la forza elettromotrice della pila



a diverse temperature, le seconde rineutralizzando esattamente dopo tempi diversi le soluzioni di acido cloroso e dosando poi i cloruri formatisi per alterazione.

Le misure di forza elettromotrice sono state fatte a 0° e a 20° liberando rispettivamente 1/10, 2/10, 5/10, 9/10 e il totale dell'acido cloroso presente a mezzo di acido solforico titolato. Le osservazioni sono state condotte da 2 minuti dopo l'acidificazione fino a 2 o 3 ore da essa a intervalli regolari. Dalla curva si risale al valore pel tempo zero che a 0° si è mostrato in 0.57 volta circa e a 20° in 0.58 volta circa per le soluzioni in cui si era liberato metà dell'acido cloroso presente. Si sono osservate in funzione del tempo variazioni di non più di 1/100 di volta per ora, senza

bruschi cambiamenti, e perciò non si può da queste misure trarre alcuna conclusione precisa: anche quando la soluzione incominciava ad ingiallire non si notavano importanti cambiamenti nel potenziale della pila.

Risultati assai più netti ci hanno dato i confronti di soluzioni di clorito potassico acidificate a 25° in modo da liberare 1/2 o il totale dell'acido cloroso presente e neutralizzate rispettivamente dopo 1, 5 e 15 minuti. Le soluzioni venivano lasciate a se tre ore poi precipitate con nitrato d'argento e il cloruro raccolto su filtro a solfato di bario, essendo il precipitato assai disperso. Il cloro trovato è stato rispettivamente 1.06 e 2.80 e 6.09 % del totale. Non si sono avuti valori diversi per acidificazione maggiore o minore: naturalmente la percentuale è calcolata sull'acido cloroso effettivamente liberato. È lecito pensare che circa 1/4 del cloro presente possa passare a cloruro dato che quello che passa a ipoclorito all'alcalinizzazione si riduce poi a cloruro agendo sul biossido di cloro: da questi numeri si conclude dunque che mentre dopo 1 minuto a 25° la decomposizione dell'acido cloroso è stata del 4 % dopo 15 minuti essa corrisponde a circa 25 % del totale. L'acido cloroso è quindi capace di esistenza come tale per breve tempo in soluzioni diluite: tale conclusione ha per noi interesse per tentare ulteriori studi con l'acido cloroso libero.

RIASSUNTO.

Vengono studiate le seguenti pile di ossidazione dei cloriti a clorati a 20° (elettrodo negativo il platino del comparto clorito) ottenendo in volta per soluzioni N/10 i seguenti valori:

	MnO_4^+	ClO^-
ClO_2^-	0.175	0.10

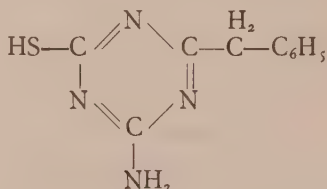
e analogamente le seguenti pile di riduzione (polarità invertita):

	H_2O_2	Fe^{++}
ClO^-	~ 0.25	0.253

Viene misurato il potenziale di riduzione dell'acido cloroso libero contro l'elettrodo a calomelano, nonchè la quantità di cloruri che si formano nella decomposizione dell'acido cloroso in funzione del tempo per stabilire il grado di alterabilità dell'acido stesso.

Chimica. — *Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di due aralchil-amino-tiol-triazine⁽¹⁾. Nota di A. OSTROGOVICH e V. GALEA⁽²⁾ presentata⁽³⁾ dal Socio R. NASINI.*

Benzil-amino-tiol-triazina.



Quest'isomero aralchilico delle tre *toluil-amino-tiol-triazine*, descritte nella Nota precedente, si prepara nelle stesse condizioni indicate per le *alchil-amino-tiol-triazine*, cioè facendo la condensazione a caldo. Alla fine della reazione, la sostanza si trova nel prodotto che rimane distillando l'alcool a bagnomaria in corrente d'anidride carbonica. Lavorando a freddo, come per i derivati arilici, il rendimento è molto minore. Per purificarla, si scioglie in idrato di sodio o di potassio diluito e quindi si riprecipita con acido acetico in piccolo eccesso.

Si ripete quest'operazione un paio di volte e quindi si fa ricristallizzare dall'alcool concentrato, in cui è facilmente solubile a caldo, ma assai poco a freddo. Si hanno così tavolette minutissime, trasparenti e incolori, che assomigliano molto a quelle della *etil-amino-tiol-triazina*. Dall'alcool acquoso si hanno aghettini prismatici minutissimi.

È difficilmente solubile in acqua soprattutto a freddo, alquanto solubile in acetone e cloroformio a caldo, insolubile in etere etilico ed in estere acetico.

Si fonde con decomposizione a 270° – 271° . Anche per questa sostanza il punto di fusione varia alquanto se si varia il modo di riscaldamento.

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{10}N_4S$
C %	55.02	55.00
H	4.70	4.62
N	25.63	25.68
S	15.02	14.70

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Cluj.

(2) Anche questo lavoro fa parte della tesi di laurea dei signor GALEA.

A. OSTROGOVICH.

(3) Nella seduta del 30 maggio 1930.

Contrariamente al derivato benzilico, questa sostanza si prepara meglio a freddo e cioè, come è stato detto per i derivati arilici. Ma anche in questo modo il rendimento è assai più piccolo che per le altre tiol-triazine e, ciò che più monta, è assai difficile di purificare completamente la sostanza. Queste difficoltà si debbono certamente alla facile decomponibilità dell'acido *tiol-cinnamico* che serve per ottenere la sostanza.

La stiril-amino-tiol-triazina essendo ben poco solubile in alcool freddo (a caldo è invece parecchio più solubile), la maggior parte di essa si trova insieme col solfato potassico, da cui si separa nel solito modo.

Si purifica con ripetute precipitazioni frazionate dalla sua soluzione alcalina con acido acetico diluito e quindi si ricristallizza dall'alcool concentrato bollente. Si hanno così prismettini microscopici aventi una leggerissima tinta giallina e che si fondono con decomposizione a 284-285° dando un liquido vischioso bruno.

È praticamente insolubile in acqua fredda e assai poco in acqua bollente. È facilmente solubile in acido acetico glaciale, a caldo, e per aggiunta di un po' d'acqua, avendo cura di lasciar freddare lentamente, si ottengono cristallini microscopici incolori.

È alquanto solubile a caldo in acetone e cloroformio, insolubile in etere etilico e in estere acetico.

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{10}N_4S$
C %	57.29	57.34
H	4.42	4.35
N	23.72 ⁽¹⁾	24.40
S	13.92	13.91

La stiril-amino-tiol-triazina si scioglie bene negli idrossidi alcalini, ma assai più difficilmente in ammoniac.

È interessante che, finora, non siamo riusciti ad avere un sale d'argento bianco analogo a quello delle altre tiol-triazine. Si ottiene invece un precipitato rosso-bruno. Si sarebbe indotti a pensare che il doppio legame esistente nel radicale stirile possa avere influenza su questa diversità di comportamento; ma sta il fatto che il SALE RAMICO, giallo verdastro, perfettamente analogo agli altri, si può ottenere tanto da una soluzione ammoniacale della sostanza per aggiunta di solfato di rame e successiva neutralizzazione con acido acetico, quanto anche dalla soluzione della sostanza in idrossido di potassio per aggiunta del liquido del Fehling.

(1) È curioso che numerose determinazioni di azoto ci hanno dato sempre risultati inferiori al calcolato, nonostante che per gli altri elementi costitutivi i risultati analitici siano eccellenti.

Negli acidi minerali diluiti la stiril-amino-tiol-triazina si scioglie bene e con l'acido picrico dà un PICRATO in prismettini acicolari di color *giallo arancione*, abbastanza solubili in acqua bollente e poco a freddo e fusibili con decomposizione a 221°-222° dando un liquido vischioso rosso-bruno.

	Trovato	S % 6.93
per $C_{11}H_{10}N_4S \cdot C_6H_3N_3O_7$	Calcolato	6.98

RIASSUNTO.

In questa Nota si descrive la formazione di due nuove tiol-triazine, la *benzil-* e la *stiril-amino-tiol-triazina*.

La prima si prepara col metodo valevole per le alchil-amino-tiol-triazine, mentre la seconda si prepara meglio col metodo più adatto per i derivati arilici. Si descrivono inoltre le loro proprietà, la prima fusibile con decomposizione a 270-271° e la seconda fusibile con decomposizione a 284-285°, e così pure quelle di alcuni dei loro sali. In quanto alla stiril-amino-tiol-triazina, essa si ottiene con un rendimento assai più scarso delle altre ed è molto più difficile a purificarsi completamente.

Geologia. — *Di una peculiare asimmetria dei fiseteridi (asimmetria emapofisaria) e delle sue relazioni con l'asimmetria cranica.* Nota ⁽¹⁾ di C. RICHARD, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Fra i numerosi ed interessantissimi resti di un *Physeter* fossile, recentemente estratti dalle sabbie gialle (plioceniche) dell'Astigiano ⁽²⁾, lo studio ed il restauro dei quali mi sono stati gentilmente affidati dal mio Direttore, prof. C. F. Parona, ho trovato, fra altre in istato assai frammentario, una emospina la quale presenta un'asimmetria che ritengo degna di studio, sia per le spiccate analogie di carattere che presenta con quelle dei fiseteridi attuali, e che finora non sono mai state osservate, sia per le relazioni che ci dimostra intercorrere fra essa e l'asimmetria cranica, peculiare degli odontoceti.

Detta emospina appartiene, presumibilmente, alla terza emapofisi: dico *presumibilmente*, perchè la forma delle emapofisi varia notevolmente da in-

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1930.

(2) C. F. PARONA, *Resti di un «Physeter» scoperti nel Pliocene (Astiano) di Vigliano d'Asti, in frazione Val Montasca.* «Atti R. Acc. d. Sc.», LXV, 1930.

dividuo a individuo, pur della stessa specie⁽¹⁾, dipendendo essa da numerosi fattori, primo fra tutti quello dell'età.

Le sue dimensioni sono: lunghezza mass. mm. 160, larghezza mm. 120, spessore del margine mm. 25, spessore all'origine dell'arco emale mm. 52.

Come appare con perfetta evidenza dalla fig. 1, riproducente l'emospina (gr. $\frac{1}{2}$) dalla parte dell'orlo anteriore, havvi una marcatissima distorsione verso sinistra, con una freccia di incurvamento di ben 14 mm. Se invece della sola emospina, fosse stata rinvenuta tutta l'emapofisi completa, vi si sarebbe misurata una freccia superiore, certo, al doppio di quella dell'emospina.



Fig. 1.

La distorsione è tale, che dalla parte destra non esiste freccia d'incurvamento, nè esisterebbe, forse, pur nel caso in cui si fosse conservata la lamina corrispondente dell'arco emale, o quanto meno sarebbe piccolissima.

La presenza di tale particolare anomalia emospinale mi fece sorgere la curiosità di verificare se essa rappresentava un fenomeno patologico casuale, sporadico, ovvero se era un'anomalia, dirò, normale, conservatasi nei fiseteridi attuali. E fu così che, in occasione di una visita recentemente compiuta in diversi Musei di Anatomia Comparata, e fra essi in quelli di Pisa e di Bologna nei quali sono conservati dei bellissimi scheletri completi di *Physeter macrocephalus*, procedetti ad un particolareggiato esame delle emapofisi, raccogliendo altresì dati e misure relativi alle loro frecce di curvatura.

Potei così constatare che tutte presentavano una distorsione più o meno marcata.

Nella seguente tabella ho raccolto i dati relativi ai vari scheletri, ponendo nell'ultima colonna di destra, al posto spettante, la misura dell'emapofisi, considerata come completa, dello scheletro fossile di Torino, ricavata raddoppiando il valore della freccia di incurvamento dell'emospina. Le misure sono in mm. Con f' ho indicato la freccia destra, con f'' la freccia sinistra.

(1) W. H. FLOWER, *On the osteology of the Sperm-Whale*. « Trans. of the Zool. Soc. of London », p. 351, VI, 1869.

N.º d'ordine delle emapofisi	Scheletri di Pisa				Scheletro di Bologna		Scheletro di Torino	
	N.º 1		N.º 2		f'	f''	f'	f''
	f'	f''	f'	f''				
1	—	—	—	—	—	—	—	—
2	—	—	—	—	15	21	—	—
3	20	12	21	23	21	31	—	28 (= 14 × 2)
4	7	43	27	46	21	30	—	—
5	12	34	35	37	—	—	—	—
6	16	36	22	22	25	27	—	—
7	14	37	23	26	17	20	—	—
8	17	26	leggera incurvatura a sinistra		19	20	—	—
9	14	24	incurvata a destra		18	15	—	—
10	14	20	incurvata a destra		11	10	—	—
11	10	15	—	—	—	—	—	—
12	10	12	—	—	—	—	—	—
13	6	8	—	—	—	—	—	—
14	3	5	—	—	—	—	—	—

Come accennai poco dianzi, gli scheletri di Pisa e di Bologna appartengono alla specie *Physeter macrocephalus*: quello, invece, dell'Istituto Geologico di Torino, appartiene ad una specie affine all'*australis* attuale⁽¹⁾.

Osservando la tabella precedente risulta subito evidente il fatto che l'assoluta maggioranza delle emapofisi di tutti gli scheletri presenta una netta distorsione verso sinistra: in alcune, anzi, la distorsione è notevolissima, come, ad es., nella quarta dello scheletro n. 1 di Pisa, nella quale la freccia di destra ha 7 mm. di lunghezza e quella di sinistra 43 mm.!

(1) VAN BENEDEN P. J. et GERVAIS P., *Osteographie des Cétacés vivants et fossiles, comprenant la description, ecc.*, Paris, 1880.

Il «*Physeter australis*» descritto e figurato in quest'opera, corrisponde al «*Physeter macrocephalus*» descritto e figurato dal FLOWER nell'opera dianzi citata. Cfr. C. F. PARONA, loc. cit.

Soltanto poche emapofisi, e cioè la nona e la decima dello scheletro n. 2 di Pisa, e la nona e decima dello scheletro di Bologna, presentano distorsione a destra. Lo scheletro n. 1 di Pisa, invece, non presenta in alcuna emapofisi distorsione a destra. Questo fatto è interessante, in quanto potrebbe darsi che avesse relazione coll'età dell'animale, poichè i primi due scheletri sono di individui adulti, l'ultimo di individuo giovane: ci troviamo cioè in presenza, forse, di uno dei tanti esempi di variabilità di caratteri, legati coll'età, che si riscontrano nei Cetacei.

Tuttavia, fatta eccezione di queste poche emapofisi, tutte le altre presentano una netta curvatura a sinistra, raggiungendo in generale il massimo valore di distorsione in corrispondenza della terza o della quarta.

Quali possono essere le cause di tale anomalia scheletrica?

Consideriamo il caso di un Capodoglio in condizione di riposo, ossia col corpo completamente disteso, in posizione rettilinea.

Per passare dalla condizione di riposo a quella di moto, l'animale deve piegare la coda da un lato, facendo percorrere ai lobi caudali, mediante un rapido movimento laterale, un arco di cerchio più o meno grande, secondo l'impulso più o meno forte che vuol dare al proprio corpo.

Come sappiamo, i lobi caudali dei cetacei sono disposti in posizione inclinata rispetto al piano sagittale dell'animale, e sono diversamente sviluppati, uno essendo più lungo dell'altro.

Per effetto del movimento laterale, detti lobi funzionano come le pale di un'elica, e sviluppano una forza propulsiva che serve ad imprimere il moto d'avanzamento all'animale.

Giunti i lobi alla fine della corsa laterale, o massima elongazione, vengono dall'animale o riportati nella posizione di riposo, o in una posizione simmetrica alla prima rispetto al piano sagittale, secondochè intende fermarsi ovvero intende proseguire nell'avanzamento. In quest'ultimo caso, dopo aver raggiunto il *punto morto*, i lobi vengono nuovamente spostati con forza e rapidità, compiendo così una nuova *corsa utile*. Ma le *corse utili*, nel caso dei Cetacei, non possono avvenire indifferentemente durante gli spostamenti della coda da destra a sinistra e da sinistra a destra, come, ad es., nei pesci, perchè i lobi, ossia le pale dell'elica, sono, come già abbiamo detto, inclinate rispetto al piano sagittale dell'animale, e siccome l'inclinazione è fissa, così non possono propellere che in un solo senso del loro movimento. E per i *Physeter*, ad es., nei quali l'inclinazione è da sinistra a destra, ed il lobo più sviluppato è quello più basso, la propulsione avviene, per ragioni meccaniche che qui non è il caso di spiegare, nel movimento da destra a sinistra.

Orbene, in questi spostamenti alternati della coda, gli sforzi dei muscoli latero-caudali sono ben differenti dall'uno all'altro lato del corpo, in quanto è ben maggiore la forza occorrente a spostare i lobi caudali da destra a sinistra, in cui avviene il movimento di propulsione, che non da

sinistra a destra, in cui non avviene che il movimento di ritorno dei lobi al punto di partenza.

Ne viene, quindi, come conseguenza, che anche le ossa alle quali sono inseriti i muscoli latero-caudali, in special modo le emapofisi, debbono fortemente risentire gli effetti di simili sforzi differenziali, per cui tendono a piegarsi, ad incurvarsi, dalla parte dello sforzo maggiore. E siccome nel caso dei « *Physeter* » lo sforzo maggiore si verifica dal lato sinistro, in quanto sono i muscoli sinistri che provocano lo spostamento da destra a sinistra della coda, cioè la *corsa utile* dei lobi caudali, così è dal lato sinistro che le emapofisi debbono incurvarsi. Ed invero, come abbiamo visto nella precedente tabella, è appunto dal lato sinistro che la massima parte delle emapofisi è distorta.

Questo fenomeno della distorsione emapofisaria è interessante sia per il naturalista, sia per il paleontologo: per il naturalista, in quanto serve ad indicargli da qual parte l'odontoceto *batte* l'acqua, ossia qual'è la direzione dell'inclinazione dei lobi caudali ed in qual senso avviene la loro *corsa utile*; per il paleontologo, in quanto serve ad assicurargli che l'odontoceto, di cui egli studia i resti fossili, era provvisto di organi propulsori simili e similmente disposti a quelli degli odontoceti affini, attuali.

Così, ad es., l'emospina del *Physeter* fossile del Museo Geologico di Torino, presentando una distorsione a sinistra, indica che quest'animale, allo stato vivente, presentava delle caratteristiche morfologiche caudali perfettamente simili a quelle dei *Physeter* di specie affini attuali.

Ma altra grandissima importanza presenta il fenomeno dell'asimmetria emapofisaria: esso fornisce la chiave per la soluzione del vecchio ed insoluto problema della distorsione cranica degli odontoceti.

Il dott. Celso Borri, dell'Università di Pisa, in una recente Memoria ⁽¹⁾, ha diffusamente e con profonda competenza trattato della morfologia dinamica dei Cetacei, riferendosi alle osservazioni fatte da diversi autori (Beale, Murie, Flower, Fischer, Van Beneden, Richiardi, ecc.) su mandibole di Capodoglio, ed anche di vari mysticeti, curvate in alto e di lato, ed interpretate come casi patologici; ha pure esaminato le teorie di Kükenthal ⁽²⁾ e di Houssay ⁽³⁾, relative alla distorsione delle ossa del cranio degli odontoceti ed alle supposte cause che la producono, ed è giunto alla conclusione che tali teorie, buone per la morfologia dinamica dei pesci, non sempre sono applicabili ai Cetacei, e perciò, malgrado la genialità degli esperimenti di Houssay

(1) C. BORRI, *Morfologia dinamica dei Cetacei*, « Atti della Soc. Tosc. di Sc. Nat. », XXXIX, 1928.

(2) W. KÜKENTHAL, *Ueber die Ursache der Asymmetrie des Walschadels*, « Anat. Anz. », Bd. 33, Jena, 1908.

(3) F. HOUSSAY, *L'asymétrie du crâne chez les Cétacés et ses rapports avec la loi de l'action et de la réaction*, « Anat. Anz. », Bd. 36, Jena, 1910.

e l'importanza dei risultati ai quali egli è giunto, alle sue conclusioni non può essere attribuito un valore generale⁽¹⁾.

Com'è noto, la teoria di Kükenthal è fondata sull'osservazione, da questi fatta, dell'asimmetria dei lobi caudali dei Cetacei, e sulla loro obliquità rispetto al piano sagittale dell'animale, traendone come conseguenza che essi agiscono tagliando l'acqua lateralmente e obliquamente, causando in tal modo una rotazione del corpo da destra verso sinistra e di conseguenza una maggiore pressione dell'acqua sul lato sinistro della parte anteriore: da ciò l'asimmetria del cranio.

L'Houssay, a sua volta, modificando alquanto la teoria precedente, introdusse in essa il principio di reversibilità fra azione e reazione. Immaginò che sul corpo dei Cetacei, per effetto del loro moto di avanzamento nell'acqua, si venisse a costituire uno strato di filetti liquidi, diretti in senso cranio-caudale e formanti un vortice elicoidale, destrogiro: per effetto della reazione, il corpo dell'animale tenderebbe a ruotare in senso opposto.

A questo movimento di rotazione si opporrebbe l'azione equilibratrice delle alette pettorali e caudale, oltrechè della pinna dorsale, ove esiste; e quest'azione equilibratrice produrrebbe, come conseguenza, una maggior pressione dell'acqua dalla parte anteriore sinistra del corpo, che avrebbe per effetto la distorsione del cranio.

Delle due teorie, la più vicina alla verità è certo quella del Kükenthal; tuttavia vi sono in essa delle lacune che rendono la spiegazione del fenomeno poco convincente.

Assai più semplice, invece, e più rispondente ai principi generali della Meccanica animale, si presenta la soluzione del problema se si pone il fenomeno dell'asimmetria cranica in relazione con quello dell'asimmetria empofisaria.

Consideriamo la fig. 2. In essa è rappresentato, schematicamente, il corpo di un Capodoglio, con la coda in tre posizioni differenti, e cioè nella posizione retta A, e nelle due posizioni estreme A' ed A'', cioè nei punti morti destro e sinistro. Immaginiamo la coda piegata a destra, cioè nel punto morto di destra, pronta quindi a scattare verso sinistra e a compiere una corsa utile per propellere il corpo in avanti.

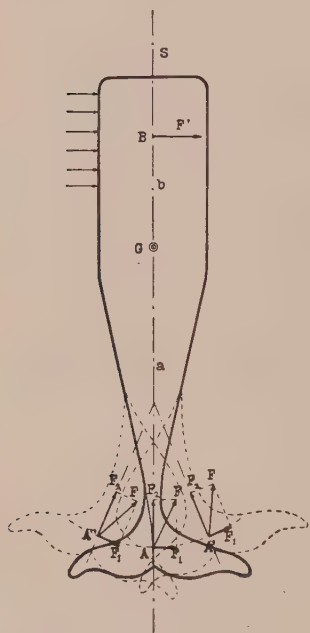


Fig. 2.

(1) C. BORRI, loc. cit., p. 43.

Supponiamo che si inizi il movimento laterale verso sinistra: immediatamente fra i lobi caudali e l'acqua si origina una pressione che chiamerò *reciproca*, perchè i lobi caudali premono contro l'acqua e l'acqua, a sua volta, preme contro i lobi caudali.

La pressione, per reazione, dell'acqua contro i lobi caudali dà origine, per effetto del movimento di questi ultimi (fig. 2), a due forze F_1 ed F_2 , applicate al baricentro A dei lobi, e dirette, rispettivamente, la F_1 secondo la tangente alla traiettoria descritta dal baricentro A nello spostamento da A' ad A'' ed in senso contrario a questo spostamento, la F_2 secondo l'asse del tronco caudale ed in senso centripeto. La F_1 rappresenta la resistenza dell'acqua contro i lobi caudali, la F_2 la forza di propulsione.

La risultante di queste due forze, è una forza F, rappresentata, come sappiamo, dalla diagonale del parallelogramma delle forze F_1 e F_2 .

Orbene, se noi osserviamo la direzione della forza F nelle diverse posizioni A', A, A'', vediamo che essa è costantemente inclinata verso destra rispetto al piano sagittale di traccia S, ossia questa forza tende ad imprimere un movimento rotatorio, levogiro, al corpo dell'animale attorno all'asse di galleggiamento passante per il centro di gravità G.

Affinchè questo movimento di rotazione non avvenga, è necessario che esista una forza F', applicata all'asse S in un punto B, situato dalla banda opposta di A rispetto al centro G, e posto ad una distanza tale da G che (chiamando $AG = a$, $BG = b$) sia:

$$\alpha) \quad F' \times b = - F \times a$$

ossia

$$\beta) \quad (F' \times b) + (F \times a) = 0$$

La forza F', situata dalla parte craniale dell'animale e diretta in senso opposto alla F, si origina automaticamente ad ogni colpo *utile* della coda, cioè ad ogni spostamento di questa da destra a sinistra, ed è prodotta semplicemente dalla pressione dell'acqua contro la parte sinistra del capo.

Data la forma particolare del corpo del Capodoglio, l'asse di galleggiamento è spostato notevolmente verso l'estremo anteriore, e perciò il braccio di leva b è notevolmente più corto del braccio di leva a , e quindi, per la α), deve essere $F' > F$, ossia la forza applicata in B è notevolmente maggiore di quella applicata in A; quindi *sulla parete sinistra del cranio si esercita, ad ogni colpo utile di coda, una pressione di notevole intensità.*

Questa pressione, ripetuta ed istantanea, tende, ovviamente, a produrre, e produce, la distorsione delle ossa craniali verso destra. La grandezza della deformazione dipende dall'intensità della pressione laterale, e conseguentemente dall'intensità della forza laterale prodotta da ogni colpo *utile* della

coda: e quest'ultima forza varia, ovviamente, da specie a specie di Odontoceti, in quanto dipende da vari fattori, primi fra i quali la forma più o meno affusata o *penetrante* della parte anteriore del capo, e l'inclinazione maggiore o minore dei lobi caudali rispetto al piano sagittale dell'animale.

Ci si potrebbe chiedere come mai i Mistacoceti, pur possedendo dei mezzi di propulsione molto simili, per non dire identici, a quelli degli Odontoceti, non presentanò alcuna distorsione craniale.

Senza entrare in una discussione particolareggiata che mi trascinerebbe lungi dall'argomento sin qui trattato, dirò semplicemente che, a parer mio, la mancanza di distorsione craniale nei Mistacoceti è dovuta soprattutto, e forse esclusivamente, alla forma delle ossa craniche, specialmente delle mandibolari (mancanti di sinfisi mentoniera, e quindi a collegamento apicale elastico e non rigido come negli Odontoceti), nonchè alla gran massa di parti molli, carnose, costituenti la lingua e le pareti della bocca, le quali, occupando tutta la cavità orale, funzionano da cuscinetti elastici, assorbendo quasi totalmente la pressione laterale dell'acqua, così che questa è trasmessa alle ossa con un'intensità molto minore che non nel caso degli Odontoceti. Ma, ripeto, questo è un argomento che richiederebbe una lunga disamina, ed io non intendo uscire dai limiti preposti.

Riassumendo, quindi, possiamo dire che il fenomeno della distorsione sinistrorsa delle emapofisi, e destrorsa delle ossa craniche dei fiseteridi, è dovuto semplicemente a due azioni meccaniche concomitanti e correlative: la prima, alla differente intensità degli sforzi compiuti dai muscoli latero-caudali destri rispetto a quelli sinistri; la seconda, alle pressioni laterali sinistre che si sviluppano ad ogni colpo *utile* di coda.

Ridotta la soluzione entro questi modesti termini, essa risponde meglio ai principi generali della Meccanica animale, la quale tende costantemente a risolvere i problemi più complessi coi mezzi più semplici.

Biologia. — *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte*
 $\lambda = 2-3$ m., sui bachi da seta. Nota⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI e
E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

Fin dal 1927 perseguiamo senza interruzione esperienze sull'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. sui semi, sulle piante, sui microorganismi⁽²⁾.

L'influenza favorevole riscontrata sui vegetali, ci ha spinto ad osservare quale sarebbe la loro azione sugli animali.

Le nostre prime esperienze, di proposito furono rivolte ai bachi da seta, perchè si può facilmente fare l'irradiazione del seme prima della schiusura, e si può inoltre irradiare i bachi stessi durante l'allevamento.

Le esperienze eseguite hanno posto subito in evidenza come anche qui venga confermata l'azione favorevole riscontrata sui vegetali⁽³⁾.

Tanto i vegetali che gli animali rispondono all'azione delle onde elettromagnetiche ultracorte, con un più rapido e più forte sviluppo quando siano fissate le condizioni di *optimum* di irradimento.

L'anello aperto di Lakhowsky applicato ai bachi in corso di sviluppo diede per quanto in grado minore, azione favorevole: comportamento simile avevano osservato i prof. Castaldi e dr. Maxia nella ontogenesi degli anfibi anuri⁽⁴⁾.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1930.

(2) G. MEZZADROLI et E. VARETON, *Influence des radiations astrales de courte longueur d'onde sur la germination des semences et sur la croissance des plantes*. Note préliminaire. Huitième Congrès de Chimie Industrielle, juillet 1928; ID. e ID., *Azione esercitata da un circuito metallico oscillante sulla germinazione dei semi*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. IX, serie 6^a, 2° sem., fasc. 5/6, 1929; ID. e ID., *Prove di confronto fra l'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.) e dal circuito oscillante Lakhowsky sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. X, serie 6°, 3° semestre, fasc. 5/6, 1929; ID. e ID., *Ulteriori ricerche sull'azione esercitata da un radio oscillatore per onde ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. sulla germinazione dei semi e sull'accrescimento delle piante*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XI, serie 6^a, 1° semestre, fasc. 2, 1930; ID. e ID., *Sulla possibile applicazione pratica delle onde corte per aumentare la germinazione dei semi e l'accrescimento delle piante*. Congresso di Barcellona, settembre 1929; «Chimie Industrie», marzo 1930, p. 521; ID. e ID., *Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte sul potere catalasico dei semi*. «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XI, serie 6°, 1° semestre, fasc. 4, 1930; ID. e ID., *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sulla germinazione dei semi, sull'accrescimento delle piante e sullo sviluppo dei microorganismi*. Rivista «Radio», anno XII, n. 3, marzo 1930.

(3) ID. e ID., *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. sui bachi da seta*. Nota preliminare. «Zymologica», aprile 1930, p. 56.

(4) CASTALDI e MAXIA., *Radiazioni mitogenetiche, Radiazioni cosmiche*. Comunicazione al 1° Congresso Italiano di Anatomia, Bologna, 9 ottobre 1929. MAXIA CARLO, *Effetti di circuiti oscillanti alla Lakhowsky sulla ontogenesi di anfibi anuri* «Scritti Biologici», vol. V, 1930.

Le onde elettromagnetiche vennero prodotte dal nostro Radio oscillatore tipo Eccles Mesney, opportunamente modificato (Mezzadroli), la di cui lunghezza d'onda sempre controllata è $\lambda = 2.80$ m. La loro applicazione fu fatta nel seguente modo: il seme ed i bachi stessi, vennero collocati entro un circuito oscillante posto in risonanza col radio oscillatore; le esposizioni furono in genere di 30-60 minuti giornalieri.

PARTE SPERIMENTALE.

Ci siamo serviti nelle nostre esperienze di seme bachi gentilmente fornitoci dalla R. Stazione di Gelsicoltura e Bachicoltura di Ascoli Piceno, e precisamente:

- seme razza pura giallo Ascoli:
- seme razza pura giallo Maiella.

Le prove vennero eseguite su diversi lotti di seme bachi costituiti ciascuno da prove da sottoporre all'azione delle onde corte, e da prove di confronto, ciascuna di 100 semi, o di 100 bachi.

Le esperienze furono divise in tre gruppi:

- 1° gruppo di esperienze: *irraggiamento dei bachi dopo nati*:
 - a) irraggiamento dei bachi al 15° giorno di vita,
 - b) irraggiamento dei piccoli bachi appena nati;
- 2° gruppo di esperienze: *irraggiamento dei semi prima della incubazione e nessun irraggiamento ai bachi nati*;
- 3° gruppo di esperienze: *irraggiamento dei bachi provenienti da seme irraggiato*.

PARTE I.

1° gruppo di esperienze: **IRRAGGIAMENTO DEI BACHI APPENA NATI.**

a) *Irraggiamento dei bachi al 15° giorno di vita.*

100 bachi vennero trattati a partire dal 15° giorno di vita per 30 minuti giornalieri, nelle condizioni già citate, con le onde elettromagnetiche ultracorte; 100 bachi vennero tenuti come prova di confronto.

La differenza fra i bachi irraggiati e quelli di confronto, che nei primi tempi di irraggiamento è minima, si accentua poi, di giorno in giorno diventa evidentissima, e colpisce a prima vista anche l'osservatore più inesperto. I bachi irraggiati sono molto più grandi e sviluppati di quelli di confronto, tutto il loro ciclo di vita è anticipato, essi sono inoltre molto uguali, nè si nota fra di essi nessuno dei cosiddetti « scartini » (bachi molto più piccoli degli altri) che invece sono presenti nella prova di confronto.

Per porre in evidenza con dati questa differenza, riportiamo il peso medio e la lunghezza media dei bachi appartenenti alle due prove.

Dopo 20 giorni dall'inizio dell'irraggiamento.

	Bachi prova di confronto	Bachi sottoposti all'azione delle onde elettromagnetiche
Lunghezza media	40 mm.	55 mm.
Peso medio μ	730 mgr.	1.550 mgr.

Percentuale in più sulla lunghezza dei bachi sottoposti alle onde corte: 37.5 %
 » » » nel peso dei bachi sottoposti alle onde corte: 112 %

Dopo 27 giorni dall'inizio dell'irraggiamento.

	Bachi prova di confronto	Bachi sottoposti all'azione delle onde elettromagnetiche
Lunghezza media	65 mm.	80 mm.
Peso medio	2.900 mgr.	4.000 mgr.

Percentuale in più nella lunghezza dei bachi sottoposti alle onde corte: 23 %
 » » » nel peso dei bachi sottoposti alle onde corte: 37.9 %.

In questo giorno i bachi sottoposti all'azione delle onde corte, iniziano la salita al bosco.

Imbosatura. — Per quanto riguarda la salita al bosco del baco, cioè l'ultimo atto della vita del bombice allo stato di larva, fu osservato che questo avviene per i bachi irradiati, 4-6 giorni prima che i bachi della prova di confronto, i bachi irradiati hanno già tutti completato il loro bozzolo mentre i bachi della prova di confronto iniziano appena allora a filare il loro bozzolo.

Dal giorno in cui i bachi iniziano il loro bozzolo fu sospeso l'irraggiamento.

Bozzoli. — I bozzoli ottenuti vennero raccolti, poi pesati, in entrambe le prove, dopo un uguale tempo dall'inizio, affinché si trovassero nelle identiche condizioni di età.

Peso di 100 bozzoli provenienti da bachi irraggiati:	gr. 176.5
Peso medio dei bozzoli » » » » »	1.765
Peso di 100 bozzoli provenienti da bachi di confronto:	» 160
Peso medio dei bozzoli » » » » »	» 1.60.

Percentuale in più nel peso dei bozzoli dei bachi sottoposti all'azione delle onde ultracorte = 10.31 %.

Nascita delle farfalle. - I bozzoli provenienti dai bachi irradiati furono divisi in due gruppi; un gruppo *A* venne trattato ancora con le onde corte per 30 minuti giornalieri, fino alla nascita della farfalla, mentre l'altro gruppo *B* non venne più irradiato.

Le farfalle provenienti dal gruppo irradiato *A* e continuato ad irradiare, nascono in media cinque giorni prima di quelle di confronto del gruppo *B*. Le farfalle provenienti dai bozzoli di bachi che non furono mai irradiati nascono 4 giorni dopo di quelle provenienti dal gruppo *B* e nove giorni più tardi dal gruppo *A*.

Le farfalle provenienti dai diversi gruppi di bozzoli furono mantenute separate per continuare le esperienze in un prossimo anno, onde osservare se persista l'azione esercitata dalle onde ultracorte.

CONCLUSIONI E RIASSUNTO.

Fu sperimentata l'azione che le onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. esercitano sui bachi da seta, sottoposti alla loro azione per un periodo di tempo di 30 minuti giornalieri a partire dal 15° giorno della loro nascita e si poté annotare quanto segue:

1) Le onde elettromagnetiche sullo sviluppo dei bachi. Tutto il loro ciclo di vita viene accelerato ed essi presentano rispetto ai bachi confronto, della stessa età un peso maggiore (112 %) e una lunghezza pure maggiore (37 %) dopo 20 giorni dall'irradiazione. Al momento di salire al bosco le percentuali di maggiore peso e maggiore lunghezza sono rispettivamente le seguenti: 37.9 % e 23 %.

2) I bachi irraggiati con le onde elettromagnetiche iniziano la tessitura del bozzolo da quattro a sei giorni prima di quelli di confronto.

3) Il raccolto in pesi dei bozzoli provenienti dai bachi irraggiati è del 10 % in più di quello dei bachi di confronto.

4) Il rapporto peso involucro bozzolo, peso bozzolo totale è maggiore nei bozzoli provenienti dai bachi irraggiati e precisamente di 3.13 %.

5) Il peso degli involucri dei bozzoli provenienti dai bachi irraggiati è 3.52 % più elevato in peso rispetto a quelli di confronto.

6) Le farfalle dei bozzoli provenienti dai bachi irraggiati nascono circa 4 giorni prima di quello dei bachi di confronto.

7) Se si continua ad irradiare con le onde elettromagnetiche ultracorte una parte dei bozzoli provenienti da bachi irradiati (gruppo *A*) non appena formati, per 30 minuti giornalieri, le loro farfalle nascono cinque giorni prima di quelli della corrispondente parte non ulteriormente irradiata (gruppo *B*).

Biologia. — *Sulla colonizzazione dei laghi artificiali.* Nota ⁽¹⁾ di G. BRUNELLI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

In una mia Nota ⁽²⁾ sul ripopolamento ittico dei laghi artificiali, ho già rilevato l'importanza di studiarne la colonizzazione. E di recente tornavo ⁽³⁾ su questo argomento in una Nota presentata in questa Accademia, sull'eutrofismo da stagnazione nei laghi artificiali della Sardegna. Contemporaneamente ho iniziato altre ricerche nei laghi Silani (l'Ampollino) di più recente invaso, mentre anni addietro avevo già fatto eseguire pescate nel lago dell'Alto Belice in Sicilia.

Sono così in possesso di un certo numero di elementi per inquadrare il problema della colonizzazione dei laghi artificiali appenninici e insulari. Non ho voluto di proposito occuparmi di quelli alpini, perchè vi sono già ricerche di scienziati stranieri e ritengo che la prof. Rina Monti, alla quale dobbiamo così interessanti ricerche sulla colonizzazione dei laghi naturali delle nostre alpi, non mancherà di farci conoscere su questo argomento le sue indagini. Nel nostro caso si tratta dell'invaso di acque fluviali e pertanto la loro colonizzazione appare evidentemente dovuta alle immigrazioni attive o passive (secondo le forme) come appresso diremo.

In generale restano confermate le belle ricerche della prof. Monti sulla successiva colonizzazione dei laghi.

È naturale che in piccoli laghi alpini ad alta quota la immigrazione passiva abbia più importanza di quella attiva, ciò che però non è sempre nel nostro caso, aparendo alcune forme riscontrate già nel potamoplancton dal Zacharias (come la *Daphnia longispina*, il *Cyclops*, etc.) ma non deve escludersi anche la immigrazione passiva per alcune forme come il *Diaphanosoma* particolarmente abbondante nel Tirso.

Un fatto notevole mi è sembrato questo che, nell'Ampollino predominano i Cladoceri (*Daphnia pulex* e *Simocephalus vetulus*) e i Copepodì sono invece così scarsi, anche pel numero degli individui, che in certe pescate sembrano quasi mancanti, mentre nel Tirso e nel Coghinas abbonda il *Diaptomus gracilis* G. O. Sars.

Questo fatto è molto interessante perchè mostra che la colonizzazione da parte dei Cladoceri avviene indipendentemente dai Copepodì, mentre nelle alpi sarebbe altrimenti.

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1930.

(2) G. BRUNELLI, *Sul ripopolamento ittico dei laghi artificiali*. « Bollett. di pesca », anno IV, fasc. III, 1928.

(3) G. BRUNELLI, *L'eutrofismo da stagnazione nei laghi artificiali*. « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XI, marzo 1930.

Per esempio la dott. Dirce Bravo ⁽¹⁾ scrive dopo aver parlato della colonizzazione delle alghe: « Un grado più elevato (di colonizzazione) è dato dalla comparsa dei rotiferi che si nutrono delle alghe e dei protozoi, i quali alla loro volta cadono poi preda dei Copepodi. Una volta formatasi questa prima Società pelagica, si arriva ben presto ad un più alto grado di colonizzazione, caratterizzata dalla comparsa dei cladoceri ».

Non ho avuto tempo di riscontrare in quale sua Memoria il Forel dica questo, con ogni ossequio al grande limnologo, il nutrimento dei Cladoceri è dato a prevalenza da protisti, come hanno mostrato specialmente le ricerche di Naumann della scuola svedese, dimostrando che il nutrimento più importante delle dafnie è dato da alghe. Resta invece confermata la teoria generale della Monti sulla importanza della migrazione passiva nella colonizzazione, nonchè la sua osservazione « La fauna dei Cladoceri e lo sviluppo delle piante, sono due grandezze correlative ».

Qual'è in sostanza l'origine del limnobios dei laghi artificiali? I generi e le specie da me riscontrati fanno parte o dell'elobios stagnante o del potamobios di Zacharias.

È logico supporre che le specie del potamobios siano le prime a popolare l'invaso, e qualche altra specie derivi invece della migrazione passiva. Così tra i rotiferi nell'Ampollino è comune l'*Anuraea aculeata* che appartiene al potamobios.

Un'altra osservazione importante è questa: ho fatto eseguire delle pescate nello stagno costiero di S. Giusta ed ho riscontrato che alcune specie comuni nel Tirso e Coghinas si riscontrano egualmente nello stagno di S. Giusta, così risulta un'altra legge sulla colonizzazione dei laghi artificiali che essi derivano dagli stagni più vicini una parte del limnobios, che non risalendo da valle a monte, proviene probabilmente da specie diffuse colla migrazione passiva.

Sull'origine del limnobios abbiamo le seguenti ipotesi:

1. La teoria del Pavesi derivata dalla ipotesi geologica dello Stoppani sull'origine dei grandi laghi, sulla origine del limnobios da parte di una fauna marina relegata dall'epoca prequaternaria.

2. La teoria di Zschokke sul residuo di una fauna glaciale stenotermica che abitava le acque rimaste libere durante l'era glaciale fra i grandi ghiacciai nord europei e il margine dei ghiacciai alpini avanzanti verso le pianure dell'Italia centrale.

3. La teoria dipendente di Imhof che non potendosi applicare la dottrina del Pavesi, ritenne che la fauna e la flora degli alti laghi alpini provenissero da germi durevoli rimasti per molti secoli sotto il ghiaccio.

(1) D. BRAVO, *Contributo alla biologia dei Cladoceri viventi nelle acque dolci Pavesi*, « Atti Soc. Ital. Sc. Nat. », vol. LVI, 1917.

4. La teoria di Forel sul cosmopolitismo del limnoplanton dovuto alle migrazioni passive.

5. La teoria della Monti ⁽¹⁾ della graduale colonizzazione dei laghi alpini per una vera circolazione della vita e per effetto delle migrazioni passive (già studiate da Forel, Darwin ed altri autori).

La colonizzazione di laghi artificiali si ricollega alla teoria di Forel-Monti sulla migrazione attiva e passiva come ragione fondamentale della formazione della società lacustre. Lo stesso studio mostra che il processo della colonizzazione è abbastanza rapido derivando da migrazioni attive del potamoplanton del fiume invasato e da migrazioni passive irradianti dagli stagni vicini.

Le società del limnobios dei laghi artificiali non sono del tutto identiche, per es. nell'Ampollino abbonda la *Daphnia pulex* (De Geer) e il *Simocephalus vetulus* O. F. Müller, nel Tirso e nel Coghinas la *Daphnia longispina* O. F. Müller, la *Ceriodaphnia pulchella* Sars, il *Diaphanosoma brachyurum* (Liéven), ciò che in parte si deve alle differenti condizioni fisiche dell'invaso e in parte, come ritengo, alle differenti migrazioni passive in ordine alla vicinanza di stagni naturali, come centro di irradimento di nuovi elementi destinati a contribuire alla formazione di detta società lacustre.

Per esempio i planctonobi del Tirso e del Coghinas (Volvocinee, Dafnie, Diaptomidi) sono coincidenti in gran parte con quelli dello stagno di Santa Giusta a valle, ed è poco verosimile presumere che sia stato invece questo antico stagno arricchito dai planctonobi degli stagni artificiali.

La presenza nel Tirso dell'*Anabaena*, nonché del *Volvox*, del *Diaptomus* e della *Daphnia*, avvicinano questa società lacustre a quelle descritte nei laghi artificiali della Westfalia dal Thienemann ⁽²⁾.

La differenza poi tra alcuni laghi artificiali ed altri confermano quanto dice giustamente il Brehm ⁽³⁾, che ancora non si è raggiunto un equilibrio in questa biocenosi di nuova formazione.

(1) R. MONTI, *La circolazione della vita nei laghi*. « Rivista mensile di pesca », Anno IX, 1907.

(2) A. THIENEMANN, *Hydrobiologische und fischereiliche Untersuchungen an den westfälischen Talsperren*. « Landwirtschaftliche Jahrbücher », 41, 1911.

(3) V. BREHM, *Einführung in die Limnologie*. V. J. Springer, Berlin, 1930.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli (trapianti di abbozzi embrionali in organismi differenziati o adulti)*. ⁽¹⁾ Nota V ⁽²⁾ di GIULIO COTRONEI e CELSO GUARESCHI, presentata dal Socio G. FANO.

Colla presente nota si espongono i primi risultati inerenti a tutta una nuova serie di esperienze, che sono una logica derivazione e uno sviluppo di altre già pubblicate ⁽³⁾. Dimostrato che determinati trapianti embrionali di Anuri su Urodeli vanno in distruzione quando nell'ospite si sono già affermate le condizioni umorali della vita larvale, si presentava opportuno indagare se queste proprietà citolitiche o comunque disagiatriche che si svolgono verso gli organi trapiantati di specie lontane zoologicamente dall'ospite si manifestano anche verso gli abbozzi embrionali, o soltanto verso gli organi differenziati. Una verifica diretta di tali possibilità sperimentali va tuttavia incontro a questioni molto complesse. Indipendentemente dai problemi della lontananza zoologica, vi sono quelli inerenti alla interruzione di correlazioni biochimiche proprie degli abbozzi embrionali. Quando infatti sottraiamo l'abbozzo di un organo alle condizioni biochimiche embrionali, noi veniamo ad interrompere quelle correlazioni morfogenetiche, che tutta una serie di esperienze, anche recentissime, tende a dimostrarci. Si può però pensare che, a partire da determinati stadi, certi abbozzi d'organi possano progredire nello sviluppo, e può anche darsi che si possa notare una differenza di comportamento variando la specie ospite. Certo tutta una serie di interessanti questioni si presentano in tal modo alla nostra indagine.

Già da lungo tempo gli studiosi si sono preoccupati di indagare il comportamento delle cellule embrionali trapiantate in organismi adulti. Fu sotto l'influenza delle idee di Durante e di Cohnheim che, specialmente i cultori di patologia, iniziarono queste ricerche. Da Leopold, Zahn, Fisher, Féré, Birch-Hirschfeld, Garten, Saltykow, fino alle interessanti ricerche di Galeotti e Villa Santa, vediamo succedersi una serie di lavori con risultati ora incerti, ora assai modesti e incostanti. Tuttavia in queste antiche ricerche, troviamo molti fatti che depongono in favore di evoluzioni atipiche dei processi differenziativi (Leopold parla di encondromi). Ma troviamo anche riferimenti a dif-

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1930.

(3) COTRONEI e SPIRITO. Questo periodico, Nota I, vol. X, serie 6^a, II sem., fasc. 3-4, 1929; Nota II, vol. XI, serie 6^a, I sem., fasc. 4; Nota III, vol. XI, serie 6^a, I sem., fasc. 9; Nota IV, vol. XII, serie 6^a, II sem., fasc. 1-2, 1930.

ferenziazioni più o meno normali. Su questo punto specialmente Galeotti e Villa Santa ottennero risultati positivi, mai però formazioni durevoli. Un notevole impulso alle ricerche inerenti a questi problemi fu dato per opera di Belogolowy: quest'A. fece trapianti omoplastici tra embrioni e adulti di *Pelobates fuscus* e *Rana temporaria*, ed eteroplastici fra queste stesse forme⁽¹⁾, sempre fra embrioni e adulti. La rottura delle correlazioni biochimiche che dominano lo sviluppo normale fa sì, secondo Belogolowy, che molti complessi cellulari possano assumere caratteri sarcomatosi, come una conseguenza della vita parassitaria degli impiantati.

Il lavoro di Belogolowy fu seguito, oltre che da una nota critica di W. Roux, da una lunga serie di ricerche (Bierich, Anders, Piette, Mayerówna, Weber, Dürken, Janda, ecc.). Tutti questi lavori mettono in evidenza la grande importanza dei fattori esterni ambientali sullo sviluppo delle proprietà embrionali; infatti differenziazioni atipiche possono conseguire alla perdita delle correlazioni embrionali. (Dürken).

Tuttavia, teniamo a metterlo in risalto, questi fatti possono in gran parte dipendere dallo stadio degli abbozzi embrionali (tempo di sviluppo).

*
* *

Nelle nostre esperienze, intese a indagare il comportamento degli abbozzi embrionali fuori del loro ambiente e sotto l'influenza delle condizioni biochimiche di tessuti già differenziati, abbiamo eseguito:

1. Trapianti omoplastici tra individui della stessa specie, sia Anuri (*Bufo vulgaris*, *Hyla arborea*, *Rana esculenta*) che Urodeli (*Triton cristatus*);

2. Trapianti eteroplastici tra specie diverse di Anuri (*Bufo vulgaris* su *Rana esculenta*, *Rana esculenta* su *Bufo vulgaris*, *Rana esculenta* su *Hyla arborea*, *Hyla arborea* su *Bufo vulgaris*);

3. Trapianti xenoplastici di Anuri su Urodeli (*Bufo vulgaris* su *Triton cristatus*, *Hyla arborea* su *Triton cristatus*, *Rana esculenta* su *Triton cristatus*, *Rana esculenta* su *Triton taeniatus*), e di Urodeli su Anuri (*Triton cristatus* su *Bufo vulgaris*, *Triton cristatus* su *Hyla arborea*, *Triton cristatus* su *Rana esculenta*).

Gli abbozzi trapiantati sono quelli di organi a struttura nervosa, encefalo, occhio, organo olfattorio⁽²⁾ accompagnati da mesenchima o mesoderma. Nei trapianti di abbozzi embrionali su larve⁽³⁾, sia della stessa che di diverse forme, abbiamo avuto cura di accertarci che tali larve già mangiavano da

(1) Egli si propose anche esperienze tra forme zoologicamente più lontane.

(2) Ricerche personali del dr. Guareschi stanno indagando il comportamento dell'otocisti in queste stesse condizioni sperimentali. Altre ricerche con i più svariati abbozzi embrionali si stanno eseguendo nell'Istituto.

(3) I risultati esposti in questa Nota si riferiscono a tali esperienze di trapianti su larve (nel modo detto). Esporremo in seguito i risultati su stadii ulteriori.

parecchio tempo, e quindi che le condizioni umorali erano già quelle della vita larvale, che nulla hanno a che fare con le correlazioni embrionali.

Nei trapianti omoplastici i risultati migliori li abbiamo avuti nella *Rana esculenta*, in cui gli occhi e la parte dell'encefalo trapiantato si trovano benissimo sviluppati, e in ottime condizioni ancora 24 giorni dopo l'operazione. Un tale risultato non lo abbiamo mai avuto nelle altre forme (*Bufo*, *Hyla*, *Triton cristatus*) dove le esperienze finora compiute non ci sembrano decisive e debbono essere più estesamente ripetute.

Nei trapianti eteroplastici di Anuri su Anuri, in genere abbiamo avuti risultati di minore entità: i migliori, anche qui, li abbiamo ottenuti quando l'ambiente ospite è rappresentato dai girini di *Rana*, viceversa gli abbozzi embrionali di *Rana* su girini di *Bufo* ci hanno dato risultati negativi. Poco migliori sono i trapianti di *Hyla* su *Bufo* e di *Rana* su *Hyla*.

Nei trapianti di Urodeli su Anuri, abbiamo notato che le cellule vanno in distruzione più o meno rapidamente conservando i caratteri embrionali; anche dopo 8 giorni (*Triton cristatus* su *Hyla arborea*), quando cioè, in quelle condizioni di temperatura, negli animali di controllo il vitello era già completamente riassorbito, i pezzi trapiantati conservavano le sferule vitelline. Vogliamo ricordare che nelle esperienze precedenti (Cotronei e Spirito) di trapianti embrionali su embrioni, si sono avuti due casi: a) sulla *Rana esculenta* e sul *Bufo vulgaris* distruzione degli abbozzi; b) su *Hyla arborea* differenziamento. In queste nuove operazioni mai abbiamo ottenuto processi differenziativi anche operando col *Triton cristatus* sull'*Hyla arborea*. Ciò molto probabilmente significa che sono venute a mancare nelle nostre operazioni (di abbozzi embrionali su larve) quelle condizioni biochimiche, che, permettendo l'utilizzazione del vitello conducono ai processi differenziativi delle cellule.

Nelle esperienze di abbozzi embrionali di Anuri su larve di Urodeli abbiamo avuto risultati molto migliori, che sono culminati nelle esperienze di *Rana* su *Triton*. In questi casi abbiamo ottenuto dei reperti, se per ora non numerosi, certo assai dimostrativi di occhi ben differenziati, di organi olfattori e di pezzi di encefalo. I successivi casi esaminati a periodo più lungo dall'operazione eseguita, ci dimostrano che questi organi, dopo il differenziamento, vanno soggetti a quei medesimi processi distruttivi che sono già stati messi in luce nei lavori di Cotronei e Spirito.

Queste nostre nuove osservazioni con i risultati positivi ora accennati, pur presentando finora punti assai complessi e degni di ulteriori indagini, mettono in luce la possibilità del differenziamento dell'occhio, dell'encefalo e dell'organo olfattorio, nell'ambiente biochimico estraneo già differenziato, quando cioè già sono in azione le proprietà distruttive sugli organi e sui tessuti estranei. Parrebbe allora che queste proprietà si esplicino in questi organismi (*Rana* su *Triton*) soltanto dopo una determinata fase dei processi differenziativi degli abbozzi trapiantati.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Di alcune esperienze di innesti di più estese parti embrionali tra Anuri e Urodeli*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di ALDO SPIRITO presentata dal Socio G. FANO.

In una serie di lavori⁽³⁾ pubblicati negli ultimi due anni Cotronei e Spirito hanno reso noto numerose osservazioni di trapianti di abbozzi embrionali eseguiti tra Anuri e Urodeli. Lo scopo di queste ricerche era quello di introdurre i concetti di zoologia costituzionale e quindi di condizioni biochimiche, stabilentisi nel corso dello sviluppo, negli studi di embriologia sperimentale eseguiti col metodo dei trapianti.

Volendo estendere queste ricerche ad una nuova serie di osservazioni ho impostato nuove esperienze, valendomi non più del metodo dei trapianti di singoli abbozzi o di un complesso di abbozzi embrionali, ma di operazioni tendenti a modificare, in una maniera molto più ampia, la composizione anatomica dell'individuo nella sua interezza, mediante le sostituzioni più varie di parti estesissime di embrioni appartenenti a Anfibi di ordini differenti⁽⁴⁾. Ho effettuato, ad esempio, la sostituzione della testa di embrioni di Urodeli con quella degli Anuri e viceversa; la sostituzione ancora più importante di quasi tutto il sistema nervoso centrale tra esemplari di *Triton* e *Hyla*, ecc.

Per le operazioni sono stati adoperati esemplari di *Triton cristatus*, *Triton taeniatus*, *Hyla arborea* e *Rana esculenta* a vari stadi embrionali (dagli stadi a vescicola ottica primaria a quelli con vescicola ottica secondaria).

Un inconveniente che è stato necessario subito eliminare era conseguenza della diversa grandezza degli animali sperimentati (diametro della superficie del taglio in *Rana*, più grande che in *Triton*) sì che gli orli delle superfici cruenta destinate a fondersi non venivano del tutto a contatto. Si è ovviato a tale inconveniente ritardando l'esecuzione dell'atto operativo del tempo necessario a che la superficie cruenta degli embrioni di *Rana esculenta* s'impiccolisse adeguatamente, grazie ai fenomeni di arrotondamento e di riparazione che intervengono di regola subito dopo il taglio.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1930.

(3) «Rend. R. Acc. dei Lincei» vol. X, 1929; «Atti della Soc. Ital. di Anat.», in «Mon. Zool. Ital.», vol. XL, 1929; «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XI, 1930; «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XI, 1930; «Rend. R. Acc. dei Lincei», Vol. XII, 1930.

(4) Unioni parziali e di breve durata sono state effettuate da Born fra esemplari di *Rana esculenta* e *Triton*.

Ho potuto eseguire così varie operazioni (55 positive con relativi controlli istologici ⁽¹⁾) che possono essere comprese in due serie distinte, la prima delle quali riguarda gli innesti di parti anteriori di embrioni di Anuri su tronco di Urodeli, e la seconda quelli di parti anteriori di embrioni di Urodeli su tronco di Anuri.

I SERIE. - Nelle operazioni di questa serie sono state innestate su embrioni di *Triton cristatus* o *taeniatus*, mutilati delle corrispondenti regioni, la parte anteriore, o, semplicemente, antero-dorsale di embrioni di *Hyla arborea* e *Rana esculenta* tagliata anteriormente agli abbozzi branchiali.

In questi casi si è ottenuto sempre un perfetto differenziamento delle regioni innestate; fusione perfetta tra i due sistemi nervosi centrali. Questa fusione interessa non soltanto la sostanza grigia, ma anche la sostanza bianca.

Di questa serie, alcuni esemplari sono stati tenuti in vita fino a 28 giorni dopo l'operazione, cioè vario tempo dopo il riassorbimento del tuorlo. In questo caso limite, nelle sezioni seriali dell'esemplare operato, si possono notare alcuni segni di distruzione, interessanti la zona cefalica innestata. Anche in questi casi, quindi, è probabile una incompatibilità di coesistenza di parti di individui appartenenti a Anfibi di ordini differenti, incompatibilità che recenti studi (Cotronei e Spirito) avevano già dimostrato nei trapianti xenoplastici di alcuni abbozzi di organi.

II SERIE. - Gli esemplari di questa serie (innesto della parte anteriore di embrioni di Urodeli su tronco di Anuri) sono divisi, a loro volta, in due gruppi distinti a seconda degli embrioni di Anuri adoperati nelle esperienze (*Hyla arborea*; *Rana esculenta*) e ciò per aver ottenuto nei due casi risultati essenzialmente diversi. Ricordo, al riguardo, che risultati diversi si hanno già, con gli abbozzi di organi, nelle operazioni di trapianti xenoplastici (Cotronei e Spirito, Nota III).

1° gruppo: *Triton cristatus* o *taeniatus* su *Hyla arborea*.

Sono state eseguite le seguenti operazioni: innesto della parte anteriore di embrioni di *Triton* tagliata anteriormente agli abbozzi branchiali su *Hyla arborea* mutilata della regione corrispondente; innesto della parte anteriore di embrioni di *Triton taeniatus* tagliata posteriormente agli abbozzi branchiali su *Hyla arborea* mutilata della regione corrispondente; innesto della

(1) Mi permetto di osservare che il numero di esperienze riuscite che mi consente la pubblicazione di questa prima Nota non è tanto esiguo quando si metta in rilievo che per alcuni tipi di esperienze coincidenti con risultati già noti (Cotronei e Spirito) ne sono state eseguite per ora pochissime, laddove esse sono state eseguite in numero maggiore nei casi nei quali si sono ottenuti nuovi risultati.

parte anteriore di embrioni di *Triton taeniatus* tagliata posteriormente agli abbozzi branchiali su *Hyla arborea* mutilata della regione anteriore ai suddetti abbozzi (esemplari con due cuori e 4 gruppi di branchie); sostituzione di quasi tutto l'asse nervoso centrale di embrioni di *Hyla arborea* con quello di *Triton taeniatus*.

In questo gruppo di esperienze si è ottenuto sempre il differenziamento completo di tutti gli abbozzi di organi e di tessuti contenuti nella parte innestata; fusione perfetta dei sistemi nervosi centrali, identicamente a quanto è avvenuto negli esemplari operati della prima serie.

Alcuni animali di questo gruppo sono stati tenuti in vita fino a 27 giorni dopo l'operazione.

2° gruppo: *Triton cristatus* o *taeniatus* su *Rana esculenta*.

Sono state eseguite le seguenti operazioni: innesto della parte anteriore di embrioni di *Triton* tagliata anteriormente o posteriormente agli abbozzi branchiali, su *Rana esculenta* mutilata della regione cefalica anteriore ai suddetti abbozzi; innesto della parte anteriore di embrioni di *Triton* tagliata anteriormente o posteriormente agli abbozzi branchiali su *Rana esculenta* mutilata di tutta la regione anteriore, compresi gli abbozzi delle branchie. Si sono avuti nei due casi due diversi comportamenti.

Nel primo si è ottenuto, identicamente a quanto avviene nei semplici trapianti di abbozzi di organi di *Triton* su *Rana*, una più o meno rapida distruzione del pezzo innestato (sfaldamento esterno o lento riassorbimento con invasione dell'ectoderma di *Rana* sul territorio di *Triton*); distruzione che è preceduta, nel caso di una maggiore estensione del pezzo, da un percettibile differenziamento degli abbozzi contenutivi. Nel secondo caso invece, a parità di tempo e di temperatura, si è avuto il perfetto sviluppo e differenziamento del pezzo innestato.

In quest'ultimi casi e anche in quelli precedenti nei quali si è potuto seguire un certo sviluppo si sono avute fusioni fra i sistemi nervosi centrali come in quelli già descritti. Negli esemplari operati con due cuori, fino a che essi sono coesistiti, non si è avuta sincronia delle pulsazioni.

Uno sguardo complessivo delle presenti ricerche mi permette alcune considerazioni che brevemente espongo.

Per primo, in modo generale, si deve ritenere che i pezzi innestati, a prescindere dalla grandezza, si comportano, rispetto al tronco al quale sono fusi, nella stessa maniera che risulta dalle operazioni di trapianti xenoplastici di abbozzi di organi (Cotronei e Spirito). Così si è ottenuto il differenziamento di parti cefaliche di embrioni di Anuri su embrioni di Urodeli e probabilmente, come è stato più sopra accennato, si sarebbe avuta in tempi successivi una distruzione più o meno completa di essi,

Si è ottenuto ancora il differenziamento di parti cefaliche di embrioni di Urodeli innestati su embrioni di *Hyla arborea* e distruzione quando invece sono stati fusi con embrioni di *Rana esculenta*.

Su quest'ultimo punto mi sia concessa tuttavia una osservazione. Dalle mie esperienze in proposito risulta che le parti anteriori più o meno grandi di embrioni di Urodeli vanno rapidamente distrutte quando siano innestate su esemplari di *Rana esculenta* mutilati della regione anteriore, ma che conservino la regione degli abbozzi branchiali. Nelle esperienze, invece, nelle quali viene asportata anche questa regione si è avuto, a parità di tempo e di temperatura, un completo differenziamento e sviluppo degli abbozzi di organi e di tessuti in esse contenuti.

Mi sembra di grande interesse aver potuto delimitare in una regione, compresa tra due piani paralleli passanti anteriormente e posteriormente agli abbozzi branchiali, la ragione di questa differenza di comportamento.

Ritengo anche che bisogna molto valutare in queste mie esperienze la possibilità di sviluppo autonomo che hanno le parti isolate degli embrioni di Anfibi (Vulpian, Born, Raffaele, Goggio, Giardina, Cotronei, ecc. ecc.).

Lunghe serie di esperienze mi propongo di condurre avanti per approfondire i problemi che io credo molto interessanti e che ho in questa Nota brevemente accennato.

Biologia (Zoologia). — *Sul colore del bozzolo e la migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta nella F₁ di incroci reciproci tra le razze di bachi (B. m.) Oro cinese, Gialla Indigena e Bianca giapponese.* Nota ⁽¹⁾ di C. JUCCI, presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Dall'esame della distribuzione del pigmento nei vari strati del bozzolo degli incroci reciproci tra le due razze Oro e Gialla Indigena, avevo dedotto che nella F₁ il 'tempo di migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta' è intermedio tra quelli delle razze parentali.

Gli allevamenti condotti in questa primavera 1930 mi permettono di confermare la deduzione, precisando l'andamento dei fenomeni. Riservandomi di pubblicare l'esame dettagliato dei risultati quando avrò completata l'elaborazione di tutta la massa dei materiali sperimentali raccolti, desidero ora comunicare succintamente i risultati raggiunti con l'allevamento, contemporaneamente condotto, di altri incroci.

Ho incrociato reciprocamente le due razze Oro e Gialla Indigena con la stessa razza bivoltina giapponese Awojiku. Questa razza è a sangue bianco

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1930.

e bozzolo bianco, mentre le due precedenti hanno sangue giallo e bozzolo anch'esso colorato (nella prima in oro, nella seconda in giallo carnicino, in dipendenza del diverso « tempo di migrazione dei pigmenti »).

Questi incroci erano stati già da me praticati anni or sono per lo studio della capacità di voltinismo e della capacità di accrescimento. Ma il colore del bozzolo non richiamava allora il mio interesse, perchè non sospettavo ancora in esso un carattere l'esplicazione del quale potesse seguirsi durante lo sviluppo dell'organismo. Ora invece, dopo le mie ricerche sulla migrazione del pigmento dal sangue alla seta, io vedevo questa possibilità; ed anzi mi aspettavo di poter seguire, studiando il colore del sangue nei prodotti dell'incrocio a cominciare dalla nascita lungo tutte le fasi larvali sino alla maturità, lo svolgimento progressivo del carattere paterno, come avevo potuto fare per la capacità di accrescimento.

Questa aspettativa forse non era giustificata; certo è stata delusa. I bacolini degli incroci a femmina bianca ♀ Awojiku ♂ Oro e ♀ Awojiku ♂ Fossombrone hanno sin dalla prima età sangue altrettanto giallo quanto i bacolini degli incroci reciproci a femmina colorata: ♀ Oro ♂ Awojiku e ♀ Fossombrone ♂ Awojiku.

Anzi, sin dalla prima età non ho trovato differenza tra il colore del sangue di questi incroci e quello delle razze pure colorate.

C'è dunque, veramente, *dominanza perfetta e precocissima* (senza traccia apparente della così detta eredità materna, o predominio del carattere della razza materna nei primi stadi di sviluppo dell'ibrido) *del carattere « sangue colorato » sul carattere « sangue incolore »*. Non ho visto, seguendo il colore del sangue nelle età successive, sorgere ed accentuarsi alcuna spiccata differenza tra le due coppie di incroci reciproci o tra questi e le rispettive razze pure a sangue colorato; ma non la escludo. I campioni raccolti durante tutto lo sviluppo larvale saranno oggetto di un ulteriore esame più accurato, impossibile a compiersi durante il periodo dell'allevamento, tutto febbrilmente consacrato alla raccolta del materiale.

Nelle prime età il sangue veniva prelevato aspirandolo, con opportune precauzioni, in capillari di diametro proporzionato alla età e quindi alla dimensione dei bacolini. A cominciare dalla quarta età, giornalmente, per ognuno degli incroci e delle razze pure, oltre ai campioni individuali di sangue in capillari, sono stati preparati degli estratti alcoolici di sangue: prelevando, da un numero conveniente di individui, 2 cm³ di sangue e trattandolo con 10 cm³ di alcool a 95°.

La raccolta di questi estratti è stata continuata — aggiungendovi anzi la raccolta di estratti delle ghiandole serigene — durante tutto il periodo della maturità e della tessitura del bozzolo sino all'incrisolidamento ⁽¹⁾.

(1) Ho avuto, per tutto questo lavoro, una intelligente ed abile collaboratrice nella studentessa Maria Bruna Buya.

Ultimato l'allevamento e la preparazione degli incroci per l'anno prossimo, sto proprio ora (luglio 1930) compiendo il dosaggio colorimetrico degli estratti alcoolici di sangue e di ghiandole serigene, perchè temo la poca stabilità del materiale; mentre rimando a tempo più opportuno l'esame degli ultimi campioni di sangue in capillari (4^a e 5^a età) dato che questi si mantengono anche per più mesi inalterati.

Spero così di essere in grado di tracciare, con esattezza, per ciascuno degli incroci, la curva di migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta. In ogni modo posso sin d'ora presentare come sicuri alcuni risultati, nelle loro linee generali.

Ispezionando i miei bachi durante la salita al bosco (nel giugno), mi ha colpito il fatto che negli incroci fra la razza Awojiku e l'Oro cinese, gli individui giunti a maturità (quando cioè, purgatisi del contenuto intestinale, cominciano a tessere) si presentavano tutti scolorati, mentre negli incroci tra razza Awojiku e Giallo indigena i maturi mostravano ancora (per trasparenza traverso le pseudo-zampe) sangue giallo, benchè più o meno intensamente. L'osservazione è stata da me ripetuta e confermata moltissime volte; avendo di ciascuno dei quattro incroci fatto schiudere (tra il 25 aprile e il 5 maggio) due o tre gruppi di ovature e di ciascuno di questi gruppi portato al bosco separatamente più lotti. Dunque *in linea generale negli incroci con razza bianca l'ibrido F₁ presenta il « tempo di migrazione » dei pigmenti dal sangue alla seta caratteristico della razza parentale colorata: precoce nell'Oro, tardivo nella Gialla indigena.*

Debbo notare però che, se negli incroci della razza bianca con la Oro, i bachi maturi si presentavano tutti a tipo Oro, cioè scolorati; negli incroci con la Fossombrone si incontrava, tra una maggioranza di bachi a tipo Giallo indigeno, cioè a sangue giallo, un certo numero di bachi scolorati, più o meno vicini al tipo Oro.

Credetti da prima che questo dipendesse da un errore, cioè da qualche baco accidentalmente trasportato da un graticcio ad un altro con le carte forate, o simili.

Ma, fatto lo sbozzolamento dei boschi, il censimento dei bozzoli di ciascun lotto, accuratamente classificati secondo il colore, mi faceva scartare l'interpretazione suaccennata, dimostrando che veramente il prodotto dell'incrocio con Fossombrone presenta una spiccata varietà di colori del bozzolo, in contrasto con la uniformità del colore nei bozzoli dell'incrocio con Oro.

Stralcio dal mio giornale un esempio caratteristico:

24-6 367 ♀ Awojiku ♂ Oro. Tra i bozzoli di due graticci (parecchie centinaia) tutti a tipo Oro più o meno acceso, trovo solo un bozzolo a tipo Fossombrone e uno a tipo intermedio.

25-6 456 ♀ Fossombrone ♂ Awojiku. In un gruppo preso a caso trovo: crema-dorato 29, paglierino-carnicino 23, carnicino-rossiccio 6, oro 2. Classificando tutti i bozzoli del lotto secondo il colore, trovo:

I: Bozzoli chiari, n. 26 giallo-zolfo pallido, n. 22 volgenti al carnicino;

II: Volgenti al lievemente dorato, n. 147;

III: Un po' più colorati del II, sempre verso il dorato, n. 425;

IV: Un po' più colorati del II, ma verso il carnicino chiaro, in alcuni volgendo al rossiccio, n. 201;

V: Dorati, i più d'un colore oro mediocrementemente intenso, parecchi però oro acceso verdastro, n. 369.

Notare che in ciascuno dei gruppi c'è notevole variabilità individuale; onde si hanno in pratica tutte le gradazioni possibili fra oro acceso, oro pallido, giallo carnicino e giallo paglierino.

Come va spiegata questa grande varietà del prodotto di prima generazione dell'incrocio tra razza bianca e razza gialla indigena? ⁽¹⁾. Una delle due razze è dunque impura?

Si direbbe la gialla indigena, dato che la stessa razza bianca incrociata con la Oro cinese ha dato un prodotto molto uniforme, si da potersi affermare senz'altro che il carattere « Oro » è dominante sul carattere « Bianco », o, più scientificamente, che la « capacità di migrazione *precoce* dei pigmenti dal sangue alla seta » è dominante sulla..... Non è facile completare la espressione. Nei bachi a sangue giallo e bozzolo bianco c'è « incapacità di migrazione » e questa si comporta come carattere mendeliano unitario, recessivo rispetto alla « capacità ».

Ma nei bachi a sangue bianco e bozzolo bianco non appare senz'altro se vi sia solo « incapacità di formazione dei pigmenti » o anche « incapacità di migrazione ». Anzi, dagli studi di Uda, da me interpretati sulla base delle mie ricerche su Oro e Fossombrone, risulta che in una stessa razza *WW*, a sangue bianco e bozzolo bianco, pura per questi caratteri, gli individui possono avere tre diverse costituzioni genetiche: *cc Y Y*, *cc yy* e *cc Yy* dove *Y* è la « capacità di migrazione » e *y* la « incapacità » (e *c* è il gene che rende incolore il sangue).

Bisogna tener presente la possibilità che nella razza bianca bivoltina giapponese Awojiku, esista questa varietà di costituzioni genetiche dimostrata da Uda nella bianca bivoltina cinese Shōzan.

Questo potrebbe forse aiutarci a spiegare i risultati ottenuti dai nostri incroci. La spiegazione che, provvisoriamente almeno, propongo, è la seguente. Nell'incrocio con Oro, i bozzoli sono tutti a tipo Oro, perchè se l'individuo Awojiku usato nell'incrocio ha il fattore della « incapacità », questo rimane recessivo, e se ha il fattore della « capacità », questo non fa che confermare il fattore caratteristico dell'Oro « capacità di migrazione *precoce* dei pigmenti ».

(1) Risultati analoghi ho ottenuti dai due incroci reciproci: ♀ Bianco cinese ♂ Indigeno e ♀ Indigeno ♂ Bianco cinese.

Nell'incrocio con la Gialla Indigena i bozzoli risultano varii, a tipo Giallo, a tipo intermedio e a tipo Oro, secondo che l'individuo Awojiku usato nell'incrocio porta il fattore della « incapacità » o della « capacità di migrazione ».

In questo secondo caso può rimanere esaltata la « capacità di migrazione », caratteristica della razza parentale colorata, e dal tipo « migrazione tardiva » può passare al tipo « migrazione precoce » cioè dal tipo Giallo al tipo Oro.

Naturalmente s'intravede la possibilità che si tratti di fattori multipli tanto più che nell'incrocio tra le due razze Oro e Fossombrone, l'ibrido mostra un grado di « capacità di migrazione » intermedio rispetto a quello delle razze parentali ⁽¹⁾.

Certo sarebbe stato preferibile adottare, sin dalla prima generazione, il metodo delle ovature isolate, come quello che permette di raggiungere più facilmente risultati chiari e sicuri. Ma i mezzi a mia disposizione limitati, specie in proporzione al mio programma di lavoro, non me lo hanno permesso; e non so fino a che punto mi permetteranno l'anno prossimo di allevare la seconda generazione delle mie due coppie di incroci reciproci e i reincroci degli ibridi F_1 con le razze parentali.

Nella F_2 il metodo delle ovature isolate, preferibile sin dalla F_1 , si impone, data la natura genotipicamente varia di quello che si presenta come l'omozigote recessivo, il baco a sangue bianco e bozzolo bianco.

Accennerò a questo proposito, che io ho intrapreso, in connessione con queste mie ricerche sulla migrazione dei pigmenti, una serie di esperienze di somministrazione di sostanze coloranti ai bachi. Cercavo una sostanza che si comportasse come i pigmenti naturali del baco; che migrasse, cioè, dal sangue alla seta sempre e soltanto nei bachi che hanno nella loro costituzione genetica la « capacità di migrazione ». Una tale sostanza somministrata a bachi Awojiku dovrebbe farci riconoscere gli individui che posseggono latente la « capacità di migrazione » che non può in condizioni ordinarie manifestarsi data l'assenza di pigmenti nel sangue.

Secondo le esperienze sin'ora praticate ⁽²⁾, se di sostanze coloranti introdotte per via alimentare è facile il passaggio nel sangue e negli organi interni, è difficile invece il passaggio dal sangue nel secreto delle ghiandole serigene.

La sola orceina mi ha dato bozzoli intensamente colorati; bleu metilene, rosso neutro, sudan III, passano solo in tracce nella seta. Più facilmente le sostanze coloranti somministrate passano nelle uova: rosso neutro, sudan III, bleu metilene, Nilblau. Anche questo è interessante, dato che i pigmenti naturali delle uova derivano anch'essi, evidentemente, dai pigmenti del sangue, e anzi in genere le uova si presentano tanto più pigmentate quanto meno imponente e precoce è stata la migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta.

(1) Sebbene spostato, pare, verso il tipo Oro.

(2) Coll'aiuto dello studente Nicola Ponselveroni.

Biologia (Fisiologia). — *La eccitabilità riflessa in funzione del pH* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di M. MITOLO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

L'importanza biologica che oggi si annette alla reazione attuale dei liquidi e dei tessuti dell'organismo mi ha indotto a studiare le modificazioni provocate dagli idrogenioni, in concentrazioni differenti, su un tessuto che per la sua squisita delicatezza anatomica e funzionale è il più suscettibile a risentirne gli effetti: alludo al sistema nervoso centrale.

È assai noto a biologi e clinici quanto sia sensibile il tessuto nervoso alle minime variazioni dell'equilibrio acido-base, verificantisi nei liquidi interstiziali che costituiscono l'ambiente della cellula e della fibra nervea: sia le acidosi, sia le alcalosi, intese nel senso clinico, si manifestano principalmente con sintomi a carico dell'organo nervoso. Mancando una dimostrazione sperimentale di questa azione del pH sul midollo spinale, ho eseguito in questo senso alcune ricerche sul *preparato centrale Baglioni* ⁽³⁾, il quale permette di poter immergere in una soluzione acida o basica, a pH noto, l'asse cerebro-spinale di *Bufo v.*, isolato e sopravvivate. Le modificazioni della attività riflessa e della eccitabilità dei centri midollari riferentisi ai nervi sciatici sono state prese come indice dell'azione degli H-ioni e degli OH-ioni sul tessuto nervoso centrale.

Le presenti ricerche si riconnettono con altre da me eseguite lo scorso anno ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾, con le quali stabilii la sede midollare di azione degli H- ed OH-ioni, ed inoltre le modalità di questa azione.

Ho adoperato soluzioni diluitissime di acido cloridrico, di acido lattico, di idrato sodico e potassico, delle quali misuravo il pH poco prima di metterle a contatto col tessuto nervoso centrale sopravvivate. Le soluzioni sono state fatte in soluzione fisiologica di NaCl al 0.7%, il cui pH è compreso tra 6.8 e 6.9, alla temperatura ambiente di 19-24°C. Il pH delle diverse soluzioni è stato misurato col metodo colorimetrico, adoperando all'uopo il nuovo comparatore di Hellige N° 3052; come indicatori ho usato le seguenti sostanze

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1930.

(3) S. BAGLIONI, *Contributi alla fisiologia generale dei centri nervosi. Ricerche sull'asse cerebro-spinale isolato di Bufo vulgaris*. « Zeitschr. f. allgem. Physiol. », IX, 1, 1909.

(4) M. MITOLO, *H-ioni e midollo spinale*. « Bollettino Soc. Ital. Biol. speriment. », IV, fasc. 1, 1929.

(5) M. MITOLO, *OH-ioni e midollo spinale*. « Bollettino Soc. Ital. Biol. speriment. », IV, fasc. 2, 1929.

in soluzione: α — dinitrofenolo (per misure di pH da 2.8 a 4.4), γ — dinitrofenolo (pH 4.0 — 5.4), paranitrofenolo (pH 5.4 — 7.0), metanitrofenolo (pH 6.8 — 8.4). Non ho potuto avvalermi di soluzioni tamponate, per il fatto che tutte le sostanze tampone oggi note agiscono per proprio conto sui centri nervosi; questa particolare azione degli ioni dissociati delle sostanze tampone avrebbe potuto assommarsi o comunque modificare l'azione della concentrazione idrogenionica.

Assicuratomi della squisita eccitabilità riflessa del preparato Baglioni, immergevo il solo asse cerebro-spinale in 12 cc. della soluzione acida o basica, contenuti in una capsulina di Petri: il resto del preparato era adagiato su listerelle di ovatta imbevute di soluzione fisiologica, e poste al fondo di un'altra capsula di Petri, più grande della precedente. La durata di immersione era di mezz'ora—3/4 d'ora circa; appena immersa la sostanza nervosa centrale ed in seguito di 5' in 5', saggiavo il comportamento della eccitabilità riflessa, portando stimoli meccanici, di graduata intensità, sulla cute che riveste le estremità degli arti posteriori del preparato. Alla fine della esperienza, misuravo di nuovo il pH della soluzione, in cui era stato immerso l'asse cerebro-spinale, per osservarne gli eventuali cambiamenti. La temperatura, alla quale sono state eseguite le esperienze, ha raggiunto un minimo di 19°C. ed un massimo di 24°C.

Riferisco brevemente i risultati delle numerose ricerche eseguite: l'azione di ogni pH è stata sperimentata su più preparati.

Azione del pH (zona acida).

Acido cloridrico, acido lattico.

- pH 3.8 — dopo 1-2' forte aumento di eccitabilità riflessa fino alla comparsa di convulsioni tetaniche, alternantisi con convulsioni cloniche; segue paralisi.
5.3 — uguali effetti.
6.1 — rapida comparsa di convulsioni tetaniche, in parte cloniche; segue paralisi.
6.3 — uguali risultati.
6.5 — abnorme aumento di eccitabilità riflessa, a carattere transitorio.
6.6 — aumento di eccitabilità riflessa, contenuto nei limiti fisiologici.
6.7 — l'attività riflessa resta immutata.
6.8 — nessuna modificazione dell'attività riflessa.

Azione del pH (zona alcalina).

Idrato di sodio, idrato di potassio.

- pH 7.0 — nessuna modificazione dell'attività riflessa.
7.1 — attività riflessa immutata.
7.2 — attività riflessa invariata.
7.3 — aumento di eccitabilità riflessa, contenuto nei limiti fisiologici.
7.4 — convulsioni cloniche (per il NaOH) o tetaniche (per il KOH), a carattere transitorio.
7.5 — uguali risultati, ma più netti.
7.6 — convulsioni cloniche (per il NaOH) o tetaniche (per il KOH) durature; segue paralisi.
7.9 — medesimi effetti.

È notevole la estrema sensibilità del sistema nervoso centrale di fronte alle variazioni del pH del liquido ambiente; ogni volta che il pH si sposta dal valore della comune soluzione fisiologica di NaCl al 0.7% (6.8-6.9), si osservano subito modificazioni dell'eccitabilità riflessa, che ben presto esorbitano dai limiti fisiologici per dar luogo alla comparsa di fenomeni convulsivi abnormi, tanto più imponenti, quanto più il pH si allontana dal valore della neutralità.

Dal punto di vista biologico, i miei risultati mettono in evidenza il fatto che "i limiti di pH, entro cui si può svolgere una normale attività riflessa midollare (almeno per il *Bufo v.*), sono assai ristretti, e compresi tra pH 6.7 e pH 7.2.

Dopo le convulsioni, si è avuta quasi sempre diminuzione di eccitabilità riflessa; in tali condizioni tuttavia, la stimolazione meccanica del midollo spinale ha dato sempre luogo a tetani evidentissimi: segno questo che la integrità anatomica del sistema nervoso centrale non era stata lesa dall'acido o dall'alcali.

Le modificazioni della eccitabilità riflessa di solito si sono avute dopo pochissimi minuti di contatto della sostanza nervosa con la soluzione acida o basica.

Misurando il pH della soluzione al termine della ricerca, ho trovato un notevole spostamento del pH originario della soluzione; lo spostamento era nel senso dei valori vicini alla neutralità, ed è stato tanto più evidente, quanto più il pH era distante dai valori della neutralità. Queste variazioni del pH del liquido acido o alcalino, posto a contatto col tessuto nervoso centrale, assai probabilmente vanno messe in diretto rapporto con il potere moderatore della sostanza nervosa centrale; esso si esplica tanto meglio, quanto più acido o più basico è il mezzo liquido in cui il tessuto è immerso. È tuttavia da osservare che questo potere moderatore della sostanza nervosa non costituisce per essa un meccanismo di difesa verso l'azione degli H- od OH-ioni; se così fosse, non si dovrebbero avere modificazioni dell'eccitabilità riflessa del preparato centrale Baglioni, a meno che non si voglia ammettere che questo potere moderatore venga ad esplicarsi dopo che gli H- od OH-ioni abbiano già agito sul midollo spinale.

Farò da ultimo notare che, mentre nelle precedenti mie ricerche sulla sede midollare di azione degli H- ed OH-ioni ho dovuto impiegare soluzioni piuttosto concentrate di acidi o di basi (1 : 1000) per ottenere qualche effetto, nelle presenti esperienze le modificazioni di eccitabilità riflessa si sono avute a diluizioni fortissime. La differenza sta in ciò: in questi esperimenti ho immerso tutto l'asse cerebro-spinale del preparato in 12 cc. di liquido acido o alcalino; nei precedenti, invece, questo liquido, acido o basico, era portato a contatto con il lato dorsale o con quello ventrale della intumescenza posteriore del midollo spinale a mezzo di batuffolini di ovatta,

del diametro di appena 1-2 mm., ed imbevuti perciò di una quantità minima di acido o di alcali, di cui peraltro, alla fine della esperienza, la maggior parte restava ancora aderente all'ovatta. Talchè, se è vero che le soluzioni adoperate erano discretamente concentrate, in definitiva solo una piccolissima quantità di esse giungeva per diffusione ai centri nervosi e vi esplicava la sua particolare azione.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1930 (Anno VIII).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Tensori quintupli emisotropi.* Nota ⁽¹⁾ del Corrispondente U. CISOTTI.

Riferendomi alle Note precedenti ⁽²⁾ mi propongo nella presente di caratterizzare i tensori quintupli emisotropi.

1. Sia σ il tensore doppio fondamentale di componenti cartesiane δ_{ik} [cfr. il n. 2 della I Nota citata] e ϵ il tensore triplo emisimmetrico e emisotropo [cfr. il n. 1 della II Nota citata] di componenti cartesiane ϵ_{jhl} . Designando A uno scalare qualsiasi, il tensore quintuplo di componenti cartesiane

$$(1) \quad A \delta_{ik} \epsilon_{jhl}$$

è pure emisotropo [cfr. il n. 1 della II Nota e il n. 3 della I Nota, citate]. Si introducano altre nove quantità scalari $B, C, D, E, F, G, H, K, L$ arbitrarie e si considerino i nove prodotti seguenti:

$$B \delta_{ij} \epsilon_{khl}, C \delta_{ih} \epsilon_{kjl}, D \delta_{il} \epsilon_{kjh}, E \delta_{kj} \epsilon_{ihl}, F \delta_{kh} \epsilon_{ijl}, G \delta_{kl} \epsilon_{ijh}, H \delta_{jh} \epsilon_{ikl}, K \delta_{jl} \epsilon_{ikh}, L \delta_{hl} \epsilon_{ikj},$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1930.

(2) *Tensori isotropi*, questi «Rendiconti», vol. XI, 1° sem. 1930, p. 727; *Tensori isotropi e tensori emisotropi*, Ibid., p. 917; *Tensori quadrupli isotropi*, Ibid., p. 1055.

che si ottengono da (1) combinando a due a due e a tre a tre in tutti i modi possibili i cinque indici i, k, j, h, l . Le posizioni:

$$(2) \quad Q_{ikjhl} = A\delta_{ik}\epsilon_{jhl} + B\delta_{ij}\epsilon_{khl} + C\delta_{ih}\epsilon_{kjl} + D\delta_{il}\epsilon_{kjh} + E\delta_{kj}\epsilon_{ihl} + F\delta_{kh}\epsilon_{ijl} + \\ + G\delta_{kl}\epsilon_{ijh} + H\delta_{jh}\epsilon_{ikl} + K\delta_{jl}\epsilon_{ikh} + L\delta_{hl}\epsilon_{ikj},$$

definiscono cartesianamente un tensore quintuplo Q emisotropo [cfr. il n. 1 della Nota II e il n. 3 della Nota I]. Dico che è il più generale tensore quintuplo emisotropo.

2. Sieno T_{ikjhl} le componenti cartesiane di un tensore quintuplo T , riferito a una terna $(O; y_1, y_2, y_3)$ e \bar{T}_{pqrst} le sue componenti rispetto a una seconda terna $(\bar{O}; \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$; si ha [Nota I, formule (1) e (2)]:

$$(3) \quad \bar{T}_{pqrst} = T_{ikjhl} \alpha_{ip} \alpha_{kq} \alpha_{jr} \alpha_{hs} \alpha_{lt}.$$

È noto [cfr. la II Nota, n. 7] che il tensore T , essendo dispari, non può essere isotropo. Se il tensore predetto è emisotropo dev'essere [cfr. la II Nota, n. 1]

$$(4) \quad \bar{T}_{pqrst} = \pm T_{pqrst},$$

valendo il segno superiore se le due terne di riferimento sono *congruenti* e l'altro se le due terne sono *simmetriche*. Da (3) e (4) scendono dunque:

$$(5) \quad T_{pqrst} = \pm T_{ikjhl} \alpha_{ip} \alpha_{kq} \alpha_{jr} \alpha_{hs} \alpha_{lt},$$

colla ora accennata convenzione sul segno.

In particolare, assumendo:

$$(6) \quad \alpha_{11} = -1, \alpha_{12} = 0, \alpha_{13} = 0; \quad \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = -1, \alpha_{23} = 0; \\ \alpha_{31} = 0, \alpha_{32} = 0, \alpha_{33} = 1,$$

trattandosi di terne congruenti si dovrà avere:

$$T_{pqrst} = T_{pqrst} \alpha_{pp} \alpha_{qq} \alpha_{rr} \alpha_{ss} \alpha_{tt}.$$

Scende da questa, facendovi $p = q = r = s = t = 1$ e tenendo presenti le (6): $T_{11111} = -T_{11111}$ e quindi $T_{11111} = 0$. Analogamente si constata essere $T_{22222} = T_{33333} = 0$, dunque:

$$(7) \quad T_{11111} = T_{22222} = T_{33333} = 0,$$

cioè sono nulle tutte le componenti che hanno i cinque indici eguali.

3. Da (5), per (6), ponendo $p = 1, q = r = s = t = 2$, si ottiene:

$$T_{12222} = T_{ikjhl} \alpha_{i1} \alpha_{k2} \alpha_{j2} \alpha_{h2} \alpha_{l2} = -T_{12222}$$

e quindi $T_{12222} = 0$. È pure $T_{21222} = T_{22122} = T_{22212} = T_{22221} = 0$.

In generale, si constata che sono nulle tutte le componenti in cui un indice compare una sola volta e gli altri quattro indici sono eguali tra loro.

4. Sempre dalle (5), per (6), ponendo ora $p = q = 1$, $r = s = t = 2$, si ottiene:

$$T_{11222} = T_{ikjl} \alpha_{i1} \alpha_{k1} \alpha_{j2} \alpha_{l2} \alpha_{l2} = -T_{11222},$$

da cui $T_{11222} = 0$; sono pure nulle manifestamente tutte le componenti in cui due indici sono eguali a 1 e agli altri tre sono eguali a 2. In generale, si constata che sono nulle le componenti in cui intervengono due soli indici, distinti, uno dei quali due volte e, naturalmente, l'altro tre.

Si può raccogliere da quanto precede che sono nulle tutte le componenti nelle quali non intervengono tra gli indici tutti e tre i numeri 1, 2, 3.

5. Ci rimangono da considerare le componenti nelle quali compariscono come indici tutti e tre i numeri 1, 2, 3. I casi che si possono presentare sono due: o uno dei numeri predetti compare tra gli indici una sola volta e ciascuno degli altri due due volte, oppure uno compare tre volte e ciascuno degli altri due una sol volta. Prendiamo in esame il primo caso. Ponendo, ad es., nelle (5): $p = 1$, $q = 2$, $r = 2$, $s = 3$, $t = 3$ e tenendo presente (6), si ottiene:

$$T_{12233} = T_{ikjl} \alpha_{i1} \alpha_{k2} \alpha_{j2} \alpha_{l3} \alpha_{l3} = -T_{12233},$$

e quindi $T_{12233} = 0$.

È manifesto che l'ordine degli indici non ha alcuna influenza, per cui è pure

$$T_{21233} = T_{22133} = \dots = T_{22331} = 0.$$

In generale, si constata che sono nulle le componenti nelle quali compare una sol volta uno dei numeri 1, 2, 3 e due volte ciascuno degli altri due.

6. Assumiamo ora, in particolare:

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 0, \alpha_{13} = 0; \quad \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 0, \alpha_{23} = -1; \\ \alpha_{31} = 0, \alpha_{32} = 1, \alpha_{33} = 0;$$

le due terne sono ancora congruenti, per cui ponendo in (5) tre indici = 1, uno = 2 e uno = 3, si ottengono le seguenti relazioni:

$$T_{23111} + T_{32111} = 0, T_{21311} + T_{31211} = 0, T_{21131} + T_{31121} = 0, \\ T_{21113} + T_{31112} = 0, T_{12311} + T_{13211} = 0, T_{12131} + T_{13121} = 0, \\ T_{12113} + T_{13112} = 0, T_{11231} + T_{11321} = 0, T_{11213} + T_{11312} = 0, \\ T_{11123} + T_{11132} = 0;$$

dalle quali scende che scambiando tra di loro gli indici 2 e 3 le componenti cambiano segno.

In generale si trova che se si considerano le componenti aventi tre indici eguali ad uno dei numeri 1, 2, 3 un quarto indice eguale ad un altro e il

quinto al rimanente, scambiando tra di loro quest'ultimi due le componenti cambiano segno.

7. Infine si assuma:

$$\alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = 1, \alpha_{13} = 0; \quad \alpha_{21} = 1, \alpha_{22} = 0, \alpha_{23} = 0; \\ \alpha_{31} = 0, \alpha_{32} = 0, \alpha_{33} = 1;$$

le due terne sono in tal caso simmetriche, per cui ponendo in (5) tre indici = 1, uno = 2 e uno = 3 si ottengono le seguenti relazioni:

$$T_{23111} + T_{13222} = 0, T_{21311} + T_{12322} = 0, T_{21131} + T_{12232} = 0, \\ T_{21113} + T_{12223} = 0, T_{12311} + T_{21322} = 0, T_{12131} + T_{21232} = 0, \\ T_{12113} + T_{21223} = 0, T_{11231} + T_{22132} = 0, T_{11213} + T_{22123} = 0, \\ T_{11123} + T_{22213} = 0;$$

scende da queste che lo scambio tra di loro degli indici 1 e 2 porta come conseguenza il cambiamento di segno delle componenti. E in generale, si considerino le componenti in cui un indice è ripetuto tre volte e gli altri due sono distinti tra loro e dal primo: tenendo fisso uno di questi due ultimi e scambiando fra loro gli altri due le componenti cambiano segno.

8. Da quanto precede scende che le componenti non nulle del tensore T sono soltanto quelle che contengono tre indici eguali ad uno dei numeri 1, 2, 3, un quarto e il quinto indice eguali rispettivamente a ciascuno degli altri due numeri. Tali componenti sono dunque in numero di 60, ma essendo legate tra loro, per quanto si è detto nei numeri precedenti, dalle seguenti 50 relazioni:

$$T_{23111} = T_{31222} = T_{12333} = -T_{32111} = -T_{13222} = -T_{21333}, \\ T_{21311} = T_{32122} = T_{13233} = -T_{31211} = -T_{12322} = -T_{21333}, \\ T_{21131} = T_{32212} = T_{13323} = -T_{31121} = -T_{12232} = -T_{23313}, \\ T_{21113} = T_{32221} = T_{13332} = -T_{31112} = -T_{12223} = -T_{23331}, \\ T_{12311} = T_{23122} = T_{31233} = -T_{13211} = -T_{21322} = -T_{32133}, \\ T_{12131} = T_{23212} = T_{31323} = -T_{13121} = -T_{21232} = -T_{32313}, \\ T_{12113} = T_{23221} = T_{31332} = -T_{13112} = -T_{21223} = -T_{32331}, \\ T_{11231} = T_{22312} = T_{33123} = -T_{11321} = -T_{22132} = -T_{33213}, \\ T_{11213} = T_{22321} = T_{33132} = -T_{11312} = -T_{22123} = -T_{33231}, \\ T_{11123} = T_{22231} = T_{33312} = -T_{11132} = -T_{22213} = -T_{33321}.$$

si riducono al più a 10 sole distinte.

Ciò premesso è facile constatare che le espressioni (2) delle componenti cartesiane del tensore Q soddisfano a tutte le condizioni specificate nei numeri precedenti ed inoltre anche alle 50 relazioni testè scritte *qualunque sieno le 10 quantità scalari* $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$; da ciò scende la conclusione annunciata che le (2) definiscono cartesianamente il il più generale tensore quintuplo emisotropo.

Fisica. — *Un circuito emittente treni d'onda discontinui.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. M. LA ROSA e G. PETRUCCI.

Estendendo le ricerche riferite in un'altra Nota, abbiamo tentato di impiegare lo stesso schema di circuito - che qui riportiamo - alla produzione di oscillazioni di frequenze assai elevate, come quelle che corrispondono alle onde più corte della telegrafia e telefonia senza fili, ed eventualmente più corte ancora.

A tal fine abbiamo sostituito un conveniente trasformatore, a quello precedentemente impiegato, fatto di due avvolgimenti di poche spire di fili di rame da 2 mm., montato su lastrine di ebanite, di cui il primario contava 14 spire di 10 cm. di diametro ed il secondario 5 di 12 cm. Il tipo di valvole adoperato fu Zhenit, V. 2 O. R. T.

Per la rivelazione delle oscillazioni ci siamo avvalsi di due ricevitori *Burndept* ⁽²⁾. La trasmissione era assicurata per mezzo di due piccole antenne attaccate rispettivamente al ricevitore e ad uno dei capi del secondario del trasformatore - quello collegato alla griglia della 1^a valvola - essendo l'altro capo condotto a terra.

Le tensioni di placca impiegate variavano da 150 a 200 volt circa, e fu constatato che si poteva egualmente ricorrere o ad una delle solite batterie di pile, o alla corrente alternata di città convenientemente modificata da un apposito trasformatore.

Lasciando tutte le altre parti dello schema immutate, rispetto alle condizioni indicate nella Nota precedente, non ci fu possibile svelare la presenza di oscillazioni; queste si manifestarono solo quando la resistenza R dell'amplificatore fu ridotta dall'ordine delle decine di migliaia a qualche centinaio (o meno) di Ohm.

Provando a fare variare le costanti del circuito, la corrente di accensione e la tensione di placca, potemmo constatare la esistenza di un valore di soglia per questa resistenza, al di sopra del quale le oscillazioni mancavano; valore che dipendeva manifestamente dalle condizioni rimanenti.

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1930.

(2) Essi sono stati gentilmente prestati a questo Istituto Fisico dalla on. Direzione Generale Specialisti del Genio alla quale ci è gradito di porgere i più vivi ringraziamenti,

Questo risultato, che può apparire strano se si riguarda il circuito della prima valvola come un semplice amplificatore a resistenza, ci condusse a pensare che la piccola resistenza residua — che in certi casi poteva essere anche quella dei soli attacchi — dovesse possedere un'induttanza apprezzabile e capace di opporre, a oscillazioni tanto rapide, un'impedenza alquanto più grande di quella spettante alla valvola, e perciò capace di dare luogo ad una effettiva e cospicua amplificazione.

A riprova di questa supposizione sostituimmo con successo alla R un avvolgimento di poche spire di grosso filo di rame, ottenendo con ciò un rinforzo nell'intensità di ricezione.

In queste condizioni, facendo variare il numero di spire inserite abbiamo potuto produrre onde di varie lunghezze: da qualche centinaio fino a 20 metri, risultando la frequenza dipendente dal valore di questa autoin-

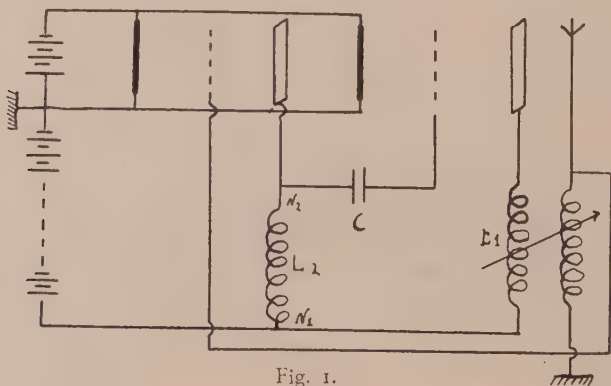


Fig. 1.

duzione; e potemmo accertare che essa (frequenza) era presso che indipendente dalla capacità del condensatore C ed era poco influenzata sia dalla corrente di accensione che dalla tensione di placca. Queste ultime circostanze già osservate nelle esperienze a frequenze acustiche differenziavano notevolmente il funzionamento del nostro schema da quello dello schema Mazzotto. Per tentare di stabilire con esattezza gli elementi da cui dipendeva questo differente comportamento, riconducemmo, il dispositivo nostro a quello del Mazzotto, sopprimendo completamente il circuito della prima valvola, nonchè l'induttanza ed il condensatore di accoppiamento; ma fatto ciò le oscillazioni scomparvero completamente.

Tornando, invece, al dispositivo primitivo ed interrompendo le comunicazioni fra il secondario e la griglia della prima valvola (ossia impedendo l'intervento del 1° circuito nella sua funzione di amplificatore) constatammo che le oscillazioni tornavano a prodursi, sebbene con ampiezza più piccola. Da queste prove fummo condotti a concludere che, indipendentemente

dalla amplificazione, il circuito della 1^a valvola, o piuttosto gli organi di accoppiamento, intervenivano in modo diretto nel meccanismo di genesi delle oscillazioni.

Per chiarire con precisione la funzione di questi organi, cominciammo con lo stabilire la sede delle oscillazioni; a tal fine introducemmo un'induttanza di parecchi millehenry nei vari rami del circuito. Constatammo che quando essa era attaccata fra la sorgente del potenziale di placca ed il nodo N_1 (vedi fig. 1) non recava alcuna perturbazione al regime oscillatorio.

Quando, invece, era inserita nel ramo di placca della prima valvola, si aveva l'arresto completo delle oscillazioni se essa rimaneva compresa fra i nodi N_1 ed N_2 , si aveva la permanenza di esse, se era attaccata fra N_2 e la placca⁽¹⁾. È superfluo dire che il regime oscillatorio veniva pure arrestato quando s'inseriva l'induttanza fra il nodo N_2 e la 2^a griglia, in serie

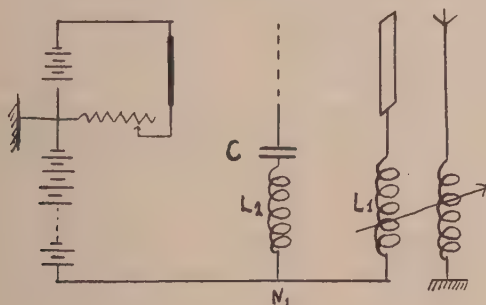


Fig. 2.

col condensatore C. Le oscillazioni avevano dunque sede nel circuito derivato fra placca e griglia della 2^a valvola. A conferma di ciò constatammo che sostituendo un'induttanza di poche spire a quella grande di cui è stato parola, invece dell'arresto delle oscillazioni si osservava una notevole diminuzione della frequenza, quando essa era inserita nel circuito della 1^a placca, o della 2^a griglia.

Tali prove ci indussero a tentare di semplificare il nostro dispositivo sopprimendo la prima valvola, conservando però gli organi dell'accoppiamento, ossia l'induttanza L_2 e la capacità, in modo da lasciare immutato il circuito derivato fra griglia e placca. Il nostro circuito si ridusse dunque allo schema più semplice qui indicato, (fig. 2) il quale si differenzia dallo schema Mazzotto per tre circostanze: il posto diverso dato alla batteria anodica⁽²⁾; la presenza di un condensatore nel ramo di griglia, condensatore che

(1) In questo caso fu osservata una piccola diminuzione della frequenza.

(2) Questo posto non avrebbe per se stesso importanza alcuna; ma essa è vincolata all'altra circostanza: alla presenza del condensatore.

gode di un ruolo fundamentalissimo in tutti i fenomeni descritti; il senso del collegamento fra la L_2 e la griglia, che era quello dava logo a variazioni del potenziale di griglia del segno stesso del $\frac{di}{dt}$. In queste condizioni si ottenevano tutti

i regimi citati nella nota precedente: quello delle oscillazioni persistenti, quello di martellamento e quello dell'emissione discontinua di brevi treni d'onde non smorzate; dipendendo il presentarsi dell'uno o dell'altro, principalmente dalla corrente di accensione e dal potenziale di placca, e subordinatamente dalla capacità del condensatore C , o da quella di un condensatore eventualmente derivato fra placca e griglia. Di essi, però, il meno stabile appariva il primo, il più stabile il terzo.

Rimandando ad altra occasione lo studio particolare di tali regimi ed i risultati delle misure fatte, ci fermeremo qui sul terzo, che più di tutti attirò la nostra attenzione. Merita forse riferire che ci fu possibile nelle prove fatte per accentuarne il carattere, di ottenere la emissione di brevi treni d'onde di lunghezze valutabili fino a 10-13 metri circa, ad intervalli regolari di tempo, che potemmo elevare fino a 22 minuti primi circa! E poichè la durata d'emissione di un singolo treno restava verosimilmente inferiore a qualche millesimo di secondo, il nostro schema si comportava allora come un faro che brillasse per un secondo ogni due giorni circa!

In tutte queste esperienze, la funzione goduta del condensatore C , ci apparve sempre essenziale. Chiudendolo in corto circuito ogni fenomeno variabile cessava, facendone cambiare notevolmente il valore ci poteva fare cambiare regime. Il regime intermittente, che come, si disse era il più stabile, si presentava in un intervallo assai ampio di variabilità della C , il cui valore determinava direttamente la durata delle pause, la quale cresceva, mentre C cresceva da $0.001 \mu F$ fino a poco più di $1 \mu F$ e poi diminuiva (per C fra $1,5$ a $10 \mu F$) ⁽¹⁾.

Anche l'autondizione L_1 aveva un'importanza notevole. Infatti facendola decrescere successivamente di una spira per volta, si trovava ben presto un limite, al di sotto del quale ogni fenomeno oscillatorio spariva. Anzi si potè notare che le condizioni migliori di funzionamento, nelle quali cioè si aveva la maggiore intensità di ricezione, avevano luogo quando la L_1 era all'incirca uguale alla L .

Da quanto siamo venuti esponendo risulta evidente che il modo di funzionare del nostro schema, anche nelle condizioni più semplici in cui è stato in ultimo ridotto ed in quelle stesse in cui esso emette oscillazioni persistenti in modo continuo, non è quello studiato dal prof. Corbino e da altri per lo schema Mazzotto; e va *ex novo* studiato. Questo tenteremo di fare in una prossima Nota.

(1) Una funzione notevole spetta pure alla resistenza interna di questo condensatore; misure in proposito sono state cominciate e saranno presto riferite,

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi infinitesimale). — *Sopra un teorema fondamentale di Analisi.* Nota ⁽¹⁾ di G. MAMMANA, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Troviamo negli ordinari trattati di calcolo, esposti in tante proposizioni staccate, come se si trattasse di argomenti fra loro indipendenti: un teorema di riduzione di una serie multipla e uno di inversione, un teorema di integrazione e derivazione per serie, un teorema di riduzione di derivata totale, uno di inversione dell'ordine di derivazione, uno di passaggio al limite sotto il segno integrale e conseguente regola di integrazione e derivazione sotto il segno, un teorema di riduzione di un integrale multiplo etc. *Ora tutti questi teoremi, e in generale tutti quelli che portano a una riduzione o a una inversione di limiti, sono immediati corollari di un unico teorema, a un tempo di riduzione o di inversione, che, a mio avviso, deve essere isolato e stare a fondamento di ogni trattato di analisi.*

Scopo di questa Nota è di stabilire, nella massima generalità possibile, questo teorema.

Circa l'utilità di esso ebbi occasione, parecchi anni addietro, di intrattenermi col mio maestro M. Picone. La cosa però non ebbe allora seguito. Più tardi, nel 1925, in un corso di calcolo litografato, da me redatto per incarico del professore G. Andreoli, d'accordo con lui, feci un tentativo di raggruppare in un unico enunciato i più comuni teoremi di inversione (inversione dell'ordine di derivazione, integrazione e derivazione per serie ecc.). E in quel corso posi, a fondamento di un paragrafo, dal titolo « Doppi limiti » un teorema di inversione, che, in fondo, non è che la generalizzazione di quello di inversione di una serie di serie.

Ma quel teorema si rivelò di efficacia limitata e di difficile applicazione: e non poteva essere altrimenti, chè il teorema stesso, staccato, da quello di riduzione *dal quale consegue, e al quale conduce* era incompleto. La difficoltà, poi, della sua applicazione derivava dalle circostanze seguenti: L'operazione di limite non veniva considerata nella sua massima generalità « limite di una variabile ordinata i cui valori sono risultati di operazioni di natura qualsiasi », inoltre, ivi, non era fatto uso della nozione di massimo e di minimo limite, senza della quale nozione, non è possibile, spesso, raggiungere, in Analisi, risultati di grande generalità in modo semplice e darci ragione dei medesimi risultati. E un'altra prova di quanto qui si asserisce, si ha nel teorema che fa oggetto della presente Nota.

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1930.

Si appalesa così, ancora una volta, come non si possa prescindere, nei fondamenti dell'Analisi, dalla generale concezione di limite dovuta a M. Picone ⁽¹⁾.

1. Si abbiano, nella terminologia adottata da M. Picone, due insiemi ordinati di operazioni $[O_1], [O_2]$, e supponiamo che la complessiva esecuzione di due qualsivogliano operazioni O_1 , e O_2 dia luogo a un determinato risultato numerico reale, che denoteremo con $X(O_1; O_2)$.

Designeremo con (O_1, O_2) l'operazione generica da cui proviene la X , e con $[(O_1, O_2)]$ l'insieme delle (O_1, O_2) , ordinate al modo seguente: di una sua qualsiasi operazione (O'_1, O'_2) , diremo seguenti tutte quelle (O_1, O_2) per cui O_1 è seguente di O'_1 in $[O_1]$, e O_2 di O'_2 in $[O_2]$.

Porremo:

$$\lim' X(O_1, O_2) \equiv l' \quad ; \quad \lim'' X(O_1, O_2) \equiv l'' \quad (2).$$

Per ogni operazione O_2 di $[O_2]$ (O_1 di $[O_1]$) designeremo con: $\lim'_1 X$, $\lim''_1 X$, $(\lim'_2 X, \lim''_2 X)$ rispettivamente il minimo e il massimo limite di X , quando, restando fissa O_2 , (restando fissa O_1) la operazione O_1 (la operazione O_2) vari in $[O_1]$ (in $[O_2]$) secondo il dato ordinamento. I limiti: $\lim'_1 X$, $\lim''_1 X$ ($\lim'_2 X$, $\lim''_2 X$), che saranno detti *limiti parziali*, risulteranno determinate funzioni di O_2 (di O_1), definite in $[O_2]$ (in $[O_1]$). Per maggiore semplicità di scrittura faremo le posizioni seguenti:

$$\lim'_1 X \equiv Y'(O_2); \lim''_1 X \equiv Y''(O_2); \lim'_2 X \equiv Z'(O_1); \lim''_2 X \equiv Z''(O_1)$$

$$\lim' \lim'_1 X = \lim' Y' \equiv b'_{12} \quad ; \quad \lim'' \lim'_1 X = \lim'' Y' \equiv b''_{12}$$

$$\lim' \lim'_2 X = \lim' Z' \equiv b'_{21} \quad ; \quad \lim'' \lim'_2 X = \lim'' Z' \equiv b''_{21}$$

Diremo, poi, intervallo di indeterminazione del limite di una variabile ordinata come la X , l'intervallo (l', l'') determinato dal minimo e dal massimo di X stessa. Per intervallo di indeterminazione del limite di limite di una variabile come la X , nell'ordine 1, 2 (nell'ordine 2, 1) intenderemo quello che ha per estremi b'_{12} e b''_{12} (b'_{21} e b''_{21}).

Ciò posto possiamo enunciare il seguente:

TEOREMA FONDAMENTALE. *Nell'intervallo di indeterminazione del limite di X è sempre contenuto l'intervallo di indeterminazione del limite del limite parziale di X stessa, e nell'ordine 1, 2 e nell'ordine 2, 1.*

In simboli:

$$\lim' X \subseteq \left\{ \begin{array}{l} \lim' \lim'_1 X \leq \lim'' \lim'_1 X \\ \lim' \lim'_2 X \leq \lim'' \lim'_2 X \end{array} \right\} \subseteq \lim'' X.$$

(1) M. PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, vol. I, cap. 1, nn. 4-5-6, «Circolo Matematico di Catania, R. Università», 1923.

(2) Con i simboli $\lim' X$; $\lim'' X$, son designati rispettivamente il minimo e il massimo limite di X .

Consegue, se X è regolare, e però $l' = l''$:

Le quattro funzioni (limiti parziali) $Y'(O_2)$, $Y''(O_2)$, $Z'(O_1)$, $Z''(O_1)$, risulteranno alla loro volta regolari, e i relativi limiti uguali fra loro e al limite di X .

In questa proposizione è anche contenuto il più generale teorema di inversione di due limiti (1).

Ed, ecco la semplicissima dimostrazione.

Fissato comunque un numero positivo ε possiamo sempre determinare due operazioni O_1^* di $[O_1]$, e O_2^* di $[O_2]$, tali che, se O_1 e O_2 sono due qualsivogliano operazioni rispettivamente di $(O_1^*)^{(2)}$ e $(O_2^*)^{(3)}$, si abbia:

$$(1) \quad l' - \varepsilon < X(O_1, O_2) < l'' + \varepsilon$$

da cui deduciamo, successivamente:

$$(2) \quad \begin{cases} l' - \varepsilon \leq \lim_1' X \leq \lim_1'' X \leq l'' + \varepsilon \\ l' - \varepsilon \leq \lim_2' X \leq \lim_2'' X \leq l'' + \varepsilon \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} l' - \varepsilon \leq \lim_1' \lim_1' X \leq \begin{Bmatrix} \lim_1'' \lim_1' X \\ \lim_1' \lim_1'' X \end{Bmatrix} \leq \lim_1'' \lim_1' X \leq l'' + \varepsilon \\ l' - \varepsilon \leq \lim_1' \lim_2' X \leq \begin{Bmatrix} \lim_1'' \lim_2' X \\ \lim_1' \lim_2'' X \end{Bmatrix} \leq \lim_1'' \lim_2' X \leq l'' + \varepsilon \end{cases}$$

che è quanto ci proponevamo dimostrare (4).

2. Come si nota, ogni teorema di riduzione porta con sé un teorema di inversione; ma c'è di più, a ogni teorema di inversione è associato un teorema di riduzione. Più precisamente dimostreremo che nei casi in cui è lecita l'inversione di due limiti parziali di una variabile $X(O_1, O_2)$, esiste il limite di X stessa. Resta così giustificata la osservazione, di cui nota (1) del n. 1, la quale stabilisce come nel teorema fondamentale di riduzione sia anche contenuto ogni teorema di inversione.

Premettiamo le considerazioni seguenti:

Dalle (1) e (2), nella ipotesi che $X(O_1, O_2)$ sia regolare segue:

$$-2\varepsilon < X(O_1, O_2) - \lim_1' X < 2\varepsilon; \quad -2\varepsilon < X(O_1, O_2) - \lim_1'' X < 2\varepsilon,$$

da cui:

$$(3) \quad \lim_1' X - 2\varepsilon \equiv Y'(O_2) - 2\varepsilon < X(O_1, O_2) < Y''(O_2) + 2\varepsilon \equiv \lim_1'' X + 2\varepsilon.$$

(1) Di quanto qui si afferma ci daremo ragione completa più avanti.

(2) Per ogni insieme ordinato $[O]$ di operazioni designerò col simbolo (O) la totalità delle operazioni seguenti una determinata operazione o .

(3) È ovvia l'estensione al caso di una variabile che dipenda da più operazioni.

(4) Si omettono, per ristrettezza di spazio, le applicazioni.

Analogamente, sempre dalle (1) e (2) si deduce:

$$(3') \quad \lim_2' X - 2\varepsilon \equiv Z'(O_1) - 2\varepsilon < X(O_1, O_2) < Z''(O_1) + 2\varepsilon \equiv \lim_2'' X + 2\varepsilon.$$

La (3) (la (3')) vale per ogni operazione O_1 (per ogni operazione O_2) seguente O_1^* (seguente O_2^*) e comunque poi vari O_2 in (O_2^*) , (O_1 in (O_1^*)). Esprimeremo tutto ciò, con parole, dicendo che la variabile $X(O_1, O_2)$, per O_1 variabile in (O_1) , (O_2 variabile in (O_2)) tende ai suoi limiti parziali, minimo e massimo, *definitivamente* in modo uniforme.

Ciò premesso, supponiamo, inversamente, che la X , per O_1 , ad esempio, variabile in (O_1) , tenda ai suoi limiti parziali definitivamente in modo uniforme; fissato, cioè, un numero positivo ε , sia possibile assegnare una operazione O_1^* tale che, per O_1 seguente O_1^* , si abbia:

$$(4) \quad Y'(O_2) - \varepsilon < X(O_1, O_2) < Y''(O_2) + \varepsilon$$

comunque vari O_2 , purchè contenuta nell'insieme (\overline{O}_2) delle operazioni seguenti ad una data \overline{O}_2 , assegnabile appena fissato ε . Allo stesso ε possiamo, d'altra parte, associare un'altra operazione O_2^* , seguente la \overline{O}_2 , tale che per ogni operazione O_2 seguente O_2^* risulti:

$$(5) \quad \lim' Y(O_2) - \varepsilon \equiv b'_{12} - \varepsilon < Y'(O_2) \leq Y''(O_2) < b''_{12} + \varepsilon \equiv \lim'' Y''(O_2) + \varepsilon.$$

Dalle (4) e (5) discende la

$$(6) \quad b'_{12} - 2\varepsilon < X(O_1, O_2) < b''_{12} + 2\varepsilon.$$

Da cui a causa dell'arbitrarietà di ε :

$$b'_{12} \leq \lim' X(O_1, O_2) \quad ; \quad b''_{12} \geq \lim'' X(O_1, O_2).$$

Ma, pel teorema fondamentale, abbiamo anche:

$$b'_{12} \geq \lim' X \quad ; \quad b''_{12} \leq \lim'' X$$

dovrà dunque aversi:

$$\lim' X \equiv l' = b'_{12} \quad ; \quad \lim'' X \equiv l'' = b''_{12}.$$

E cioè nella ipotesi fatta: *gli intervalli di indeterminazione del limite di X e del limite del limite parziale di X stessa, nell'ordine 1, 2, coincidono.*

Si ha inoltre: *l'intervallo di indeterminazione dell'altro limite del limite parziale di X , nell'ordine 2, 1, è contenuto in quello relativo al limite di limite parziale, nell'ordine 1, 2* ⁽¹⁾.

(1) Questa ultima proposizione trova una applicazione notevole nello studio generale dei metodi di sommazione generali della serie.

Consegue il seguente:

TEOREMA. Se la variabile $X(O_1, O_2)$, per O_1 variabile in (O_1) (O_2 variabile in (O_2)) converge verso $Y(O_2)$ (verso $Z(O_1)$) definitivamente in modo uniforme⁽¹⁾, ed esiste il limite di $Y(O_2)$ (di $Z(O_1)$), per O_2 variabile in (O_2) (O_1 variabile in (O_1)), la X stessa, allora, è regolare, e si ha:

$$\lim Y(O_2) \equiv \lim \lim_1 X(O_1, O_2) = \lim X(O_1, O_2)$$

$$(\lim Z(O_1) \equiv \lim \lim_2 X(O_1, O_2) = \lim X(O_1, O_2)).$$

È lecita, pertanto⁽²⁾, l'inversione dei due limiti applicati successivamente alla X , e cioè, si ha:

$$\lim \lim_1 X = \lim \lim'_2 X = \lim \lim''_2 X = \lim X$$

$$(\lim \lim_2 X = \lim \lim'_1 X = \lim \lim''_1 X = \lim X),$$

In queste formole è contenuto il teorema di inversione sotto la forma più generale.

Questo teorema, e più propriamente, la proposizione da cui esso discende completa il nostro teorema fondamentale nel senso precisato dianzi.

3. Come applicazione prendiamo a trattare, per esempio, del noto teorema di passaggio al limite sotto il segno integrale⁽³⁾.

La funzione $f(P, Q)$, dei due punti P e Q , sia definita per tutti i punti P dell'insieme T ; e pei punti Q dell'insieme V di cui Q_0 sia punto limite. Consideriamo l'insieme $[O_2]$ di operazioni, ciascuna delle quali consista nel decomporre T in insiemi parziali T_i , e nel fissare in ognuno di questi, un punto P_i , ordinato, detto insieme, come segue:

Di ogni operazione O_2 cui sia associato il numero δ come massimo diametro degli insiemi T_i , diremo seguente ogni altra O'_2 cui competa un analogo (massimo diametro) $\delta' \leq \delta$. Coll'insieme $[O_2]$, consideriamo l'altro, $[O_1]$, di cui ogni operazione consista nel fissare un punto Q di V , distinto da Q_0 , e ordinato nel seguente modo. Di ogni operazione O'_1 , cui corrisponda il punto Q' , diremo seguenti tutte le altre O_1 che si riferiscano a punti Q pei quali si abbia $\overline{QQ_0} < \overline{Q'Q_0}$. Associamo a ogni coppia di operazioni O_1 e O_2 il numero,

$$S(O_1, O_2) = \sum_i \text{est } T_i f(P_i Q).$$

(1) La uniforme convergenza, non deve, cioè, essere necessariamente relativa a tutte le operazioni dell'insieme $[O_2]$ ma basta che lo sia relativamente a tutte quelle seguenti una O_2^* qualsiasi.

(2) Grazie al teorema fondamentale.

(3) In generale sotto il segno di una qualsiasi operazione che si riconduca a un limite.

Due ipotesi potremo prendere in esame, ciascuna delle quali condurrà a un teorema di passaggio al limite sotto il segno.

1^a ipotesi: Esista il limite parziale di S per O , variabile in (O_1) , ciò che equivale ad ammettere la esistenza, per ogni P di T , del $\lim_{Q \rightarrow Q_0} f(P, Q)$, limite che designiamo con $F(P)$.

2^a ipotesi: Esista il limite di S per O_2 variabile in (O_2) , la $f(P, Q)$, cioè, per ogni Q di V , sia integrabile in T . Poniamo:

$$\lim_1 S(O_1, O_2) \equiv s_1(O_2) = \sum_i \text{est } T_i F(P_i); \lim_2 S(O_1, O_2) \equiv s_2(O_1) = \int_T f(P, Q) dP.$$

1^a ipotesi: Se la convergenza di S verso $s_1(O_2)$ è definitivamente uniforme, ciò che ha luogo, in particolare, quando $f(P, Q) \rightarrow F(P)$ in modo uniforme in T) e se esiste il limite di $s_1(O_2)$ (la funzione $F(P)$, è, cioè, integrabile in T) sussiste, per S , un teorema di inversione, espresso dalla formula:

$$\lim s_1(O_2) \equiv \lim \lim_1 S = \lim \lim'_2 S = \lim \lim''_2 S = \lim S,$$

cioè:

$$\int_T F(P) dP \equiv \int_T \lim_{Q \rightarrow Q_0} f(PQ) dP = \lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_T f(PQ) dP = \lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_T f''(PQ) dP.$$

nella quale è contenuto, come caso particolare, l'ordinario teorema di passaggio al limite sotto il segno.

2^a ipotesi: Se la convergenza di S verso $s_2(O_1)$ è definitivamente uniforme, ed esiste il limite di $s_2(O_1)$, abbiamo un secondo teorema di passaggio al limite sotto il segno espresso dalla formula:

$$\lim s_2(O_1) \equiv \lim \lim_2 S = \lim \lim'_1 S = \lim \lim''_1 S = \lim S$$

cioè:

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \int_T f(P, Q) dP = \int_T \lim'_{Q \rightarrow Q_0} f(P, Q) dP = \int_T \lim''_{Q \rightarrow Q_0} f(P, Q) dP.$$

In particolare, le condizioni, perchè questo secondo teorema sussista, si realizzano quando la $f(P, Q)$ sia tale che per ogni ε positivo sia possibile la determinazione di due numeri d ed r , in maniera che: se P e P' son punti di T , soddisfacenti alla limitazione: $\overline{PP'} < d$, e Q un punto di V , contenuto in un intorno di raggio r di Q_0 , si abbia:

$$|f(P, Q) - f(P', Q)| < \varepsilon,$$

come segue immediatamente dalla osservazione delle seguenti identità

$$\begin{aligned} S(O_1, O_2) - s_1(O_2) &= \sum_i \text{est } T_i f(P_i Q) - \int_1 f(P, \bar{Q}) dP = \\ &= \sum_i \text{est } T_i \left\{ f(P_i Q) - \int_{T_i} f(P, Q) dP \right\} = \sum_i \text{est } T_i \{ f(P_i, Q) - f(P'_i, Q) \}, \end{aligned}$$

P' essendo contenuto in T_i .

Matematica (Calcolo numerico). — *Contributo al calcolo delle velocità critiche degli alberi motori* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di MARIA NASTA, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Il prof. Pietro Errico Brunelli della Regia Scuola d'Ingegneria di Napoli ha segnalato a questo Istituto di Calcolo un problema di alta analisi numerica la cui soluzione interessa profondamente la costruzione delle macchine. Si tratta della preventiva calcolazione delle velocità critiche degli alberi motori, cioè di quelle velocità di rotazione nelle quali è pericoloso mantenere l'albero.

Il problema è stato posto in equazione fin dal 1883 per opera di A. G. Greenhill ⁽³⁾, secondo il quale, deposto l'asse delle x sulla retta congiungente i punti di appoggio dell'albero, con l'origine in uno di questi punti, detta l la distanza reciproca dei punti, le indicate velocità critiche sono date, in radianti al secondo, da quei valori reali del parametro ω per i quali esistono soluzioni reali $y(x)$, $z(x)$, non identicamente nulle nell'intervallo $(0, l)$, verificanti il seguente sistema di equazioni differenziali lineari ed omogenee

$$(1) \quad \begin{cases} EI \frac{d^4 z}{dx^4} + T \frac{d^3 y}{dx^3} + F \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{p}{g} \omega^2 z = 0, \\ EI \frac{d^4 y}{dx^4} - T \frac{d^3 z}{dx^3} + F \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{p}{g} \omega^2 y = 0, \end{cases}$$

con in più talune condizioni ai limiti, in numero di otto, lineari ed omogenee, alle quali, per generici valori di ω , non possono soddisfare altre soluzioni del sistema (1) all'infuori delle identicamente nulle.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 agosto 1930.

(3) Cfr. P. E. BRUNELLI, *Le velocità critiche degli alberi* (appunti di costruzione di macchine) Napoli, Casa editrice R. Pironti (1921).

I coefficienti delle equazioni (1) sono costanti reali aventi i seguenti significati:

- E modulo di elasticità longitudinale,
- I momento d'inerzia della sezione generica,
- T momento torcente,
- F spinta assiale,
- p sollecitazione dovuta alla gravità,
- g accelerazione di gravità.

Come si vede il problema consiste nel calcolo degli autovalori per un determinato problema ai limiti. Le condizioni ai limiti indicate sopra sono tuttora oggetto di studio col proposito di pervenire a dare condizioni ai limiti tali che, in ogni caso, possa ritenersi conseguita la conferma sperimentale dei valori critici di ω forniti dal calcolo.

Ma ben evidentemente, fino a che tale calcolo non potrà essere compiuto con errori di approssimazione che siano sicuramente entro i limiti degli errori di osservazione sperimentale, l'indicato studio non potrà condurre a conclusioni che abbiano un significato pratico definitivo, laddove poi la tecnica non potrà valersi con grande fiducia di quei risultati.

Ha dunque grande interesse cimentare i vari metodi *razionali* di calcolo degli autovalori per riconoscere a quali di essi debba darsi la preferenza anche dal punto di vista ora detto. Io ho applicato, nel caso particolare considerato, il metodo di calcolo degli autovalori escogitato dal prof. Picone. Questo metodo ha il vantaggio sul classico metodo di Ritz di non prendere in veruna considerazione la possibilità o meno che le equazioni in istudio provengano dall'estremare uno speciale integrale, ed ha dunque un illimitato campo di applicazioni possibili.

Ho sottoposto a esperimento il metodo in vari casi particolari, nei quali sono già noti gli autovalori, ed ho sempre potuto constatare la grande rapidità di convergenza delle successive approssimazioni fornite da esso.

1. *Esposizione del metodo.* — Vado ad esporre il metodo considerando il problema degli autovalori per il più generale sistema di equazioni differenziali alle derivate ordinarie, lineare ed omogeneo, con le più generali condizioni ai limiti, lineari ed omogenee pur esse. Il metodo però è, come si vedrà, applicabile a qualsiasi problema lineare ed omogeneo anche nel campo delle equazioni alle derivate parziali, integrali, integrodifferenziali.

Rappresentino $A_{hk}[y]$, $B_{hk}[y]$ le più generali combinazioni lineari a coefficienti reali e continui della funzione reale y , dell'unica variabile reale x , e di un certo numero di sue derivate, rappresentino $C_{lk}[y]$, $D_{lk}[y]$ le più generali combinazioni lineari, omogenee, a coefficienti reali e costanti, dei valori che la y e un certo numero di sue derivate prendono nei punti ter-

minali a e b dell'intervallo (a, b) . Consideriamo il problema di calcolare gli eventuali valori reali del parametro λ per ciascuno dei quali esistono nell'intervallo (a, b) p funzioni $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$, non tutte ivi identicamente nulle, per le quali riesca soddisfatto e il seguente sistema di p equazioni differenziali

$$(2) \quad \sum_{k=1}^p (A_{hk}[y_k] + \lambda B_{hk}[y_k]) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

e le q condizioni ai limiti

$$(3) \quad \sum_{k=1}^p (C_{lk}[y_k] + \lambda D_{lk}[y_k]) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, q).$$

Se $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$ sono gli ordini delle equazioni differenziali (2), rispettivamente nelle funzioni incognite y_1, y_2, \dots, y_p , supporremo naturalmente $q = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_p$.

Ben ovviamente il simultaneo verificarsi delle equazioni (2) e (3) equivale al verificarsi dell'unica seguente

$$(4) \quad \sum_{h=1}^p \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^p (A_{hk}[y_k] + \lambda B_{hk}[y_k]) \right\}^2 dx + \\ + \sum_{l=1}^q \left\{ \sum_{k=1}^p (C_{lk}[y_k] + \lambda D_{lk}[y_k]) \right\}^2 = 0.$$

Indicheremo con

$$J[y_1, y_2, \dots, y_p],$$

il funzionale rappresentato dal primo membro della equazione (4). Verificate le (2) e le (3), cioè la (4), data la omogeneità, potremo moltiplicare le y_1, y_2, \dots, y_p , supposte non tutte identicamente nulle in (a, b) , per un fattore in modo da risultare

$$(5) \quad \sum_{k=1}^p \int_a^b y_k^2 dx = 1.$$

Viceversa se λ ha tale valore da risultare verificate la (4) e la (5) esso sarà certamente un autovalore poichè il verificarsi della (5) esclude che possano tutte le y_k essere identicamente nulle.

Sia

$$(6) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

una successione illimitata di funzioni definite in (a, b) ivi reali, continue, linearmente indipendenti e indefinitamente derivabili e tali che sia possibile

per ogni sistema y_1, y_2, \dots, y_p di soluzioni delle equazioni (4) e (5), posto

$$y_k^{(n)} = \sum_{i=1}^n c_{ki} \varphi_i(x),$$

determinare le costanti c_{ki} in maniera da risultare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_p^{(n)}] = J[y_1, y_2, \dots, y_p],$$

$$\sum_{k=1}^p \int_a^b (y_k^{(n)})^2 dx = 1.$$

Ciò posto, consideriamo le forme quadratiche nelle pn costanti c_{ki} in cui consistono le espressioni

$$J[y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_p^{(n)}], \quad \sum_{k=1}^p \int_a^b (y_k^{(n)})^2 dx,$$

con facile calcolo si trova che, posto

$$P_{kr, is} = \sum_{h=1}^p \int_a^b A_{hk}[\varphi_i] A_{hr}[\varphi_s] dx + \sum_{l=1}^q C_{lk}[\varphi_i] C_{lr}[\varphi_s],$$

$$Q_{kr, is} = \sum_{h=1}^p \int_a^b (A_{hk}[\varphi_i] B_{hr}[\varphi_s] + B_{hk}[\varphi_i] A_{hr}[\varphi_s]) dx +$$

$$+ \sum_{l=1}^q (C_{lk}[\varphi_i] D_{lr}[\varphi_s] + D_{lk}[\varphi_i] C_{lr}[\varphi_s]);$$

$$R_{kr, is} = \sum_{h=1}^p \int_a^b B_{hk}[\varphi_i] B_{hr}[\varphi_s] dx + \sum_{l=1}^q D_{lk}[\varphi_i] D_{lr}[\varphi_s],$$

$$M_{is} = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_s(x) dx,$$

riesce

$$J[y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_p^{(n)}] = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n c_{ki} c_{rs} (P_{kr, is} + \lambda Q_{kr, is} + \lambda^2 R_{kr, is}),$$

$$\sum_{k=1}^p \int_a^b (y_k^{(n)})^2 dx = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n M_{is} c_{ki} c_{ks}.$$

Si consideri il problema di minimizzare la forma quadratica

$$\Phi_n = J[y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_p^{(n)}]$$

con la condizione

$$(7) \quad \psi_n \equiv \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{r,n} M_{is} c_{ki} c_{ks} = 1.$$

Introdotta un parametro μ dovremo allora eguagliare a zero le pn derivate parziali prime della forma quadratica

$$\Phi_n - \mu \psi_n,$$

rispetto alle c_{ki} , si hanno così pn equazioni lineari ed omogenee

$$(8) \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial c_{ki}} - \mu \frac{\partial \psi_n}{\partial c_{ki}} = 0,$$

alle quali si deve soddisfare, in forza della (7), con valori non tutti nulli delle c_{ki} .

Il determinante del sistema (8) deve dunque essere nullo. Esso è una certa funzione algebrica di λ e μ che indicheremo con $f_n(\lambda, \mu)$. Si ha dunque l'equazione

$$(9_n) \quad f_n(\lambda, \mu) = 0.$$

Verificate le (8) riesce

$$\Phi_n - \mu \psi_n = 0,$$

quindi verificata la (7)

$$\Phi_n = \mu.$$

Consideriamo nel piano (λ, μ) la curva algebrica avente l'equazione (9_n) e ricerchiamone quei suoi punti

$$(\lambda_1^{(n)}, \mu_1^{(n)}), (\lambda_2^{(n)}, \mu_2^{(n)}), \dots, (\lambda_m^{(n)}, \mu_m^{(n)}),$$

in ciascuno dei quali μ presenta un minimo; ebbene, secondo il metodo, le quantità

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_m^{(n)},$$

disposte, per esempio, in ordine crescente, si assumono come approssimazioni per gli autovalori del parametro λ nelle equazioni (2) e (3).

Posto nelle (8) $\lambda = \lambda_t^{(n)}$, $\mu = \mu_t^{(n)}$ ($t = 1, 2, \dots, m(n)$), e dettòne $[c_{ki}^{(n)}]$ il sistema di soluzioni, la combinazione lineare

$$y_k^{(n)} = \sum_{i=1}^n c_{ki}^{(n)} \varphi_i(x)$$

si assume come approssimazione di un'autosoluzione.

Tale è il metodo per il quale però non è facile in tale generalità stabilire tutte le modalità della convergenza.

2. *Applicazione al calcolo delle velocità critiche.* — Ho applicato il metodo per il calcolo degli autovalori del parametro ω nel sistema di equazioni (1) considerando le condizioni ai limiti

$$(10) \quad \begin{cases} \gamma(0) = \gamma(l) = \gamma''(0) = \gamma''(l) = 0, \\ \chi(0) = \chi(l) = \chi''(0) = \chi''(l) = 0, \end{cases}$$

con i seguenti valori numerici delle costanti

$$EI = 245000,$$

$$T = 2180,$$

$$F = 4550,$$

$$p = 69.7,$$

$$g = 9.81,$$

$$l = 6.099,$$

valori fornitimi dall'ing. Mario Medici della Regia Scuola d'Ingegneria di Napoli.

Ovviamente, considerando le condizioni ai limiti (10), si può in tal caso assumere come successione (6) la seguente

$$\varphi_1 = \text{sen} \frac{\pi x}{l}, \varphi_2 = \text{sen} \frac{2\pi x}{l}, \dots, \varphi_n = \text{sen} \frac{n\pi x}{l}, \dots$$

Diviso per 10^3 ambo i membri dell'equazioni (1) e posto

$$\lambda = \frac{p}{g} \frac{\omega^2}{10^3}$$

ho trovato:

$$f_1(\lambda, \mu) = -\mu + \lambda^2 - 32.04134\lambda + 256.99277,$$

$$\begin{aligned} f_2(\lambda, \mu) = & -\mu^2 + (2 \cdot \lambda^2 - 573.66730 \cdot \lambda + 73684.02397)\mu - \\ & -\lambda^4 + 573.66730 \cdot \lambda^3 - 91037.14798 \cdot \lambda^2 + 2491674.12734 \cdot \lambda - \\ & - 18862621.20496, \end{aligned}$$

$$f_3(\lambda, \mu) = \mu^3 - (3 \cdot \lambda^2 - 3342.80266 \cdot \lambda + 1992963.70) \mu^2 + \\ + (3 \cdot \lambda^4 - 6685.60532 \cdot \lambda^3 + 5591806.98 \cdot \lambda^2 - 1307516806 \cdot \lambda + \\ + 141425691 \cdot 10^3) \mu - \\ - (\lambda^6 - 3342.80266 \cdot \lambda^5 + 3598843.27 \cdot \lambda^4 - 1355567892 \cdot \lambda^3 + \\ + 181628981 \cdot 10^3 \cdot \lambda^2 - 483401134 \cdot 10^4 \cdot \lambda + 361991963 \cdot 10^5),$$

$$f_4(\lambda, \mu) = \mu^4 - (4 \cdot \lambda^2 - 12125 \cdot \lambda + 21295823) \mu^3 + \\ + (6 \cdot \lambda^4 - 36374 \cdot \lambda^3 + 94849154 \cdot \lambda^2 - 833338119 \cdot 10^2 \cdot \lambda + \\ + 386096995 \cdot 10^5) \mu^2 - (4 \cdot \lambda^6 - 36374 \cdot \lambda^5 + 125810833 \cdot \lambda^4 - \\ - 180814713 \cdot 10^2 \cdot \lambda^3 + 122276172 \cdot 10^6 \cdot \lambda^2 - 264854368 \cdot 10^8 \cdot \lambda + \\ + 272983630 \cdot 10^{10}) \mu + (\lambda^8 - 12125 \cdot \lambda^7 + 52257506 \cdot \lambda^6 - \\ - 974825791 \cdot 10^2 \cdot \lambda^5 + 815533957 \cdot 10^5 \cdot \lambda^4 - 277652166 \cdot 10^8 \cdot \lambda^3 + \\ + 354830683 \cdot 10^{10} \cdot \lambda^2 - 936239264 \cdot 10^{11} \cdot \lambda + 698685978 \cdot 10^{12}),$$

$$\lambda_1^{(1)} = 16.021$$

$$\mu_1^{(1)} = 0.331$$

$$\lambda_1^{(2)} = 16.020$$

$$\mu_1^{(2)} = 0.260$$

$$\lambda_1^{(3)} = 16.020$$

$$\lambda_2^{(3)} = 273.3$$

$$\mu_1^{(3)} = 0.250$$

$$\mu_2^{(3)} = 81$$

$$\lambda_1^{(4)} = 16.020$$

$$\lambda_2^{(4)} = 270.5$$

$$\mu_1^{(4)} = 0.240$$

$$\mu_2^{(4)} = 72.$$

Ben si vede il carattere di convergenza delle successioni $\lambda_1^{(n)}$, $\lambda_2^{(n)}$ per le quali ho dato come valori approssimati dei loro limiti

$$\lambda_1 = 16.020 \quad , \quad \lambda_2 = 270.4$$

che ho assunti come valori approssimati dei due primi autovalori del parametro λ , ottenendo così le seguenti due prime velocità critiche relative alle condizioni ai limiti considerate:

$$\omega_1 = 47.483 \quad , \quad \omega_2 = 195.1.$$

3. Osservazione. — Il proseguimento indefinito del descritto metodo di approssimazione può essere possibile a patto di possedere opportuni mezzi meccanici e grafici che consentano calcoli rapidi e sicuri. È da osservare altresì che, forse, solo al detto metodo si deve riconoscere la possibilità di

poter essere applicato anche nei casi in cui non sia lecito ritenere l'albero motore di sezione costante; l'ipotesi della sezione comunque variabile non introduce infatti che pure e semplici diverse modalità di calcolo materiale.

È dunque ben fondata la speranza che l'applicazione di questo metodo, nelle varie ipotesi che si possono fare sulla costituzione dell'albero e nelle varie condizioni ai limiti, possa portare altri meglio dotati di mezzi di calcolo numerico alla definitiva sicura compilazione delle tabelle delle velocità critiche degli alberi motori.

Matematica (Calcolo numerico). — *Tavola del potenziale di una lamina magnetica con orlo circolare*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di BICE PELINI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Il prof. L. Puccianti della R. Università di Pisa ha proposto all'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli la compilazione di una tavola che dia, nei vari punti dello spazio e con un errore minore di $1/10^3$, il potenziale di una lamina magnetica con orlo circolare e di intensità di magnetizzazione *uno*. Ciò equivale a calcolare i valori dell'angolo solido ω , secondo cui si vede un cerchio dai vari punti dello spazio.

Scopo di questa Nota è di mostrare come io sia pervenuta alla compilazione della indicata tabella che qui è riprodotta.

Indico con r il rapporto fra la distanza del punto P dello spazio dal centro O del cerchio e il raggio di questo e con φ l'angolo del raggio vettore \vec{OP} con un asse sulla normale in O al piano del cerchio. Si ha allora, com'è ben noto:

$$(1) \omega(r, \varphi) \left\{ \begin{array}{ll} = 2r \cos \varphi \int_0^\pi d\tau \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{[r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi \cos \tau]^{3/2}}, & \text{per } \varphi \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } r \neq 1 \\ = 2\pi & , \text{ per } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ e } r < 1 \\ = 0 & , \text{ per } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ e } r > 1 \end{array} \right.$$

laddove ω è indeterminato per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $r = 1$. Si può anzi dimostrare

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 agosto 1930.

che se il punto P tende ad un punto A della periferia del cerchio descrivendo una porzione di curva regolare avente in A la tangente t e col piano del cerchio in comune il solo punto A , detti α il semipiano terminato alla tangente a al cerchio nel punto A e contenente il cerchio, β il semipiano terminato alla stessa tangente a e contenente l'asse tangente t volto nel verso secondo cui il punto P si allontana dal piano del cerchio, l'angolo solido ω ha per limite l'area del fuso sferico determinato, sulla sfera di raggio *uno* e di centro in A , dai due semipiani α e β .

A motivo di tale indeterminazione il calcolo di ω con un errore di prestabilita maggiorazione riesce, come si vedrà, assai laborioso nelle vicinanze della periferia del cerchio.

1. **Preliminari.** Con la sostituzione $\rho = rs$, l'integrale nelle (1) si scrive:

$$(2) \quad \omega(r, \varphi) = 2 \cos \varphi \int_0^\pi d\tau \int_0^{\frac{1}{r}} \frac{s ds}{[1 + s^2 - 2s \sin \varphi \cos \tau]^{3/2}},$$

onde segue

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = -2 \cos \varphi \int_0^\pi \frac{d\tau}{[1 + r^2 - 2r \sin \varphi \cos \tau]^{3/2}},$$

e pertanto

$$(3) \quad \omega(r, \varphi) = 2\pi \int_0^r \omega_r(s, \varphi) ds = 2\pi - 2 \cos \varphi \int_0^\pi d\tau \int_0^r \frac{ds}{[1 + s^2 - 2s \sin \varphi \cos \tau]^{3/2}}.$$

Ricordiamo il noto sviluppo:

$$(4) \quad \frac{1}{(1 + s^2 - 2sx)^{3/2}} = X'_1(x) + sX'_2(x) + \dots s^{n-1}X'_n(x) + \dots$$

ove $X_n(x)$ designa il polinomio di Legendre di grado n . Detto sviluppo risulta uniformemente convergente per ogni fissato valore di s di modulo minore di *uno* e per x variabile nell'intervallo $(-1, 1)$ ed altresì per ogni fissato valore di x nello stesso intervallo e per s variabile in qualsiasi intervallo interno all'intervallo $(-1, 1)$.

Per maggiorare l'errore d'approssimazione dei nostri calcoli mi varrò del seguente teorema di maggiorazione per le derivate dei polinomi di Legendre:

Comunque si assumano gli angoli reali φ e τ , si ha:

$$(5) \quad |\cos \varphi X'_n(\sin \varphi \cos \tau)| \leq n + 1 \quad (1).$$

(1) Cfr. PICONE, *Appunti d'Analisi Superiore*, cap. IV. In corso di stampa.

2. **Calcolo di ω per $r > 1$.** Per $r > 1$, la variabile s d'integrazione nell'integrale (2) varia nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{r}\right)$ e riesce $\frac{1}{r} < 1$. È dunque valido lo sviluppo:

$$\frac{s}{[1 + s^2 - 2s \sin \varphi \cos \tau]^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} s^k X'_k(\sin \varphi \cos \tau),$$

uniformemente convergente al variare di s nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{r}\right)$, si avrà pertanto

$$\int_0^{\frac{1}{r}} \frac{s ds}{[1 + s^2 - 2s \sin \varphi \cos \tau]^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X'_k(\sin \varphi \cos \tau)}{(k+1)r^{k+1}},$$

risultando la serie a 2° membro uniformemente convergente al variare di τ , onde segue infine:

$$\omega(\tau, \varphi) = 2 \cos \varphi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)r^{k+1}} \int_0^{\pi} X'_k(\sin \varphi \cos \tau) d\tau.$$

Se si riflette ora che ogni integrale

$$\int_0^{\pi} X'_k(\sin \varphi \cos \tau) d\tau$$

è nullo quando il suo indice è pari, si potrà asserire che:

Per $r > 1$ sussiste il seguente sviluppo in serie per ω :

$$(6) \quad \omega(r, \varphi) = \frac{2 \cos \varphi}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)r^{2k}} \int_0^{\pi} X'_{2k+1}(\sin \varphi \cos \tau) d\tau.$$

Prendendo per valore di ω la somma dei primi n termini della serie ora scritta, ponendo cioè:

$$(6_n) \quad \omega(r, \varphi) = \frac{2 \cos \varphi}{r^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+2)r^{2k}} \int_0^{\pi} X'_{2k+1}(\sin \varphi \cos \tau) d\tau,$$

si commette un errore dato da:

$$R_n = \frac{2 \cos \varphi}{r^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)r^{2k}} \int_0^{\pi} X'_{2k+1}(\sin \varphi \cos \tau) d\tau,$$

il quale riesce maggiorato, ove si faccia ricorso alla (5), al modo seguente

$$(7) \quad |R_n| < \frac{2\pi}{r^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} = \frac{2\pi}{r^{2n}(r^2 - 1)}.$$

Possiamo dunque asserire che: se si vuole che la (6_n) dia un valore di ω con un errore minore di $1/10^3$ basta prendere n in modo che riesca

$$\frac{2\pi}{r^{2n}(r^2 - 1)} < \frac{1}{1000},$$

cioè

$$n > \frac{3 + \log 2\pi - \log(r^2 - 1)}{\log r^2}.$$

Il calcolo del 2° membro di questa diseuguaglianza fornisce i risultati della seguente tabella:

TABELLA I.

r	≥ 10	5	4	3	2	1.8	1.6	1.4	1.2
n	≥ 0.9	1.729	2.177	3.033	5.516	6.753	8.830	13.057	26.235

Da questa si deduce per esempio che:

Per $r \geq 10$ basta fare $n = 1$ perchè la (6_n) fornisca i valori di ω con un errore minore di $1/10^3$, cioè la ben nota formola approssimata

$$\omega(r, \varphi) = \pi \frac{\cos \varphi}{r^2}$$

dà il valore dell'angolo solido ω con un errore minore di $1/10^3$ quando il rapporto r della distanza del punto di vista dal centro del cerchio al raggio di questo, non è inferiore a 10;

per $r = 1, 2$, la (6_n) fornisce i valore di ω con un errore minore di $1/10^3$ quando si faccia $n = 27$, quando si prendono cioè i primi 27 termini della serie (6). Ecc.

3. **Calcolo di ω per $r < 1$.** Per $r < 1$ si ricorrerà alla (3) e con procedimento analogo a quello tenuto nel numero precedente si ottiene che, posto

$$(8_n) \quad \omega(r, \varphi) = 2\pi - 2 \cos \varphi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r^{2k+1}}{2k+1} \int_0^\pi X'_{2k+1}(\sin \varphi \cos \tau) d\tau,$$

si ha il valore di ω con un errore R_n per il quale riesce:

$$R_n < 4\pi \frac{r^{2n+1}}{1-r^2}$$

e quindi con un errore minore di $1/10^3$ quando sin

$$n > \frac{\log\left(\frac{1}{r} - r\right) - 3 - \log 4\pi}{\log r^2}.$$

Il calcolo del 2° membro di questa disuguaglianza fornisce i risultati della seguente tabella:

TABELLA II.

r	≤ 0.2	0.4	0.6	0.8
n	≥ 2.444	4.745	9.175	22.938

4. **Calcolo di ω per $r = 1$.** I precedenti sviluppi non sono più validi per $r = 1$ ed il calcolo dev'essere allora condotto per altra via. Si ha:

$$\omega(1, \varphi) = 2\pi - 2 \cos \varphi \int_0^\pi d\tau \int_0^1 \frac{ds}{[1 + s^2 - 2s \sin \varphi \cos \tau]^{3/2}},$$

$$\int_0^\pi d\tau \int_0^1 \frac{ds}{[1 + s^2 - 2s \sin \varphi \cos \tau]^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{d\tau}{(1 + \sin \varphi \cos \tau) \sqrt{1 - \sin \varphi \cos \tau}};$$

ma, per $|x| < 1$,

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n,$$

con

$$C_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} + \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!} - \dots \pm 1^{(1)},$$

onde segue:

$$(9) \quad \omega(1, \varphi) = 2\pi \left(1 - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \sin^{2k} \varphi \right).$$

(1) Se N è un numero intero positivo con $N!!$ designo il prodotto di tutti i numeri interi non superiori a N avente la stessa parità di N .

Si dimostra facilmente che:

$$0 < C_{2k} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$

e pertanto che arrestando al termine n^{mo} la serie che compare nell'espressione (9) di $\omega(1, \varphi)$, si commette un errore in modulo minore di

$$\frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sin^{2n} \varphi}{\sqrt{n} \cos \varphi}.$$

Se ne deduce che per garantire l'esattezza delle cifre fino a quella inclusa dei millesimi occorre dare ad n i valori riportati nella seguente tabella:

TABELLA III.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
n	1	3	4	6	8	14	25	56	225

5. **Tavole numeriche e grafiche dei valori di ω .** Applicando le considerazioni svolte, sono passata alla effettiva valutazione numerica delle formule approssimate date per i valori di ω ed i risultati ottenuti sono riportati nella tavola numerica a doppia entrata annessa.

La tavola grafica riproduce per ogni costante valore di r tra 0 e 10 il diagramma di ω al variare di φ da 0 a 90°. Dalla semplice ispezione della tavola numerica e di quella grafica ben si vede che le interpolazioni necessarie per avere i valori di ω relativi ai valori di r e φ non contemplati nelle tavole, riescono di difettosa approssimazione nelle vicinanze di $r = 1$; pertanto ho creduto conveniente calcolare anche le derivate di ω rispetto ad r per $r = 1$ e per i vari valori di φ da 0 a 90°. Il calcolo di tale derivata si conduce con modalità analoghe a quelle tenute per il calcolo dei valori di $\omega(1, \varphi)$. I valori di detta derivata sono riportati nella tavola numerica annessa.

TAVOLA NUMERICA.

Valori dell'angolo solido ω , secondo cui si vede un cerchio di raggio uno da un punto avente distanza r dal centro e colatitudine φ rispetto al piano del cerchio.

$\varphi \backslash r$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
60	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0006	0.0006	0.0004	0.0004	0.0002	0
50	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.0008	0.0006	0.0005	0.0002	0
40	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.0008	0.0003	0
30	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.0006	0
20	0.008	0.008	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.001	0
15	0.014	0.013	0.013	0.012	0.011	0.009	0.007	0.006	0.002	0
10	0.031	0.030	0.029	0.027	0.024	0.020	0.016	0.014	0.005	0
5	0.122	0.120	0.115	0.107	0.096	0.081	0.064	0.044	0.023	0
4	0.188	0.185	0.179	0.167	0.150	0.129	0.102	0.071	0.036	0
3	0.322	0.319	0.309	0.292	0.267	0.232	0.188	0.132	0.069	0
2	0.663	0.660	0.649	0.629	0.595	0.541	0.459	0.342	0.184	0
1.8	0.791	0.785	0.768	0.739	0.697	0.636	0.548	0.416	0.230	0
1.6	0.955	0.944	0.913	0.866	0.809	0.741	0.653	0.517	0.299	0
1.4	1.170	1.174	1.169	1.157	1.134	1.077	0.950	0.719	0.410	0
1.2	1.456	1.462	1.472	1.488	1.504	1.508	1.475	1.178	0.642	0
1	1.840	1.849	1.875	1.920	1.988	2.081	2.210	2.390	2.651	—
0.8	2.358	2.376	2.428	2.517	2.653	2.847	3.139	3.613	4.707	6.283
0.6	3.051	3.084	3.182	3.343	3.566	3.859	4.244	4.765	5.452	6.283
0.4	3.950	3.971	4.047	4.178	4.366	4.618	4.941	5.335	5.791	6.283
0.2	5.051	5.067	5.118	5.203	5.320	5.468	5.644	5.843	6.059	6.283
0	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283	6.283

Valori della derivata di ω rispetto a r , per $r = 1$.

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{\partial \omega}{\partial r}$	-2.221	-2.251	-2.346	-2.522	-2.815	-3.304	-4.175	-5.925	-11.608	—

Meccanica. — *Problemi della dinamica del binario.* Nota⁽¹⁾ di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una comunicazione notevole ad un Congresso di Meccanica ed in un Trattato recente sulle più interessanti quistioni della scienza delle costruzioni il Timoshenko⁽²⁾ ha riassunto alcune ricerche sue, volte a dare i primi lineamenti teorici alla meccanica del binario. La quale, com'è ben noto, per onusta d'anni che fosse, s'era poco o niente sviluppata dalla prima fase statica, se si prescinde da considerazioni abbastanza empiriche, alle quali ci si era ormai adattati. In mancanza di meglio ed anche pensando che, l'esperienza diretta, quotidiana e grandiosa, meglio d'ogni trattazione teorica valesse ad informare qualsiasi criterio di stabilità e sicurezza ed apportare suggerimento di perfezionamenti e modifiche. Ed invero, ove si pensi ai valori spesso incerti che si possono assegnare a talune costanti che intervengono come essenziali nel problema statico e dinamico e si consideri l'imponente insieme di azioni perturbatrici, apparentemente tanto disordinate, che accompagnano un treno in corsa, a prima vista sembra sia questo adattamento un seguire la via di mezzo tra la giusta e la più comoda. Conforta anche un tale andare quello assai vicino dei costruttori di ponti che, pur affinando ogni giorno più i metodi della statica, conglobano in un coefficiente d'aumento dei valori statici dei carichi il loro eventuale effetto dinamico, fatti sicuri da decennali esperienze e per nulla timorosi dei disastri avvenuti, perchè quasi tutti prevedibili ai lumi di quella statica, spinta alle soglie della dinamica, che tratta dei complessi critici di carico e delle configurazioni instabili di equilibrio.

Senonchè però, una fiduciosa osservazione della questione mostra che, anche teoricamente, i tratti più cospicui delle suddette azioni perturbanti e dei movimenti da queste generati si possono cogliere senza notevole fatica ed anzi compendiare, in taluni casi, in formole agili e maneggevoli.

Ciò ebbe, come dicemmo, a rilevare il Timoshenko nelle ricerche nominate. Poichè quelle però, non esauriscono il problema, in particolar modo per le schematizzazioni poco aderenti alla realtà cui sono ridotte, può essere intento non privo d'interesse, teorico e pratico, il proseguirle ed estenderle.

In questa Nota si persegue appunto un tale fine assegnando un metodo generale d'integrazione dell'equazione differenziale che compendia tutto il

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1930.

(2) S. TIMOSHENKO, *Method of Analysis of Statical and Dynamical Stress in Rail*, «Proceedings of the second international Congress for applied Mechanics», Zürich 1926 (Orell Füssli Verlag, Zürich und Leipzig).

problema, mentre ad una Nota successiva è riservata la trattazione di quei casi specifici che consentono la deduzione esplicita di tutti quegli indici — *velocità critiche, spostamenti, sforzi ecc.* — che possono interessare la pratica.

Ed è proprio mirando a taluni di questi indici che, per i debiti accertamenti, prima di assumere su assai vasta scala la costruzione (fuori opera) d'un nuovo tipo di armamento ferroviario, ebbe origine la presente ricerca.

§ 2. — *Equazione differenziale del problema. — Metodo generale d'integrazione:* Per qualsiasi tipo d'armamento schematizziamo la rotaia, almeno per ora, ad un'asta elastica infinitamente lunga a momento d'inerzia costante J_0 modulo d'elasticità E , poggiata su un'area b per unità di lunghezza, sopra un suolo elastico di costante d'elasticità C ⁽¹⁾.

Se si considerano i soli spostamenti nel piano normale a quello di appoggio, contati normalmente ad un asse x coincidente con l'asse della rotaia, ove con $\mu = \frac{q}{g}$ si indichi la massa media per unità di lunghezza ottenuta dividendo per l'accelerazione g il peso medio q , e con $p = p(x, t)$ si indichi una distribuzione di forze perturbanti normali ad x , funzioni di x e del tempo t , l'equazione del moto si scrive sotto ben note ipotesi

$$(1) \quad B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2r \frac{\partial w}{\partial t} + \beta w = p(x, t)$$

dove $B = EJ_0$, $\beta = Cb$ ed infine $2r$ è il coefficiente di *dissipazione*, se questa si assume, per ipotesi, proporzionale alla sola velocità. L'integrale generale di questa equazione differenziale non omogenea, lineare a coefficienti costanti, si ottiene sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea un integrale particolare di quella completa. Condizioni cui tale integrale generale deve soddisfare sono — tra le altre — di assumere all'istante iniziale del moto al tempo $t = t_0$ una assegnata configurazione di spazio e velocità che caratterizziamo con due funzioni $\Phi_0 = \Phi_0(x)$ e $\Psi_0 = \Psi_0(x)$. Premettendo di saper trovare un integrale particolare, nullo con la derivata prima rispetto a t all'istante $t = t_0$, poniamo $t_0 = 0$, si tratta di trovare anzitutto un integrale dell'equazione

$$(1a) \quad B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2r \frac{\partial w}{\partial t} + \beta w \equiv 0$$

tale che

$$[w]_{t=0} = \Phi_0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]_{t=0} = \Psi_0.$$

(1) Questa costante viene definita come forza necessaria a provocare l'abbassamento unitario d'una superficie unitaria. Forza e spostamento sono misurati nel senso della normale alla superficie suddetta.

Con questo intento poniamo, separando le variabili, $w(x, t) = \varphi(x) \psi(t)$. Indicando allora con q una costante parametrica, si trova in luogo della (1a),

$$(2) \quad \frac{B \frac{d^4 \varphi}{dx^4}}{\varphi} = q^4, \quad \mu \frac{d^2 \psi}{dt^2} + 2r \frac{d\psi}{dt} + \beta = -q^4;$$

da cui si hanno subito gli integrali particolari

$$\varphi(x) = \cos q'(x - \xi), \quad \psi(t) = e^{-\frac{r}{\mu}t} \cos m \sqrt{n^2 + q^4} (t - \tau)$$

dove ξ e τ sono altre costanti, $q' = \frac{q}{\sqrt{B}}$, $m^2 = \frac{1}{\mu}$, $\beta - \frac{r^2}{\mu} = n^2$.

Essendo quindi il prodotto $\varphi(x - \xi) \psi(t - \tau)$ un integrale della (1a), lo sarà pure l'espressione

$$(3) \quad w_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r}{\mu}(t-\tau)} \cos q'(x - \xi) \cos m \sqrt{q^4 + n^2} (t - \tau) \cdot dq'$$

e così anche l'espressione

$$(4) \quad w_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{r}{\mu}(t-\tau)} \cos q'(x - \xi) \sin m \sqrt{q^4 + n^2} (t - \tau)}{m \sqrt{q^4 + n^2}} dq'.$$

Si vede subito, richiamando la nozione d'integrale di Fourier, che la somma $w_1 + w_2 = w$ soddisfa la (1a) ed è tale che

$$[w]_{t=\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \cos q'(x - \xi) dq' = \Phi_0$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]_{t=\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \cos q'(x - \xi) dq' = \Psi_0.$$

Basta quindi porre nelle (3) e (4) $\tau = 0$, per avere l'integrale cercato.

Quanto all'integrale particolare corrispondente al moto forzato dalla $p(x, t)$, osserviamo che se questa agisse per un tempuscolo $d\tau$ contato a partire dall'istante $\tau > 0$, provocherebbe una distribuzione istantanea di velocità $\frac{p(x, \tau) d\tau}{\mu}$. All'istante $t \geq \tau$ si avrebbe in conformità, ponendo

$\Psi_0(\xi) = \frac{p(\xi, \tau) d\tau}{\mu}$ nella (4), uno spostamento

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi, \tau) d\xi}{\mu} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{r}{\mu}(t-\tau)} \cos q'(x - \xi) \sin m \sqrt{q^4 + n^2} (t - \tau) dq'}{m \sqrt{q^4 + n^2}},$$

da cui, considerando tutti i valori di p nel campo $0 \leq \tau \leq t$, cioè negli istanti anteriori a quello t in cui si misura w ,

$$(5) \quad w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi, \tau) d\xi}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{r}{\mu}(t-\tau)} \cos q'(x-\xi) \sin m\sqrt{q^4 + n^2}(t-\tau)}{m\sqrt{q^4 + n^2}} dq'.$$

essendo come già fu rilevato, in tutte queste relazioni, $q' = \frac{q}{\sqrt{B}}$.

Vedremo in una prossima Nota le applicazioni concrete.

Fisica. — *Sull'effetto Raman dell'acetilene*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di E. SEGRÈ, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

L'effetto Raman di moltissime sostanze solide e liquide è stato studiato e accuratamente descritto in numerosi lavori. Sui gas invece si ha un numero assai minore di ricerche, sebbene il soggetto sia assai interessante e i risultati ottenuti molto importanti.

La ragione essenziale di ciò sta nelle difficoltà notevoli che si incontrano nell'osservare l'effetto Raman nei gas. Finora solo Wood⁽³⁾ e Rasetti⁽⁴⁾ hanno compiuto studi in materia. I loro apparecchi e i metodi usati sono descritti nelle memorie citate. I risultati più brillanti si ottengono senza dubbio impiegando per l'eccitazione delle frequenze Raman della luce ultravioletta e la riga 2536.6 Å del mercurio è la più adatta allo scopo. I principali vantaggi derivanti dall'impiego di una frequenza ultravioletta sono: *a*) maggiore intensità delle righe Raman poichè la diffusione cresce come ν^4 ; *b*) minore influenza dannosa delle impurità come nebbie, ecc.; *c*) assenza di alone nelle fotografie. Tali cospicui vantaggi fanno sì che l'eccitazione ultravioletta sia da preferirsi senz'altro quando è possibile usarla.

Vi hanno però sostanze opache alle radiazioni di frequenza elevata oppure che sotto l'azione di queste si decompongono. Evidentemente per esse bisogna usare una luce eccitatrice di minor frequenza. Anche in questo caso sembra che la sorgente più addatta sia l'arco a mercurio nel vuoto. Si esigono però cure maggiori nella disposizione sperimentale della sostanza da studiare.

Scopo di questa Nota è appunto descrivere un apparecchio costruito per lo studio dell'effetto Raman nei gas nel visibile ed esporre i risultati ottenuti coll'acetilene.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico dell'Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1930.

(3) *Molecular Spectra*. Discussion held by the Faraday Soc., p. 792.

(4) RASETTI, «Nuovo Cimento», VI, 9, p. 1, 1929.

La sorgente era una lampada di quarzo della ditta Heraeus lunga 12 cm. alimentata con corrente continua. Nella lampada passavano 8 amp. Essa e il tubo in cui era contenuto l'acetilene erano raffreddati da un ventilatore.

L'apparecchio contenente l'acetilene era costituito da un grosso tubo di pyrex di 6 cm. di diametro e lungo circa 40 cm., annerito internamente con cura e verniciato esternamente in modo che fosse opaco. Detto tubo era chiuso ad un estremo. All'altro estremo era innestato un raccordo di ebanite portante un tubo di vetro trasparente di mm. 35 di diametro e 220 di lunghezza. Questo secondo tubo portava all'estremo una lente di 7 cm. di distanza focale ed un diaframma costruito in modo che: *a*) sulla lente non arrivi luce proveniente dalle pareti del tubo di vetro; *b*) sullo schermo mediano non arrivi luce diretta dalla lampada. In fig. 1 è disegnato schematicamente il dispositivo.

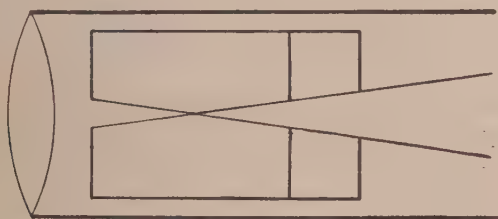


Fig. 1.

Inoltre nel tubo di pyrex vi era un altro diaframma anulare per impedire le riflessioni sul vetro affumicato che per incidenza molto radenti sono possibili. Il vetro stesso del tubo serviva da filtro essendo opaco all'ultravioletto. Tutte le necessarie masticiature erano fatte con ceralacca. Un riflettore di alluminio abbracciava interamente lampada e tubo, che erano tenuti a pochi millimetri di distanza.

Lo spettrografo è un apparecchio a tre prismi di uviol esistente nell'Istituto ed a cui si è adattato un obbiettivo Zeiss-Tessar $f:4.5$ di 250 mm. di distanza focale.

L'acetilene era prodotto dal carburo di calcio e purificato facendolo gorgogliare attraverso una soluzione di potassa caustica e una di sublimato corrosivo nell'acido cloridrico. Infine era asciugato con cloruro di calcio. Dalle prove fatte sembra che la purificazione abbia una notevole importanza nell'impedire la formazione di nebbie le quali, operando nel visibile sono estremamente dannose. La durata di esposizione è stata di 36 e 72 ore.

Nelle lastre ottenute abbiamo osservato 6 righe Raman tutte del tipo Stokes. Di esse 5 erano sottili e ben definite, la 6^a assai diffusa tanto da avere una larghezza di una quarantina di numeri d'onda. Le loro frequenze

sono state misurate per confronto con le linee del mercurio che stavano sullo stesso spettrogramma, mediante interpolazione lineare o parabolica. La precisione del metodo è stata controllata misurando anche alcune righe di frequenza nota del mercurio.

Le righe sottili avevano per es. in una lastra, le frequenze di 25417, 25377, 25318, 22725, 20950 cm^{-1} . Esse sono eccitate manifestamente dal gruppo di righe del mercurio 3650 Å, 4046, 4358. Le differenze di frequenza misurate su varie lastre danno un $\Delta\nu_R = 1979 \pm 6 \text{ cm}^{-1}$.

L'interpretazione della riga diffusa è alquanto più incerta. La sua frequenza nel massimo è di circa 21930 cm^{-1} e se fosse eccitata dalla 4046 il suo $\Delta\nu_R$ sarebbe di circa 2780 cm^{-1} , se fosse eccitata dalla 4358 si avrebbe un $\Delta\nu_R$ di circa 1005 cm^{-1} .

Daure⁽¹⁾ ha studiato lo spettro dell'acetilene disciolto nell'acetone, e ha trovato due spostamenti di frequenza di 1960 e 3320 cm^{-1} . Il primo è evidentemente assai prossimo a quello da noi trovato e la differenza è dovuta verosimilmente alle perturbazioni prodotte dal solvente sulle molecole di acetilene. Un fenomeno analogo è stato osservato anche per l'HCl, l' NH_3 , il CH_4 , il C_2H_6 .

L'altra frequenza invece non ha corrispondenti fra quelle date da Daure. Tuttavia gli altri idrocarburi hanno spostamenti Raman dell'ordine del migliaio di cm^{-1} e di tremila cm^{-1} per cui non si può nemmeno decidere con un criterio analogico da quale frequenza sia eccitata la luce diffusa. Invece non si è notata alcuna frequenza identificabile con la frequenza 3320 indicata da Daure.

Aggiunta nella correzione. — La frequenza 1979 cm^{-1} è stata, secondo una comunicazione personale di R. Mecke, osservata anche nell'assorbimento infrarosso ed è una delle frequenze fondamentali di oscillazione del C_2H_2 .

(1). DAURE, *Molecular Spectra*, ecc., p. 827.

Fisica-Matematica. — *Alcune considerazioni sopra la teoria della trasmissione del calore per convezione forzata.* Nota I ⁽¹⁾ di D. GRAFFI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. In una precedente Nota ⁽²⁾ abbiamo enunciato alcuni teoremi di unicità relativi alla trasmissione del calore per convezione forzata allo scopo di poter applicare con esattezza a tali questioni l'analisi dimensionale. In questa Nota dimostreremo anzitutto un'altro teorema di unicità, che permetterà di rendere rigorosi alcuni risultati di interesse pratico. In un'altra Nota sull'argomento, valendoci di alcuni risultati di questa, stabiliremo un principio, che può chiamarsi *principio di sovrapposizione degli effetti*, e un *principio di reciprocità*, mediante i quali sarà possibile ricavare in modo corretto alcune formule sulla trasmissione del calore.

2. L'equazione di propagazione del calore per convezione è la seguente:

$$(1) \quad \text{div} (k \text{ grad } T) - C_p \rho \text{ grad } T \times \mathbf{v} = C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t},$$

dove T è la temperatura, t il tempo, C_p il calore specifico a pressione costante, ρ la densità, k la conducibilità termica del fluido supposto omogeneo, e infine \mathbf{v} è la velocità del fluido stesso. La \mathbf{v} è determinata dalle equazioni solite della idrodinamica (poichè, trattandosi di convezione forzata, si trascurano i moti dovuti a differenze di temperatura) e perciò la supporremo sempre nota.

Ammetteremo che il nostro fluido si muova in un tubo cilindrico il qual caso ha notevole interesse tecnico. Supporremo poi che l'asse del tubo coincida con l'asse z e indicheremo con \mathbf{k} il vettore unitario parallelo a tale asse. Ora in quasi tutte le ricerche sulla convezione del calore si ammette più o meno esplicitamente ⁽³⁾ che sia trascurabile la quantità di

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1930.

(2) «Rendiconti Accademia dei Lincei», 2° sem. 1928. È da notare che il primo teorema enunciato in questa Nota nel caso stazionario, è analogo dal punto di vista analitico a un teorema di unicità sulle equazioni del tipo ellittico (vedi p. es. l'articolo del SOMMERFELD in «Enc. der Math. Wissen.» Band II, Heft 4), ma non ci risulta che nelle trattazioni sulle equazioni ellittiche sia stata studiata l'applicabilità del teorema in discorso alla convezione. Quanto all'altro teorema da noi dimostrato esso non ci sembra enunciato neppure dal punto di vista analitico.

(3) Vedi p. es. NUSSELT, «Zeitschrift Deutsche Vereins Ingenieur», 1910, p. 1154. Anche il Boussinesq nei suoi lavori trascura spesso il calore trasmesso per conduzione lungo la direzione del moto del fluido.

calore trasmessa al fluido per conduzione nella direzione dell'asse z , ossia nella direzione del moto del fluido, rispetto a quella che gli viene trasmessa per convezione. Per porre questa ipotesi sotto forma matematica basterà porre nella (1) in luogo di k una omografia α , tale che applicata a \mathbf{k} (ossia a un vettore unitario parallelo all'asse del tubo) dia per risultato un vettore nullo, mentre applicata a un vettore \mathbf{a} normale all'asse del tubo dia come risultato il vettore stesso moltiplicato per k . Con questo si viene a supporre appunto $\alpha \text{ grad } T \times \mathbf{k} = 0$, ossia che la trasmissione del calore lungo l'asse del tubo sia nulla; mentre essendo $\alpha \text{ grad } T \times \mathbf{a} = k \text{ grad } T \times \mathbf{a}$, si viene a supporre che la trasmissione del calore normalmente all'asse del tubo sia quella ordinaria. L'omografia α è perciò rappresentata cartesianamente dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è, come si vede, una omografia (dilatazione) degenera. Allora la (1) va scritta nella forma:

$$(2) \quad \text{div} (\alpha \text{ grad } T) - C_p \rho \text{ grad } T \times \mathbf{v} = C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t}.$$

A questa equazione aggiungeremo l'equazione di continuità del moto dei fluidi, che in questa teoria assume la forma:

$$(3) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Si può così enunciare il seguente teorema: *Considerato il fluido nel campo compreso fra due sezioni del tubo, se è nota la temperatura del fluido all'inizio dei tempi in tutto il campo, la temperatura del fluido alla sezione di ingresso e alla parete del tubo⁽¹⁾ per ogni $t \geq 0$, e se infine si suppone che nella sezione di uscita sia sempre $\mathbf{v} \times \mathbf{n} \leq 0$, essendo \mathbf{n} un vettore unitario normale a tale sezione e diretto verso l'interno del campo (ossia nel senso contrario al moto globale del fluido), allora la T è univocamente determinata in ogni istante $t \geq 0$ in tutto il campo.*

Come si vedrà, se la trasmissione è stazionaria non importa conoscere la T all'inizio dei tempi.

Per dimostrare il nostro teorema, supponiamo al solito che esistano due soluzioni della (2) soddisfacenti alle stesse condizioni ai limiti, e sia

(1) In questa teoria si suppone che la temperatura del fluido a contatto con la parte del tubo sia uguale a quella del tubo stesso.

θ la loro differenza. Allora la θ soddisfa la (2) per la linearità di tale equazione, perciò si ha:

$$(4) \quad \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} \theta) - C_p \rho \operatorname{grad} \theta \times \mathbf{v} = C_p \rho \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per θ , e facendo note trasformazioni, si ottiene:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\theta \alpha \operatorname{grad} \theta) - \operatorname{grad} \theta \times \alpha \operatorname{grad} \theta \\ - \frac{C_p \rho}{2} \operatorname{div}(\theta^2 \mathbf{v}) + \frac{C_p \rho}{2} \theta^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{C_p \rho}{2} \frac{\partial \theta^2}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Indichiamo ora con S il campo considerato, σ la superficie che lo limita e con \mathbf{n} il vettore unitario diretto verso l'interno di σ . Integriamo la (5) su tutto S , dopo aver osservato che l'ultimo termine del primo membro di essa è nullo per la (3); indi applichiamo, dove è possibile, il teorema della divergenza. Otteniamo così:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_{\sigma} \theta \alpha \operatorname{grad} \theta \times \mathbf{n} d\sigma - \int_S \alpha \operatorname{grad} \theta \times \operatorname{grad} \theta dS \\ + \frac{C_p \rho}{2} \int_{\sigma} \theta^2 \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = \frac{C_p \rho}{2} \int_S \frac{\partial \theta^2}{\partial t} dS. \end{array} \right.$$

Ora il primo integrale della (6) è nullo. Difatti θ è per ipotesi nulla su tutto σ tranne che sulla σ_u , cioè sulla parte di σ costituita dalla superficie da cui il fluido esce. Ma su di essa si ha $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ e $\alpha \operatorname{grad} \theta \times \mathbf{n} = -\alpha \operatorname{grad} \theta \times \mathbf{k} = 0$; perciò cotesto integrale è nullo. L'altro integrale di superficie si riduce a un integrale esteso a σ_u ; perciò integrando la (6) rispetto al tempo, si ha, ricordando che θ è nulla per $t = 0$,

$$(7) \quad \frac{C_p \rho}{2} \int_S \theta^2 dS + \int_0^t dt \int_S \alpha \operatorname{grad} \theta \times \operatorname{grad} \theta dS - \frac{C_p \rho}{2} \int_0^t dt \int_{\sigma_u} \theta^2 \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

Ora questi tre integrali sono positivi o al più nulli. Per il primo ciò è evidente. Il secondo è l'integrale di $k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2$, quantità positiva o al più nulla; il terzo contiene sotto il segno un quadrato e il prodotto $-C_p \rho \mathbf{v} \times \mathbf{n}$, che è positivo o nullo per ipotesi (1). Perciò per la (7) i tre integrali sono separatamente nulli; e si deduce

$$\int_S \theta^2 dS = 0,$$

da cui segue $\theta = 0$ su tutto S e per ogni $t \geq 0$.

(1) Si ricordi che K e $C_p \rho$ sono positivi come risultato immediato d'esperienza.

Nel caso stazionario si ottiene pure la (6), ma con il secondo membro uguale allo zero. Con un ragionamento analogo al precedente si deduce

$$\int_S \left(k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right) dS = 0,$$

da cui segue $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$, cioè la θ è costante su qualunque piano normale all'asse χ , o all'asse del tubo. Ma la θ è nulla sull'intersezione di questo piano con la parete del tubo, perciò è nulla in tutto il piano ossia in tutto il campo, come si voleva dimostrare.

Il teorema ora enunciato si potrebbe generalizzare al caso di corpi di forma qualsiasi senza incontrare grandi difficoltà concettuali. Tralasciamo però tale generalizzazione.

Osserviamo intanto che il teorema ora dimostrato rende rigorosa l'integrazione della equazione (2) data dal Nusselt⁽¹⁾, con le nostre condizioni, nel caso che il fluido si muova in un tubo di moto laminare. Anche la soluzione trovata da Latzko⁽²⁾ nel caso del moto turbolento può essere resa rigorosa dal nostro teorema, perchè quest'ultimo autore ha mostrato che in qualche condizione speciale di moto turbolento la soluzione è retta ancora da una equazione di tipo (2) con k variabile, ma per la quale vale ancora evidentemente la nostra dimostrazione. Noi ci serviremo però del nostro teorema per ricavare in una prossima Nota per via cortetta una formula in sostanza dovuta a Nusselt⁽³⁾, che esprime la quantità di calore che passa dal tubo al fluido. Intanto stabiliamo una relazione utile per quello che seguirà.

3. Supporremo il moto del fluido turbolento il qual caso ha maggiore interesse in pratica. Come si vedrà più innanzi, se il moto del fluido è turbolento non si può supporre la temperatura costante nel tempo. Perciò per stare nel caso più generale tratteremo il nostro problema nel caso non stazionario.

Supponiamo dunque che all'inizio dei tempi tutto il fluido si trovi a temperatura T_e , e che in ogni istante il fluido abbia pure temperatura T_e nella sezione di entrata del tubo. Sia poi T_p la temperatura della parete del tubo stesso, e T_p e T_e si suppongano costanti anche nel tempo⁽⁴⁾. Si

(1) NUSSELT, loc. cit.

(2) LATZKO, « Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik », Bd. 1, 1921, p. 268.

(3) NUSSELT, « Zeitschrift Deutsche Vereins Ingenieur », 1909, pp. 1750-1808.

(4) Nella pratica all'inizio dei tempi queste condizioni specie quella per T_p è difficilmente soddisfatta, ma in base all'esperienza si può ammettere che queste deviazioni dalle supposte condizioni iniziali abbiano, se T_p e T_e si mantengono in seguito costanti, una scarsa influenza sul calore trasmesso quando si considera lo stato di regime. Perciò le nostre ipotesi non sono troppo restrittive dal punto di vista pratico.

supponga poi per semplicità di dicitura $T_p > T_e$. Allora si soddisfa alla (2) e alle condizioni ai limiti ponendo:

$$T = (T_p - T_e) \Phi(P, t) + T_e,$$

dove $\Phi(P, t)$ è una funzione che soddisfa alla (2), nulla all'inizio dei tempi in tutto il campo e in ogni istante $t \geq 0$ sulla sezione di entrata, e che raggiunge pure in ogni istante $t \geq 0$ il valore 1 sulla parete del tubo. La $\Phi(P, t)$ è così univocamente determinata⁽¹⁾ e indipendente da T_p e T_e . Perciò la quantità di calore dQ ceduta nel tempo dt dalla parete del tubo al fluido è data come è noto da:

$$(8) \quad dQ = -k \int_{\sigma_p} \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt = -k (T_p - T_e) \int_{\sigma_p} \frac{\partial \Phi(P, t)}{\partial n} d\sigma_e dt,$$

essendo σ_p la superficie del tubo. Per avere la quantità di calore Q ceduta nell'unità di tempo dal tubo al fluido basta integrare la (8) da t_0 a $t_0 + 1$, essendo t_0 un valore generico del tempo. Ora l'esperienza prova che tale quantità di calore, preso t_0 e l'unità di tempo sufficientemente grande (cioè nello stato di regime), non dipende dal tempo. Perciò si può scrivere:

$$Q = \alpha (T_p - T_e)$$

con

$$(9) \quad \alpha = k \int_{t_0}^{t_0+1} dt \int_{\sigma_p} \frac{\partial \Phi(P, t)}{\partial n} d\sigma_e$$

dove α non dipende da t .

La (9) è la relazione che cercavamo. Essa ci dice che la quantità di calore ceduta dal solido al fluido è proporzionale alla differenza fra la temperatura del solido e quella a cui entra il fluido⁽²⁾. Volendo poi sapere come α dipenda dalle costanti fisiche del fluido e dalle dimensioni del tubo, si arriva alla formola di Nusselt, ma ciò, come si è detto, verrà trattato in una prossima Nota.

(1) Naturalmente si suppone soddisfatta nella sezione di uscita la condizione $v \times n = 0$.

(2) Nella nostra trattazione prenderemo per temperatura di riferimento quella a cui entra il fluido. Notiamo però che altri autori prendono diverse temperature di riferimento. Osserviamo poi che la proporzionalità fra la Q e $T_p - T_e$ è subordinata all'ipotesi fatta implicitamente che le caratteristiche fisiche del fluido si possano ritenere invariabili con la temperatura il che si può ammettere solo per differenze di temperatura non troppo elevate.

Chimica. — *Selenmercaptano metilico*⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

In due Note precedenti⁽³⁾ ebbi ad occuparmi dei polisolfuri dietilici; mi parve allora strano, durante la ricerca bibliografica, il notare che nessuno aveva ancora preparato e studiato il selenmercaptano metilico. Ciò forse può trovare ragione nella difficoltà della sua preparazione allo stato puro in quanto esso ha tendenza a sciogliere l'idrogeno seleniato che si sviluppa durante la preparazione e che si elimina solo molto difficilmente e dopo ripetute distillazioni. La presenza di idrogeno seleniato costituisce un inconveniente notevole nella preparazione dei selenmercapturi che richiedono un prodotto purissimo perchè altrimenti risultano mescolati al seleniuro del metallo. Si deve poi tener presente che oltre a ciò il selenmercaptano metilico ha un odore fortissimo e nauseante e la sua azione tossica, a causa anche della sua volatilità, è molto maggiore di quella degli altri selenmercaptani.

Il selenmercaptano metilico è un liquido di color giallo chiaro che bolle a 12° a 758 mm. con uno scarto di 31°,5 rispetto al punto di ebollizione del selenmercaptano etilico. È interessante anzi a questo proposito il confronto fra i punti di ebollizione degli alcoli, mercaptani e selenmercaptani:

P. eb.		P. eb.		P. eb.	
CH ₃ OH	64°,5	CH ₃ SH	5°,8	CH ₃ SeH	12°,0
C ₂ H ₅ OH	78°,0	C ₂ H ₅ SH	37°,0	C ₂ H ₅ SeH	53°,5
C ₃ H ₇ OH	97°,0	C ₃ H ₇ SH	67°,0	C ₃ H ₇ SeH	84°,0
C ₄ H ₉ OH	117°,0	C ₄ H ₉ SH	97°,0	C ₄ H ₉ SeH	114°,0

Le differenze fra i punti di ebollizione dei mercaptani e dei selenmercaptani sono molto concordanti come si vede dalla seconda e terza colonna della tabella (quest'ultima così completata); le differenze fra i punti di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1930.

(3) Questi « Rendiconti », Vol. IX, 6°, pp. 773-778 e pp. 903-906.

ebollizione degli alcoli sono invece molto diverse non solo da quelle dei mercaptani e dei selenmercaptani, ma anche fra di loro, a causa della associazione degli alcoli che è tanto maggiore quanto minore è il peso molecolare.

A causa della sua volatilità non ho determinato l'indice di rifrazione ed il peso specifico del selenmercaptano metilico; questi però avrebbero avuto poco interesse in quanto, dovendo essere determinati a temperatura molto bassa, non mi avrebbero permesso di stabilire dati di confronto con gli altri selenmercaptani alchilici. Ho invece preparato ed analizzato i selenmercapturi di mercurio, piombo, argento, rame e bismuto, tutti composti facilmente alterabili sia all'aria che alla luce. Specialmente alterabile è il selenmercapturo di argento che si decompone completamente in pochissimi giorni. Il colore di questi selenmercapturi varia dal giallo all'arancio; si presentano sotto forma di polveri micricristalline che si decompongono prima di fondere dando seleniuro di metile $(\text{CH}_3)_2\text{Se}$ e il seleniuro del metallo.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione del selenmercaptano metilico. — (CH_3SeH) . — Il selenmercaptano metilico venne da me ottenuto trattando una soluzione alcoolica di selenidrato di sodio con ioduro di metile



La soluzione di selenidrato di sodio occorrente fu ottenuta per saturazione di una soluzione alcoolica al 10 % di etilato di sodio con idrogeno seleniato. Quest'ultimo fu introdotto nella soluzione alcoolica fino a ridiscioglimento del precipitato di Na_2Se che si forma dapprima abbondantemente. La soluzione fuori del contatto dell'aria è incolore, ma è quasi sempre colorata in rosso da piccole quantità di selenio che si libera.

La soluzione ottenuta fu trattata con ioduro di metile (5 % meno del teorico) in un pallone da 1000 cc. munito di refrigerante a ricadere collegato alla estremità superiore, mediante un tubo, al recipiente di raccolta che venne raffreddato con una miscela di anidride carbonica ed acetone. Il recipiente di raccolta venne poi posto in comunicazione con una torre di assorbimento riempita con pietra pomice inbevuta di permanganato di potassio per captare i prodotti di odore nauseante e fortissimo sfuggenti alla condensazione. Dopo aver mescolato le due soluzioni, il pallone venne riscaldato lentamente a bagno maria: si ottenne così la distillazione del selenmercaptano che si raccolse nel recipiente raffreddato.

Il selenmercaptano metilico fu purificato sottoponendolo a ripetute distillazioni e condensandolo sempre in recipienti raffreddati fortemente per

evitare notevoli perdite di prodotto. È un liquido quasi incolore che bolle a 12° a 758 mm. ed ha un odore sgradevolissimo e molto persistente. Esso venne analizzato dosando il selenio con un Carius; i risultati analitici sono i seguenti:

sostanza pesata	Se pesato	Se % trovato	Se % teorico
0.0741	0.0614	82.86	83.18
0.0972	0.0807	83.02	»

Preparazione del metilselenmercaptopuro di mercurio. — $(\text{CH}_3\text{Se})_2\text{Hg}$. — Questo composto fu ottenuto versando a piccole porzioni il metilselenmercaptano in una soluzione acquoso-alcoolica di cianuro mercurico raffreddata fortemente. Si ottenne un precipitato microcristallino giallo chiaro, che fu filtrato, lavato ripetutamente prima con acqua ed alcool e poi con alcool puro ed essiccato sotto vuoto. Esso venne analizzato decomponendolo in Carius e dosando il mercurio come solfuro. I risultati analitici sono i seguenti:

sostanza pesata	Hg pesato	Hg % trovato	Hg % teorico
0.1002	0.0597	51.36	51.56
0.1251	0.0745	51.38	»

Preparazione del metilselenmercaptopuro di piombo. — $(\text{CH}_3\text{Se})_2\text{Pb}$. — Questo composto fu ottenuto sotto forma di polvere microcristallina gialla introducendo a piccole porzioni il metilselenmercaptano in una soluzione raffreddata di acetato neutro di piombo. È molto instabile e si decompone prima di fondere. Esso venne analizzato decomponendolo per riscaldamento con acido nitrico concentrato, precipitando il piombo come solfuro e pesandolo come solfato. I risultati sono i seguenti:

sostanza pesata	PbSO_4 pesato	Pb % trovato	Pb % teorico
0.1540	0.1179	52.30	52.37
0.0841	0.0644	52.29	»

Preparazione del metilselenmercaptano di argento. — (CH_3SeAg) — Questo composto si ottiene analogamente ai precedenti introducendo il metilselenmercaptano in una soluzione acquoso-alcoolica di nitrato di argento e di acetato di sodio. È instabilissimo sia all'aria che alla luce e diventa nero in poche ore; sotto vuoto ed allo scuro si conserva inalterato qualche giorno. È una polvere di color giallo rossastro che si decompone prima

di fondere. Esso venne analizzato decomponendolo per riscaldamento con acido nitrico e dosando l'argento come cloruro. I risultati sono i seguenti:

sostanza pesata	HgAgCl pesato	Ag % trovato	Ag % teorico
0.0942	0.0667	53.29	53.39
0.0830	0.0587	53.24	»

Preparazione del metilselenmercapturo di rame. — $(\text{CH}_3\text{Se})_2\text{Cu}$. — Questo composto si ottiene versando lentamente il metilselenmercaptano in una soluzione acquoso-alcoolica di acetato neutro di rame raffreddata fortemente. Si ha un precipitato giallo intenso che per riscaldamento si decompone in $(\text{CH}_3)_2\text{Se}$ e CuSe . Esso venne analizzato decomponendolo per riscaldamento con acido nitrico e dosando poi il rame come solfuro. I risultati sono i seguenti:

sostanza pesata	Cu_2S pesato	Cu % trovato	Cu % teorico
0.1020	0.0322	25.12	25.23
0.0732	0.0230	25.10	»

Preparazione del metilselenmercapturo di bismuto. — $(\text{CH}_3\text{Se})_3\text{Bi}$. — Si ottiene come polvere cristallina gialla introducendo il metilselenmercaptano in una soluzione acquoso-alcoolica di cloruro di bismuto e di acetato di sodio. È facilmente alterabile; esso venne analizzato decomponendolo per riscaldamento con acido nitrico e dosando il bismuto come solfuro. I risultati analitici sono i seguenti:

sostanza pesata	Bi_2S_3 pesato	Bi % trovato	Bi % teorico
0.0845	0.0441	42.44	42.52
0.0987	0.0515	42.41	»

Riassumendo:

1) Viene preparato il metilselenmercaptano non ancora descritto e ne viene determinato il punto di ebollizione (12° a 758 mm.).

2) Vengono preparati i corrispondenti metilselenmercapturi di mercurio, piombo, argento, rame e bismuto.

Chimica. — *Ricerche intorno all'Oleasterina. (Idrocarburo contenuto nel frutto d'Olivo)*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di GIOVANNI SANI, presentata dal Socio A. MENOZZI.

A fianco delle diverse fitosterine delle quali mi sono occupato fin qui⁽³⁾, ho sempre trovato altre sostanze parimenti insaponificabili che le accompagnano in varia misura, dotate di proprietà organolettiche, chimiche e fisiche differenti che mi sono proposto ognora di studiare, quando avessi avuto modo di raccoglierne ed adunarne quantità sufficienti. Ora mi è stato possibile preparare parecchi grammi della sostanza oleosa, densa, giallo ambra tendente al rosso, brillante, che aderisce tenacemente a guisa di vernice agli oggetti cui viene a contatto e si estrae insieme alla fitosterina dell'olio d'olivo. Il suo studio preliminare è argomento di questa nota che ho l'onore di presentare a codesta Illustre Accademia.

Come dicevo descrivendo la preparazione della fitosterina dell'olio d'olivo, per la quale ho seguito il metodo del Bömer⁽⁴⁾, durante la seconda saponificazione si vede sornuotare al liquido idro-alcoolico caldo un olio di colore giallo ranciato, tendente al rosso, che non risente affatto l'influenza della potassa alcoolica, che è in essa insolubile e che per raffreddamento si rapprende in una massa cristallina brillante.

Questo olio, ancora caldo, si pone in un imbuto a robinetto, ove dopo addizione di 20 cmc. di acqua e raffreddamento, si scioglie in etere; la soluzione eterea si lava con poca acqua a più riprese e da ultimo, dopo filtrazione attraverso carta onde asciugarla, si distilla. Come residuo si ha l'olio purificato che, per raffreddamento, lascia depositare cristalli.

Onde rendere più facile la separazione dei cristalli dall'olio denso vischioso che li accompagna, io ho sciolto il residuo della distillazione in etere ed alcool assoluto a parti uguali; da questa soluzione per evaporazione lenta si depositano cristalli che si raccolgono su filtro e si hanno abbastanza puri con un'accurata aspirazione alla pompa.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Perugia.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1930.

(3) G. SANI, *Oleasterina*, «Le Stazioni sperimentali agrarie Italiane», 1902, vol. XXXV, fasc. IX.

(3) G. SANI, *Ampelosterina e suoi derivati*, «Rend. d. R. Accademia dei Lincei», vol. XIII, 2° sem., serie 5ª, fasc. 11, 4 dicembre 1904.

(3) G. SANI, *Arbusterina e suoi derivati*, «Rend. d. R. Accademia dei Lincei», vol. XXIX, serie 5ª, 1° sem., fasc. 1 e 2, 18 gennaio 1920.

(4) «Zeit. Unters. von Nahrungs- u. Genussmitteln» vol. I, 1898.

Il filtrato, evaporati i solventi, non lascia ulteriormente deporre cristalli e costituisce il materiale di cui mi occupo presentemente.

Questo, come dicevo, è una massa oleosa, densa, insolubile in acqua ed in alcool diluito, a peso specifico inferiore all'acqua, solubile in alcool assoluto specie a caldo, molto più in etere, in benzina, in solfuro di carbonio, che acquista mobilità quando viene scaldato e per le sue proprietà specifiche ha presentato difficoltà non piccole alle indagini necessarie al suo studio.

PROPRIETÀ FISICHE.

La soluzione alcoolica di questo prodotto è dicroica, cioè giallo aranciato per trasparenza, verde per riflessione.

DETERMINAZIONE DEL PESO SPECIFICO.

In primo luogo, del prodotto venne determinato il peso specifico con un picnometro normale a 17°.5 e si ottenne

$$\text{peso specifico} = 0.8934$$

Altre costanti fisiche mi riservo di indagare (potere rifrangente, attività ottica sul piano della luce polarizzata) e determinare eventualmente, appena ne abbia i mezzi o approfittando della cortesia di qualche collega meglio di me provvisto di apparecchi, dovendo tornare sull'argomento nella descrizione dello studio dei prodotti di scissione e di addizione che ho ottenuto da questa sostanza.

Naturalmente era necessario vedere se il materiale in istudio era rappresentato da un'unica sostanza, e se questa era allo stato di chimica purezza, e l'ho sottoposto a distillazione a pressione diminuita con una pompa ad acqua e mercurio raccogliendo la porzione che passa a 300° che è quasi la totalità del liquido; il piccolo residuo, di grato odore a caldo, l'ho conservato per eventuali nuove indagini.

La porzione distillata ha un peso specifico pressochè uguale al prodotto primitivo, cioè p. s. determinato a 17°.5 con picnometro normale da 25 cmc. è uguale a 0.8896.

Del prodotto primitivo e del prodotto disillato ho fatto l'analisi elementare, ottenendo i seguenti risultati:

ANALISI ELEMENTARE DELLA SOSTANZA COME TALE:

1ª determinazione di C e di H:

Sostanza presa per l'analisi	. . . gr.	0.228
Co ² ottenuta	. . . »	0.732
H ² O »	. . . «	0.2475
che danno	. . . C %	= 87.67
» »	. . . H %	= 12.07

2^a determinazione di C e di H:

Sostanza presa per l'analisi	. .	gr. 0.211
Co ² ottenuta	» 0.674
H ² O »	» 0.2358
che danno	C % = 87.13
» »	H % = 11.90

ANALISI ELEMENTARE DEL PRODOTTO DI DISTILLAZIONE:

1^a determinazione di C e di H:

Sostanza presa per l'analisi	. .	gr. 0.252
Co ² ottenuta	» 0.800
H ² O »	» 0.2763
che danno	C % = 87.45
» »	H % = 12.20

2^a determinazione di C e di H:

Sostanza presa per l'analisi	. .	gr. 0.182
Co ² ottenuta	» 0.622
H ² O »	» 0.2025
che danno	C % = 87.79
» »	H % = 11.82

Come appare chiaramente tanto dal peso specifico come dai risultati analitici ottenuti, la sostanza non ha subito alterazioni sensibili nella distillazione fatta a pressione diminuita.

Con la scorta dei dati analitici ottenuti si arriva ad una formula minima uguale a



per la quale si calcola

$$C = 87.50 \%$$

$$H = 12 \%$$

il che è in perfetta armonia con le determinazioni analitiche che ho sopra riportate.

Senonchè questo composto assorbe una quantità ingente di Alogeni il che non può conciliarsi con questa formula minimale, onde la formula vera deve essere ragionevolmente un suo multiplo.

Recentemente ho potuto montare nel mio laboratorio un Ozonogeno Siemens e Alsche destinato a diverse ricerche che ho in corso e frattanto

ho provato a fare agire Ozono sul mio composto al duplice scopo di arrivare possibilmente a determinarne il peso molecolare con una rigorosa determinazione della quantità di Ozono assorbita da un peso noto del materiale, non essendo applicabili, per le proprietà caratteristiche di questa sostanza, gli altri metodi a tale scopo destinati, e da altra parte di potere conoscere da vicino la costituzione di questo idrocarburo con lo studio dei prodotti di scissione ottenibili dalla decomposizione del suo ozonuro.

Questa seconda applicazione io spero feconda di utili risultati in modo speciale, per risolvere diversi casi che mi interessano da tempo, fra questi anche lo studio di altri idrocarburi

DETERMINAZIONE DEL NUMERO DI OZONO.

La sostanza in esame venne pesata in un apparecchio tarato per assorbimento di Ozono:

peso apparecchio vuoto	gr. 80 — 8.908
» » + sostanza	» » — 7.038
» della sostanza presa	» gr. 1.87
prima pesata dopo ozonizzazione	gr. 80 — 6.8622
ozono fissato	» 0.1735 ozono % 9.40
seconda pesata dopo ozonizzazione	gr. 80 — 6.733
ozono fissato	» 0.305 ozono % 16.31
terza pesata dopo ozonizzazione	gr. 80 — 6.5536
ozono fissato	» 0.4844 ozono % 25.93
quarta pesata dopo ozonizzazione	gr. 80 — 6.45
ozono fissato	» 0.588 ozono % 31.30
quinta pesata dopo ozonizzazione	gr. 80 — 6.42
ozono fissato	» 0.618 ozono % 33.15

Arrivati a questo punto — non si fissa più ozono, mentre ho osservato che durante l'ozonizzazione la sostanza contenuta nel tubo di assorbimento muta profondamente di aspetto.

Sulla natura dell'Ozonuro ottenuto e dei suoi prodotti di Scissione riferirò in una prossima nota, pertanto il risultato ponderale avuto dall'esperimento è assai istruttivo.

Infatti mentre questa grande quantità percentuale di ozono assorbito è in armonia con i saggi qualitativi cui ho accennato, che indicavano una

intensa attività assorbente per gli alogeni da parte dell'Oleastene, è facile, alla stregua di questi dati, arrivare alla grandezza molecolare di questo idrocarburo con un calcolo molto semplice.

Il multiplo più piccolo della formula ricavata dai dati analitici sopra citati e che si accorda con le risultanze ponderali della ozonizzazione è dato da



ora se per questo idrocarburo si ammette l'esistenza di tre doppie legature nella sua molecola, si potranno unire tre molecole di ozono, il che conduce per l'ozonuro alla formula



per la quale si calcola una quantità di ozono per cento pari a 33.33, il che va perfettamente d'accordo con la quantità di Ozono assorbita per cento dall'Oleastene che è, come si è visto, di 33.15; si può dunque a questo composto assegnare un peso molecolare pari a 288. È questa forse la prima volta che l'Ozono rende un così segnalato servizio, di valere cioè a determinare il peso molecolare di una sostanza.

Dell'Oleastene ho ottenuto anche due derivati azotati, sui quali riferirò prossimamente ⁽¹⁾.

Biologia (Fisiologia vegetale). — *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte* $\lambda = 2-3$ m., *sui bachi da seta*. Nota ⁽²⁾ di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

PARTE II.

b) Irraggiamento dei piccoli bachi appena nati.

Per queste esperienze furono presi i piccoli bachi il giorno stesso della loro nascita e furono fatti lotti di 100 bacolini, per le prove con le onde corte e per quelle di confronto.

Abbiamo iniziato l'irraggiamento dei bachi con onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m. collocando i bachi entro il circuito oscillante posto in risonanza col Radio oscillatore, per un periodo di tempo di 30 minuti giornalieri, e nelle stesse condizioni già usate per i bachi di 15 giorni di vita. Questa dose però si è dimostrata troppo forte e abbiamo dovuto diminuirla, il che si può fare sia diminuendo la durata di esposizione, sia l'intensità di emissione: ritenemmo più adatto questo ultimo metodo: così abbiamo irraggiato i piccoli bachi sempre per mezz'ora, ma con una intensità di onde elettromagnetiche più piccola.

(1) Il prof. MENOZZI e MORESCHI, « Rend. Acc. Lincei », hanno descritto un idrocarburo saturo che accompagna la bombisterina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1930.

Le piccole dosi esaltano blandamente l'attività fisiologica e lo sviluppo dei bacolini: a datare dalla prima muta si può aumentare l'intensità, o ricorrere ad irraggiamento più forte.

Anche in questo caso, come nel precedente ⁽¹⁾, abbiamo potuto riscontrare un più rapido decorso della vita dei bachi irraggiati. Questi diventano più grandi, hanno peso e lunghezza maggiore dei bachi di confronto.

Per porre in evidenza con dati, questa differenza, riportiamo il peso medio e la lunghezza media dei bachi appartenenti alle due prove.

Dopo 23 giorni dalla nascita e irradiazione fin dal primo giorno.

	Bachi prova di confronto	Bachi irraggiati
Lunghezza media dei bachi	19.5 mm.	32.8 mm.
Peso medio dei bachi	164 mgr.	382 mgr.

Percentuale in più nella lunghezza dei bachi irraggiati: 68.2 %
 » » » nel peso dei bachi irraggiati: 139.0 %

Curve statistiche.

Distribuzione del peso dei bachi
confronto.

Distribuzione del peso dei bachi
sottoposti all'azione delle onde.

10 bachi pesano 10 mgr.

26 » » 15 »
 34 » » 20 »
 10 » » 25 »
 5 » » 30 »
 4 » » 35 »

8 bachi pesano 20 mgr.

13 » » 25 »
 15 » » 30 »
 16 » » 35 »
 30 » » 40 »
 17 » » 45 »
 8 » » 50 »
 6 » » 55 »
 6 » » 60 »
 5 » » 65 »
 4 » » 70 »
 1 » » 75 »

Da questa distribuzione di frequenza dei pesi, si vede che per i bachi irraggiati, essi sono fortemente spostati verso i pesi maggiori.

(1) Vedi, *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m., sui bachi da seta.* Parte I, prof. G. MEZZADROLI e dr. E. VARETON.

Distribuzione della lunghezza.

Bachi prova di confronto.

Bachi sottoposti all'azione delle onde elettromagnetiche di $\lambda = 2-3$ m.

6 bachi hanno una lung. di 10 mm.					8 bachi hanno una lung. di 20 mm.						
18	»	»	»	»	15	»	»	»	»	25	»
21	»	»	»	»	20	»	»	»	»	30	»
18	»	»	»	»	25	»	»	»	»	35	»
12	»	»	»	»	30	»	»	»	»	40	»
						1	»	»	»	45	»
						1	»	»	»	50	»

Dopo 32 giorni dalla nascita di questi bachi il massimo, per i bachi di confronto, è nella zona di 20 mm., mentre esso è spostato, per quelli irradiati nella zona di 35 mm.

	Bachi prova di confronto	Bachi sottoposti all'azione delle onde elettromagnetiche
Lunghezza media	62 mm.	83.7 mm.
Peso medio	2.500 mgr.	4.950 mgr.

Percentuale in più nella lunghezza dei bachi sottoposti all'azione delle onde, 35 %.

Percentuale in più nel peso dei bachi sottoposti all'azione delle onde 98 %.

IMBOSCATURA

Al 32° giorno i bachi sottoposti all'azione delle onde corte iniziano la salita al bosco e la filatura del bozzolo, mentre i bachi della prova di confronto iniziano la salita al bosco da 6 a 7 giorni dopo, quando i bachi irradiati hanno già tutti completato il loro bozzolo da 2 giorni.

Dal giorno in cui i bachi iniziano il loro bozzolo fu sospeso l'irradiamento.

BOZZOLI

Formati i bozzoli essi vennero raccolti e pesati per entrambe le prove dopo una uguale tempo dall'inizio affinché non si avessero differenze per perdita in peso dovuta alla perdita di umidità dei bozzoli.

Peso di 100 bozzoli provenienti da bachi irraggiati	= 195.05 gr.
Peso medio dei bozzoli provenienti da bachi irraggiati	= 1.9505 »
Peso di 100 bozzoli provenienti da bachi di confronto	= 160.30 »
Peso medio dei bozzoli provenienti da bachi di confronto	= 1.603 »
Percentuale in più nel peso dei bachi irraggiati	19.517 %.

I bozzoli provenienti dai bachi irradiati vennero ancora irradiati nelle medesime condizioni citate per i bachi, per 30 minuti giornalieri.

La nascita delle farfalle di questi bozzoli ha luogo $6 \div 7$ giorni prima di quelle dei bozzoli di confronto.

CONCLUSIONE E RIASSUNTO

Abbiamo studiato l'azione che le onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. esercitano sui bachi da seta irraggiandoli a partire dal momento della loro nascita, e abbiamo potuto osservare quanto segue:

1). L'esposizione di 30 minuti giornalieri colla stessa intensità usata nelle prime esperienze è troppo forte per i piccoli bachi appena nati. Fino alla prima muta bisogna irraggiare i bachi solo per 15 minuti con quella intensità, oppure diminuire l'intensità e fare irraggiamento di 30 minuti; questo secondo metodo è più consigliabile.

2). L'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte sui bachi è più efficace se si inizia l'irraggiamento sui bachi appena nati e dà migliori risultati che non irraggiandoli dal 15° giorno di vita.

3). Questa maggiore azione favorevole si manifesta con una più grande differenza nel peso e nella lunghezza dei bachi: al 23° giorno si riscontra: Percentuale in più nella lunghezza 68.2 %, percentuale in più nel peso 139 %. Al 32° giorno, la percentuale in più nel peso dei bachi irradiati è del 100 %, e quella in più nella lunghezza degli stessi è del 35 %.

4). I bachi irraggiati iniziano la tessitura del bozzolo da 6 a 7 giorni prima dei bachi di confronto.

5). I bozzoli dei bachi irradiati, continuati ad irradiare danno farfalle che nascono da 6 a 8 giorni prima.

6). Il peso dei bozzoli provenienti da bachi irraggiati è del 19.51 % maggiore di quello dei bachi di confronto.

7). Il peso degli involucri dei bozzoli provenienti dai bachi irraggiati è di 4.43 % in più.

8). Il rapporto peso involucro bozzolo, peso bozzolo totale è maggiore nei bozzoli provenienti dai bachi irraggiati e precisamente del 3.66 %.

Fisiologia. — *Sul potere moderatore del tessuto nervoso centrale*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di M. MITOLO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Nel corso di alcune mie ricerche sulle modificazioni della eccitabilità riflessa, dipendenti dallo spostamento (provocato dall'aggiunta di acidi o di alcali) del pH della soluzione fisiologica di NaCl al 0.7 %, nella quale era immerso l'asse cerebro-spinale isolato e sopravvivate di *Bufo v.* (preparato centrale Baglioni), ho potuto osservare che il pH iniziale della sol. acida o alcalina, dopo contatto con il midollo spinale, subisce costantemente uno spostamento verso il valore della neutralità. Tale spostamento è tanto più evidente quanto più il pH delle soluzioni è distante da quello della semplice soluzione fisiologica. Nelle condizioni sperimentali in cui mi ero posto, non potevo categoricamente asserire che il fenomeno dipendesse dal potere moderatore, di cui può essere fornito il tessuto nervoso a somiglianza di altri tessuti animali e vegetali (Atzler e Lehmann, (3); Koppel e Spiro, (7); Marenzi e Rossignoli, (10); Gellhorn, (6); De Caro, (5); Müller, (11); Comel, (4); Krantz jr., (8). Infatti, avendo le sostanze tampone dissociate un'azione propria sulle fibre e sulle cellule nervose, non ho potuto far uso delle loro soluzioni, ma mi sono avvalso di sol. acide (HCl, ac. lattico) o basiche (NaOH, KOH), il cui pH era misurato col metodo colorimetrico subito prima che esse venissero poste a contatto con l'asse cerebro-spinale.

Con le presenti ricerche ho voluto studiare il fenomeno, impiegando sostanza nervosa centrale prelevata dal *Bufo v.* e ridotta a poltiglia con un piccolo pestello, previa sforbiciatura. A differenza dei precedenti AA., che si sono occupati del potere moderatore dei tessuti, ho adoperato quantità minime di sostanza nervosa centrale (milligrammi) e quantità relativamente grandi di miscele tampone (10 cc.); in tal modo si può compiere uno studio più minuto del processo e si evita la possibile obiezione che il pH finale delle miscele tampone sia la risultante del pH delle miscele stesse e del tessuto (o dei liquidi intestiziali di questo).

Prescindo da qualsiasi trattazione teorica dell'argomento, di cui già si sono ampiamente occupati van Slyke (12), Lehmann (9), Koppel e Spiro (7) e recentemente Comel (4). Per la misurazione del pH, ho impiegato il metodo colorimetrico, servendomi del nuovo comparatore di Hellige n. 3052 e, come indicatori, dell' α -dinitrofenolo, del γ -dinitrofenolo, del paranitrofenolo e del metanitrofenolo. Le miscele tampone usate sono state quelle di Sørensen (HCl M/10 + glicocollo M/10, fosfato monopotassico M/15 + fosfato disodico M/15) e di McIlvaine (acido citrico M/10 + fosfato disodico M/5); esse sono state fatte con prodotti Kahlbaum, secondo Sørensen (13).

In una prima serie di ricerche sull'azione del peso della sostanza nervosa centrale, si è visto che il potere moderatore del tessuto è in un certo rapporto col peso stesso. Riesce invece indifferente la sezione dell'asse cerebro-spinale su cui si esperimenta (cervello o midollo spinale):

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1930.

TABELLA I.

Sostanza nervosa centrale + sol. tampone cc. 10, a pH vario.

T = 25° C.; durata dell'esperienza 20'.

N.	pH della sol. tampone	mgr. 20	mgr. 40	mgr. 60	mgr. 80	mgr. 100	mgr. 120
1	5.3 (Sørensen)	5.5	5.5	5.6 (1)	5.6	5.6	5.6
2	8.0 (Sørensen)	7.9	7.9 (1)	7.9	7.9	7.8	7.8

(1) È stata eseguita una prova con poltiglia di midollo spinale ed un'altra prova con poltiglia di cervello; per ambedue si è avuto un valore di pH 5,6; altrettanto si è osservato per il pH 7,9.

Al contrario, scarso rapporto esiste tra potere moderatore del tessuto e durata del contatto (da 10' a 120') con la miscela tampone:

TABELLA II.

Sostanza nervosa centrale mgr. 40 + sol. tampone cc. 10, a pH vario.

T = 25° C.

N.	pH della sol. tampone	10'	20'	45'	60'	80'	120'
1	3.3 (Sørensen)	3.4	3.4	3.5	3.5	—	3.5
2	4.4 (McIlvaine)	—	4.5	—	4.5	4.5	—
3	6.2 (Sørensen)	6.3	—	6.3	6.4	—	—
4	7.4 (McIlvaine)	—	7.4	—	7.3	7.3	—
5	8.0 (Sørensen)	7.9	7.9	7.9	7.8	—	7.8

Nemmeno la temperatura pare abbia alcuna azione sulla grandezza del potere moderatore:

TABELLA III.

Sostanza nervosa centrale mgr. 40 + sol. tampone cc. 10, a pH vario.

Durata dell'esperienza 20'.

N.	pH della sol. tampone	5° C.	25° C.
1	3.3 (Sørensen)	3.4	3.4
2	4.4 (McIlvaine)	4.4	4.4
3	7.4 (McIlvaine)	7.4	7.4
4	8.0 (Sørensen)	7.9	7.9

Isolando l'asse cerebro-spinale e studiandone il potere moderatore in tempi differenti, si osserva che quanto più lungo è il tempo trascorso dall'isolamento, tanto più rilevante è il potere moderatore:

TABELLA IV.

Sostanza nervosa centrale mgr. 40 + sol. tampone cc. 10, a pH vario.

T = 25°C.; durata della esperienza 60'

N.	pH della sol. tampone	subito dopo l'isolamento	dopo 8 ore	dopo 36 ore
1	4.4 (McIlvaine)	4.5	4.5	4.6
2	6.2 (Sørensen)	6.4	6.4	6.4
3	8.0 (Sørensen)	7.8	7.8	7.7

Le condizioni di isotonia ed anisotonia pare che non influiscano affatto o quasi sulla grandezza del potere moderatore: lasciando a contatto, per un'ora, la sostanza nervosa centrale con soluzioni isotoniche od anisotoniche di NaCl (5 cc), si hanno i seguenti risultati:

TABELLA V.

Sostanza nervosa centrale mgr. 40 + sol. tampone cc. 10, a pH vario.

T = 25° C.; durata della esperienza 60'.

N.	pH della sol. tampone	NaCl 0.35 %	NaCl 0.70 %	NaCl 1 %	NaCl 2 %
1	4.4 (McIlvaine)	4.5	4.5	4.5	4.5
2	6.2 (Sörensen)	6.4	6.4	6.4	6.4
3	8.0 (Sörensen)	7.9	7.8	7.9	7.9

Lasciando a contatto il tessuto nervoso centrale, per un'ora, con soluzioni isotoniche di KCl, LiCl, KJO₃ (5 cc.), non si nota molta differenza nella grandezza del potere moderatore, rispetto a quella trovata per il tessuto nervoso immerso, per egual tempo, in sol. isotonica di NaCl; tuttavia vi sono piccole differenze, a seconda del pH delle miscele:

TABELLA VI.

Sostanza nervosa centrale mgr. 40 + sol. tampone cc. 10, a pH vario.

T = 25° C.; durata della esperienza 20'.

N.	pH della sol. tampone	NaCl	KCl	LiCl	KJO ₃
1	4.4 (McIlvaine)	4.4	4.5	4.5	4.5
2	8.0 (Sörensen)	7.9	7.9	8.0	8.0

Rinnovando, in un tempo stabilito, la miscela tampone intorno alla stessa sostanza nervosa, il potere moderatore, massimo nelle prime rinnovazioni, diminuisce nelle successive, fino a scomparire:

TABELLA VII.

Sostanza nervosa centrale mgr. 40 + sol. tampone cc. 10, a pH vario.

$T = 25^{\circ} C.$

N°	pH della sol. tampone	Dopo 80'	Cambio ogni 20'	Dopo 120'	Cambio ogni 40'
1	4.4 (McIlvaine)	4.5	a - 4.5		
			b - 4.5		
			c - 4.4		
			d - 4.4		
2	7.4 (McIlvaine)	7.3	a - 7.3		
			b - 7.4		
			c - 7.4		
			d - 7.4		
3	3.3 (Sørensen)			3.5	a - 3.5 b - 3.5 c - 3.4
4	8.0 (Sørensen)			7.8	a - 7.9 b - 7.9 c - 7.9

Sperimentando su assi cerebro-spinali di preparati centrali Baglioni, sottoposti per un'ora all'azione di cc. 10 di una sol. di solfato neutro di stricnina al 2,5: 10.000 in sol. fisiologica (convulsioni tetaniche), oppure all'azione di cc. 10 di una miscela di sol. fisiologica (cc. 9,5) e alcool etilico assoluto (cc. 0,5) (narcosi), si nota che la stricnina esalta il potere moderatore, mentre l'alcool etilico lo deprime.

TABELLA VIII.

Sostanza nervosa centrale mgr. 40 + sol. tampone cc. 10, a pH vario.

T = 25°C; durata della esperienza 60'.

N.	pH della sol. tampone	NaCl	stricnina	alcool etilico
1	4.4 (McIlvaine)	4.5	4.5	4.4
2	6.2 (Sörensen)	6.4	6.5	6.3
3	8.0 (Sörensen)	7.8	7.7	7.9

Da queste ricerche si può concludere che il tessuto nervoso centrale è dotato di un potere moderatore, di natura fisico-chimica, superiore a quello posseduto di per sè dalle miscele tampone. Questo potere della sostanza nervosa centrale, come per gli altri tessuti, è assai probabilmente dovuto ad alcuni sistemi acido-sali (ac. fosforico-fosfati; ac. carbonico-carbonati, ecc.), equilibrati vicino alla neutralità ed a bassa costante di dissociazione, nonchè ai proteinati, come recenti studi hanno dimostrato.

LETTERATURA.

- (3) ATZLER e LEHMANN, «Pflüger's Arch.», CXCVII, 206, 1922.
- (4) COMEL, «Arch. di Fisiol.», XXVI, 586, 1928; Ibid., XXVII, 177, 1929; «Arch. di Scienze biol.», XIII, 353, 1929.
- (5) DE CARO, «Boll. Soc. Ital. Biol. sperim.», III, 314, 1928,
- (6) GELLHORN, «Pflüger's Arch.». CCX, 492, 1925; Ibid., CCXIII, 779, 1926; Ibid., CCXVI, 253, 1927.
- (7) KOPPEL e SPIRO, «Bioch. Zeitschr.», LXV, 409, 1914.
- (8) KRANTZ jr., «Journ. amer. pharmac. Assoc.», XVIII, 469, 1929.
- (9) LEHMANN, «Bioch. Zeitschr.», CXXXIII, 30, 1922.
- (10) MARENZI e ROSSIGNOLI, «Cpt. rend. Soc. Biol.», XCIX, 176, 1928.
- (11) MÜLLER, «Zeitschr. f. Kinderheilk.», XXXV, 285, 1923.
- (12) van SLYKE, «Journ. Biol. Chem.», LII, 525, 1922.
- (13) SÖRENSEN, «Bioch. Zeitschr.», XXI, 131, 1909.

Fisiologia. — *Curva idremica normale (a digiuno) in diversi esercizi fisici di breve durata*⁽¹⁾. Nota III⁽²⁾ di L. BRACALONI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

L'osservazione che la corsa provocava diminuzioni della quota idremica molto più accentuate che la marcia⁽³⁾ suggerì l'ipotesi che il fenomeno fosse legato più all'intensità che alla durata dell'esercizio fisico.

Si è quindi studiato con altre esperienze il comportamento della curva idremica prima, durante e dopo un'esercizio fisico intenso ma di breve durata⁽⁴⁾, quale la corsa di velocità di 50 o 100 metri, la salita di 9 metri di fune, la voga in stanza (10, 20, 30 palate), 10-30 flessioni sulle braccia agli appoggi Baumann, 10 flessioni sulle gambe.

Si sono presi in esame sei soggetti giovani di buona costituzione fisica e in stato di digiuno da circa 12 ore. I soggetti erano pesati a vescica vuota all'inizio e al termine dell'esperienza. Le osservazioni sono state fatte in estate e in inverno con temperature d'ambiente varianti da 9 a 26° C. Le determinazioni del contenuto in acqua del sangue erano eseguite con il micrometodo di J. Bang secondo la tecnica già descritta⁽⁵⁾.

Si è così constatato che per effetto degli esercizi fisici sopra citati si ripete costantemente il fenomeno della diminuzione della quota idremica. Così nel I e nel II soggetto la diminuzione percentuale della quota idremica per effetto di 100 metri di corsa è rispettivamente di 1.03 e 1.23 (vedi tab. I); la salita di 9 metri di fune provoca nel III soggetto una diminuzione della quota idremica di 1.10 e così di seguito negli altri soggetti per i diversi esercizi sperimentati.

Come risulta dalla seguente tabella la entità della diminuzione percentuale della q. i. varia da soggetto a soggetto anche in rapporto allo stesso esercizio.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Fisiologia applicata della Scuola Centrale Militare di Educazione Fisica, Farnesina, Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 agosto 1930.

(3) U. CASSINIS e L. BRACALONI, *Sulla curva idremica normale nel riposo, nella marcia e nella corsa*. Nota I. Questi «Rendiconti», Classe Sc. fis. e mat., vol. IX, serie 6^a, I sem., fasc. 4, 1929.

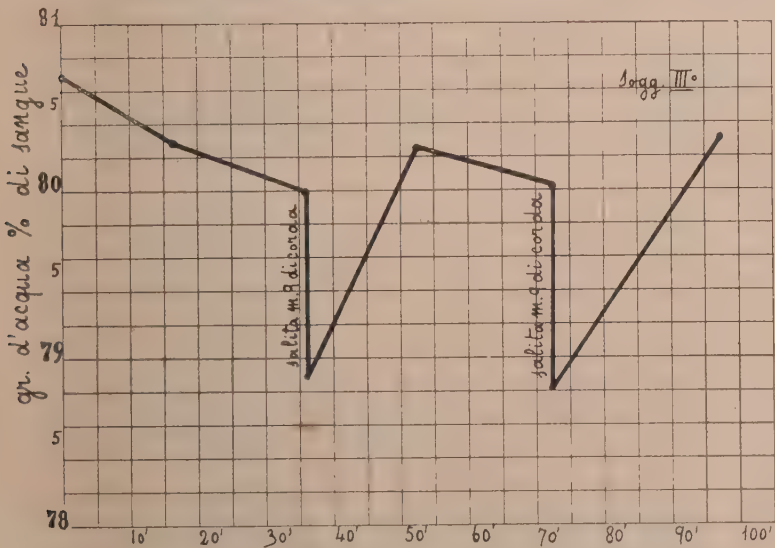
(4) Nelle esperienze precedenti sia la corsa che la marcia erano eseguite su lunghi percorsi e il primo campione di sangue, durante il lavoro muscolare, era prelevato al minimo dopo 600 metri di corsa o 1.800 metri di marcia.

(5) L. BRACALONI, *Microtecnica per la determinazione del contenuto in acqua del sangue*. «Arch. di Farmacologia speriment. e scienze affini», Roma, 1928.

TABELLA I.

	Quota idremica prima dell'esercizio fisico	Esercizio fisico	Quota idremica subito dopo terminato l'esercizio fisico	Diminuzione percentuale della quota idremica
Soggetto I	78.85	Corsa m. 100	77.82	1.03
Soggetto II	78.43	Corsa m. 100	77.20	1.23
Id. id.	77.56	15 palate voga	76.75	0.81
Id. id.	77.79	45 palate voga	77.10	0.69
Soggetto III	80.00	m. 9 di fune	78.90	1.10
Id. id.	80.02	m. 9 di fune	78.82	1.20
Soggetto IV	79.58	Corsa m. 50	79.30	0.28
Id. id.	79.48	Corsa m. 100	78.83	0.65
Soggetto V	78.01	10 flessioni appoggi	77.50	0.51
Id. id.	77.37	10 flessioni appoggi	76.85	0.52
Soggetto VI	78.32	10 flessioni appoggi	78.25	0.07

Alcuni soggetti hanno ripetuto più volte, nel corso della stessa esperienza, l'esercizio fisico frammettendo delle lunghe pause di riposo; così



N. d'ordine	Soggetto	Descrizione dell'esperienza	Quot
1	Sogg. I cap. Aloisi Fausto cameriere, età a. 21 peso corp. Kg. 58.700	10-VIII-29 $t = 25^{\circ}$ Curva idremica a digiuno e corsa m. 100 a 46'	78.76
2	Sogg. II cap. L. B. professionista, età a. 28 peso corp. Kg. 71.300	10-VIII-29 $t = 25^{\circ}$ Curva idremica a digiuno e corsa m. 100 a 30'	
3	Sogg. III sold. V. Aruanno impiegato, età a. 21 peso corp. Kg. 59.900	7-IX-29 $t = 26^{\circ}$ Curva idremica a digiuno e due salite di m. 9 di corda a 50' e a 104'	80.69
4	Sogg. IV sold. L. Guglielmi agricoltore, età a. 25 peso corp. Kg. 70.000	15-XI-29 $t = 9^{\circ}$ Curva idremica a digiuno e due corse di m. 50 e 100 a 34' e a 105'	
5	Sogg. II cap. L. B. peso corp. Kg. 76.900	20-XI-29 $t = 14^{\circ} \rightarrow 15^{\circ} p = 762$ Curva idremica a digiuno e tre tempi di voga rispettivamente di 15, 30 e 45 palate a 37', 85' e 125'	
6	Sogg. V sold. L. Caetani trattore, età a. 22	17-XI-29 $t = 12^{\circ} p = 762$ Curva idremica a digiuno e tre tempi di ap- poggi Baumann (10 flessioni sulle braccia a corpo disteso) a 27', 86' e 100'	
7	Sogg. VI sold. P. Cocca agricoltore, età a. 21 peso corp. Kg. 71.900	18-I-30 $t = 10^{\circ} \rightarrow 13^{\circ} p = 771$ Curva idremica a digiuno e cinque tempi di appoggi Baumann (10 flessioni sulle braccia a corpo disteso) a 28', 38', 49', 63' e 78'	
8	Sogg. II cap. L. B. peso corp. Kg. 78.600	29-I-30 $t = 10^{\circ} \rightarrow 11^{\circ} p = 751$ Curva idremica a digiuno e cinque tempi di appoggi Baumann e flessioni sulle gambe (10 flessioni sulle braccia a corpo disteso e 10 flessioni sulle gambe) a 37', 49', 63', 75' e 89'	77.80

* Il tempo è contato, per tutte le esperienze, dal prelevamento del primo campione di

ercizi fisici di breve durata.

Quote idremiche successive										Quantità d'urina emessa cmc.	Diminuzione del peso corporeo gr.
49'	62'	85'								90'	95'
77.82	78.49	78.74								35	50
33'	44'	61'								75 ^A	78'
77.20	77.57	78.28								40	100
52'	68'	88'	106'	131'						—	—
78.90	80.27	80.02	78.82	80.31						—	—
36'	54'	72'	86'	108'	129'	156'	171'				41' 104' 176'
79.30	79.56	79.35	79.48	78.83	79.28	79.19	80.01			—	50 150 50 = 250
38'	57'	70'	87'	100'	113'	127'	141'	154'	169'		173'
76.75	77.39	77.10	76.96	77.82	77.79	77.10	77.45	77.87	182		400
29'	42'	57'	72'	89'	101'	116'	133'	149'			
77.50	78.11	77.06	77.37	76.85	76.65	77.20	77.30	77.24	—		—
30'	39'	51'	65'	79'	95'	110'	127'		132'		135'
78.25	78.04	77.90	77.33	78.03	78.27	78.29	78.09		32		200
39'	52'	65'	77'	92'	106'	119'	132'		142'		145'
77.25	76.87	77.34	77.19	76.91	77.47	77.90	77.47		260		550

nel II soggetto si è osservato per effetto di 15 palate di voga una diminuzione percentuale della q. i. di 0.81; per effetto di 30 palate di 0.14 e di 0.69 per effetto di 45 palate (v. tab. II esp. 5); nel III soggetto la salita di 9 metri di fune provoca la prima volta una diminuzione percentuale della q. i. di 1.10 e la seconda volta di 1.20 (v. tab. II esp. 3 e diagr.). La scarsa entità della diminuzione della q. i. per 30 palate di voga si deve imputare al fatto che la q. i. prima dell'inizio del secondo tempo di lavoro aveva già a riposo un basso valore e minore quindi ne risulta la diminuzione per effetto dell'esercizio fisico.

Cioè ripetendo più volte con lunghe pause di riposo un esercizio fisico la curva idremica presenta ogni volta altrettanti abbassamenti qualora durante il periodo di riposo sia risalita al livello normale.

Se i soggetti eseguono invece di seguito lo stesso esercizio fisico, la q. i. tende a mantenersi sul valore della prima diminuzione; così nel V soggetto (v. tab. II esp. 6) che esegue per due volte consecutive 10 flessioni sulle braccia, si osserva una diminuzione percentuale nelle due q. i. di lavoro di 0.52 e 0.72 rispetto all'ultima q. i. di riposo, ma la differenza tra le due quote di lavoro è soltanto di 0.20; questo fenomeno era già stato osservato nella corsa di 6.000 metri⁽¹⁾. Invece nel VI soggetto che esegue per cinque volte consecutive 10 flessioni sugli appoggi Baumann si osserva la progressiva diminuzione della quota idremica di lavoro (v. tab. II esp. 7).

La perdita del peso corporeo (in cui è compresa l'urina, eliminata) si deve attribuire non solo all'esecuzione dell'esercizio fisico ma anche, e specialmente, alla diminuzione del peso corporeo che ha luogo normalmente durante lo stato di digiuno.

CONCLUSIONE.

Un qualsiasi esercizio fisico intenso ma di breve durata, provoca in tutti i soggetti, una diminuzione repentina della q. i.; la q. i. dopo l'esercizio è 0.07-1.23 % minore dell'ultima q. i. a riposo. Il ritorno della q. i. al valore di riposo avviene entro 15-25', dalla fine dell'esercizio fisico: si osserva spesso che nel ritorno il valore della q. i. è alquanto superiore a quello con cui si intraprese l'esercizio (v. tab. II sogg. II, III e IV)⁽²⁾.

Se si fa ripetere più volte l'esercizio fisico con lunghe pause di riposo durante le quali la q. i. ritorna al suo valore normale, si notano ogni volta altrettante diminuzioni della q. i.

(1) U. CASSINIS e L. BRACALONI, *Ulteriori ricerche sulla curva idremica a riposo, nella marcia e nella corsa*. «Archiv. di Fisiol.», vol. XXVIII, fasc. 1, 1930.

(2) Vedi Note citate e *Curva idremica provocata nel riposo e negli esercizi fisici*. Questi «Rendiconti», Cl. Sc. fis. mat. e nat., vol. XI, serie 6^a, I sem., fasc. 5, 1930.

Se si fa ripetere di seguito lo stesso esercizio fisico la q. i. continua a mantenersi (con tendenza alla diminuzione) sul minor valore della prima q. i. di lavoro; il ritorno al valore normale avviene nel riposo egualmente entro 15'.

Ma se la q. i. di lavoro è già bassa, eseguendo un esercizio fisico si nota in questo caso soltanto una piccola diminuzione della q. i. (v. tab. II, sogg. II, esp. 5).

Non vi è relazione costante tra l'entità della diminuzione della q. i., la durata e la qualità dell'esercizio fisico.

Fisiologia. — *Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia. Notizie storiche* ⁽¹⁾. Nota I ⁽²⁾ di CLARA FORTI presentata dal Corresp. S. BAGLIONI.

L'interruzione dei soli nervi o dei nervi e vasi dell'ovaia è stata praticata più volte e con vari procedimenti dai chirurghi a scopo terapeutico soprattutto per curare nevralgie pelviche. Jaboulay (1898) ⁽³⁾ reseccò la catena del simpatico sacrale, subito dopo di lui il Ruggi (1899) ⁽⁴⁾ praticò la resezione del fascio nerveo-vascolare ovarico, e fino a questi ultimi anni si è continuata ad applicare con successo, a scopo terapeutico, l'interruzione del simpatico pelvico. Quasi nulla però si può dedurre da questi interventi sulle conseguenze della asportazione dei nervi e dei vasi sulle funzioni dell'ovaia, soprattutto perchè la maggior parte delle operazioni furono eseguite in donne in cui gli organi sessuali erano già alterati. Tuttavia Dupont e Lhermitte (1927) ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾, che praticarono in dodici pazienti la sezione bilaterale dei nervi ovarici al loro ingresso nell'ovaia, senza ledere i vasi, riferiscono che in otto casi continuarono a presentarsi le mestruazioni anche parecchi mesi dopo l'operazione, ed in una operata si ebbe gravidanza due o tre mesi dopo l'intervento. Successivamente Dupont (1929) ⁽⁷⁾ in dieci

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1930.

(3) JABOULAY, *Le traitement de la névralgie pelvienne par la paralysie du sympathique sacré*. «Lyon méd.» Janv. 1899 e «Sém. méd.», p. 24, 1899.

(4) RUGGI, *Della simpaticectomia al collo e all'addome*. «Bull. Scienze Med.». Anno 70, serie VII, vol. X, 1899.

(5) DUPONT et LHERMITTE, *Notes sur l'histologie des nerfs de l'ovaire en particulier dans l'ovarite scléro-kystique*. «Acad. de méd. de Paris», 4 mai 1926.

(6) DUPONT et LHERMITTE, *De l'énervation de l'ovaire*. «Gyn. et Obstétr.», Vol. XV, p. 161, 1927.

(7) DUPONT, *De l'énervation de l'ovaire*. «Gyn. et Obstétr.», Vol. XX, p. 581, 1929.

su tredici pazienti operate di enervazione bilaterale ha osservato il ripresentarsi delle mestruazioni.

L'interruzione dell'arteria utero-ovarica e dei nervi che l'accompagnano a scopo sperimentale, fu praticata per la prima volta dal Nasi (1901)⁽¹⁾, aiuto del Ruggi. Egli eseguì la resezione del fascio vascolo nervoso in cinque coniglie da ambo i lati, in altre cinque da un lato solo. Nelle quattro operate da un solo lato e sopravvissute per parecchi mesi poté avere accoppiamento e fecondazione; però da cinque a tredici mesi dopo l'intervento, mentre in due di esse si aveva atrofia dell'ovaia e della tuba dal lato operato ed atrofia parziale dell'utero, in una le alterazioni anatomiche erano solo di lieve grado e nell'altra mancavano del tutto. Delle quattro sottoposte alla resezione bilaterale e sopravvissute, solo una rimase fecondata e partorì due feti vivi; le altre tre si accoppiarono più volte ma non furono fecondate. All'esame anatomico nella prima non si avevano dieci mesi dopo l'atto operatorio alterazioni microscopiche delle ovaie degne di nota, le salpingi solo in qualche punto presentavano caduta della mucosa, nell'utero vi era qualche fibra muscolare in degenerazione granulo grassosa; in altre due invece le ovaie, le tube e l'utero mostravano evidenti segni di atrofia; nell'ultima infine quindici mesi dopo l'operazione l'apparato genitale era interamente ridotto ad una massa grassosa che si spappolava sotto le dita, solo la vagina era normale; risultati analoghi ottenne nei ratti, nei quali, inoltre, la escisione dei soli nervi non avrebbe prodotto secondo l'A. alterazioni della funzione di riproduzione.

Nel 1926 Macomber Donald⁽²⁾ in quattro coniglie asportò l'ovaia di un lato ed allacciò il fascio vascolo nervoso utero-ovarico dell'altro, in quattro animali di controllo l'asportazione di una sola ovaia non impedì la gravidanza ed il parto; delle quattro in esperimento invece una rimase sempre sterile e non accettò più l'accoppiamento; all'autopsia l'ovaia era notevolmente più piccola del normale, non vi erano corpi lutei, non sviluppo di follicoli di Graaf, vi erano numerosi follicoli atresici; nelle altre si ebbero solo alterazioni temporanee della funzione, due riacquistarono la loro prolificità tre mesi dopo l'operazione, una partorì due piccoli dopo un mese, ma poi per circa tre mesi non ebbe più gravidanze.

Anche Ging e Guttmacher (1927)⁽³⁾ nelle loro osservazioni sugli effetti dei traumi dell'ovaia hanno studiato le conseguenze dell'interruzione dei

(1) NASI, cit. dal RUGGI in *Risultanze definitive avute dalle simpaticectomie addominali*, «Bull. Scienze Med.». Anno 72, serie VIII, vol. I, 1901. Bologna.

(2) MACOMBER DONALD, *Exper. Stud. on ovarian function. I. The relation of blood supply to ovarian function in the Rabbit*, «Boston Med. a. Surg. Journ.», Bd. 194, p. 529, 1926; *II. The relation of blood supply to ovarian function in rat*, «Boston Med. a. Surg. Journ.», Bd. 196, 1927; *III. The relation of nerve supply to ovarian function in rat*. Ibid.

(3) GING e GUTTMACHER, *The effect of ovarian traumatization on the spontaneous activity and genital tract of the albino rat ecc.* «Amer. Journ. of Physiol.», vol. 82, 1927, p. 335.

nervi e dei vasi. Asportavano un'ovaia e dopo aver isolata l'altra dai tessuti circostanti, portando via tutto il grasso ed il tessuto connettivo che circonda l'organo (con questo procedimento interrompevano verosimilmente anche la continuità dei vasi e nervi ovarici), legavano l'arteria uterina all'estremità del corno dell'utero o asportavano un piccolo tratto del mesenterio uterino in corrispondenza dell'unione dell'ovidutto col corno dell'utero. Nella prima o nelle prime tre o quattro settimane dopo l'operazione videro nei ratti forte diminuzione dell'attività spontanea, scomparsa delle modificazioni cicliche del secreto vaginale e forte aumento del peso del corpo. In uno solo dei tre ratti in cui era stata praticata la legatura dell'arteria uterina l'attività spontanea, il peso del corpo, le modificazioni cicliche del reperto cellulare negli strisci del secreto vaginale, a distanza dall'operazione tornarono normali. Negli altri due le alterazioni funzionali persisterono per tutto il tempo che durò l'osservazione, il reperto degli strisci era quello che si ha nei ratti castrati. All'esame istologico si trovò completa degenerazione dell'ovaia. Anche negli animali in cui era stata praticata non la legatura, ma la escisione dell'arteria uterina i disturbi del ciclo sessuale furono persistenti, ma a differenza che nel caso precedente, a distanza dall'operazione, si trovarono negli strisci del secreto vaginale, continuamente cellule cornee. Alla necropsia l'utero era fortemente ipertrofico; i corpi lutei erano scarsi o mancavano del tutto, vi erano nelle ovaie numerose cisti follicolari delimitate soltanto dalle cellule della granulosa. Gli AA. ritengono che l'ipertrofia dell'utero e la costante presenza di cellule cornee nel secreto vaginale fossero provocate dalla secrezione continua delle cellule della granulosa.

L'interruzione dei soli nervi dell'ovaia a scopo sperimentale è stata praticata da Kraul (1927)⁽¹⁾ ⁽²⁾, che ha studiato estesamente e con diversi metodi i rapporti reciproci fra sistema nervoso e ovaia. Dalle sue osservazioni, fondate però soprattutto sugli effetti di iniezioni ipodermiche di adrenalina e pilocarpina, che egli praticò in topi, ratti, e conigli, conclude che il sistema nervoso vegetativo ha una grande importanza per la regolazione delle funzioni dell'organo, che non sarebbero perciò soltanto connesse con quelle delle altre ghiandole sanguigne; le iniezioni di pilocarpina e di adrenalina inibiscono l'ovulazione; negli strisci del secreto vaginale non si ha più durante il periodo delle iniezioni il reperto caratteristico dell'estro. Come ogni ghiandola a secrezione interna anche l'ovaia sarebbe sottoposta all'azione antagonista del simpatico e del parasimpatico; questo favorirebbe la maturazione dei follicoli, il primo la inibirebbe e favorirebbe il persistere dei corpi lutei e lo sviluppo della ghiandola interstiziale (si potrebbe obiettare,

(1) KRAUL, *Nervensystem u. Eierstock*. « Arch. f. Gynäkol. », Bd. 132. Kongressber. 1927.

(2) KRAUL, *Der Einfluss d. Innervation auf den Eierstock*. « Arch. f. Gynäkol. », Bd. 131, 1927. S. 600.

che l'adrenalina e la pilocarpina potrebbero agire sull'ovario anche in via indiretta). L'A. interruppe inoltre la continuità dei nervi di un'ovaia, in quattro coniglie, legando e sezionando il legamento infundibolo-pelvico in cui decorrono i nervi ovarici ed isolando e bagnando con una soluzione di fenolo i vasi del *mesovarium*, ottenne in tal modo atrofia dell'organo corrispondente. La ghiandola interstiziale si era atrofizzata molto più dell'apparato follicolare; quest'ultimo era relativamente conservato, vi si trovavano però numerose cisti follicolari dilatate od atresiche.

Le osservazioni che si trovano nella letteratura sono dunque ancora troppo scarse e discordi per poter trarre conclusioni definitive sugli effetti dell'interruzione parziale o totale dei vasi e dei nervi che si portano all'ovaia, in modo da poter risalire agli adattamenti funzionali di cui può essere capace l'organo, quando isolato completamente dai suoi rapporti nervosi e vascolari, come accade nei trapianti, deve adattarsi a funzionare con vasi neoformati e senza che si ristabiliscano i rapporti normali col sistema nervoso.

Possiamo anzi dire che non si è ancora neppure d'accordo sull'origine dei ramuscoli nervosi e vascolari che si distribuiscono all'ovaia. Infatti mentre Schäfer⁽¹⁾ ammette che i nervi derivino dal plesso ovarico e dai nervi uterini, la maggior parte degli AA. (Testut⁽²⁾, Sthör⁽³⁾, Hovelacque⁽⁴⁾, Segond⁽⁵⁾, Dupont e Lehrmitte⁽⁶⁾) ritengono che almeno nella donna, siano rappresentati esclusivamente dai nervi ovarici, che seguendo il tragitto dell'arteria utero-ovarica penetrerebbero nell'organo. Anche Krause⁽⁷⁾,⁽⁸⁾ e Gerhardt⁽⁹⁾ nelle loro Memorie sull'anatomia del coniglio accennano a rami per l'ovaia soltanto parlando del nervo spermatico. Per i roditori non ho trovato notizie concordi neppure sull'origine dei vasi che irrorano l'organo, infatti mentre Krause⁽⁷⁾,⁽⁸⁾ e Gerhardt⁽⁹⁾ parlano solo di ramuscoli provenienti dall'arteria ovarica, e mentre anche Macomber Donald⁽¹⁰⁾ crede che con l'allacciatura dell'arteria ovarica e dei nervi che l'accompagnano vengano a mancare all'ovaia i nervi e i vasi normali, Ging e Guttmacher⁽¹¹⁾ affermano che nel ratto il sangue è portato all'organo dall'arteria uterina.

(1) SCHÄFER, *Microscopic Anatomy*, p. 657, London 1912.

(2) TESTUT, *Anatomia Umana*, Torino 1928.

(3) STÖHR, *Die peripherischen Anteile d. vegetativen Nervensystems* in «Handb. d. Mikr. Anat. d. Menschen», Bd. IV, I Teil, p. 390, Berlin 1928.

(4) HOVELAQUE, *Anatomie des nerfs crâniens et rachidiens et du système grand sympathique chez l'homme*. Paris 1925.

(5) SEGOND, *Innervation des organes génitaux de la femme*. «Thèse de Paris», 1926.

(6) Ved. indicaz. (4).

(7) KRAUSE, *Mikrosk. Anat. d. Wirbeltiere*, Bd. I, Säugetiere, S. 153. Berlin u. Leipzig 1921.

(8) KRAUSE, *Anatomie d. Kaninchens*, pp. 195 e 266, Leipzig 1868.

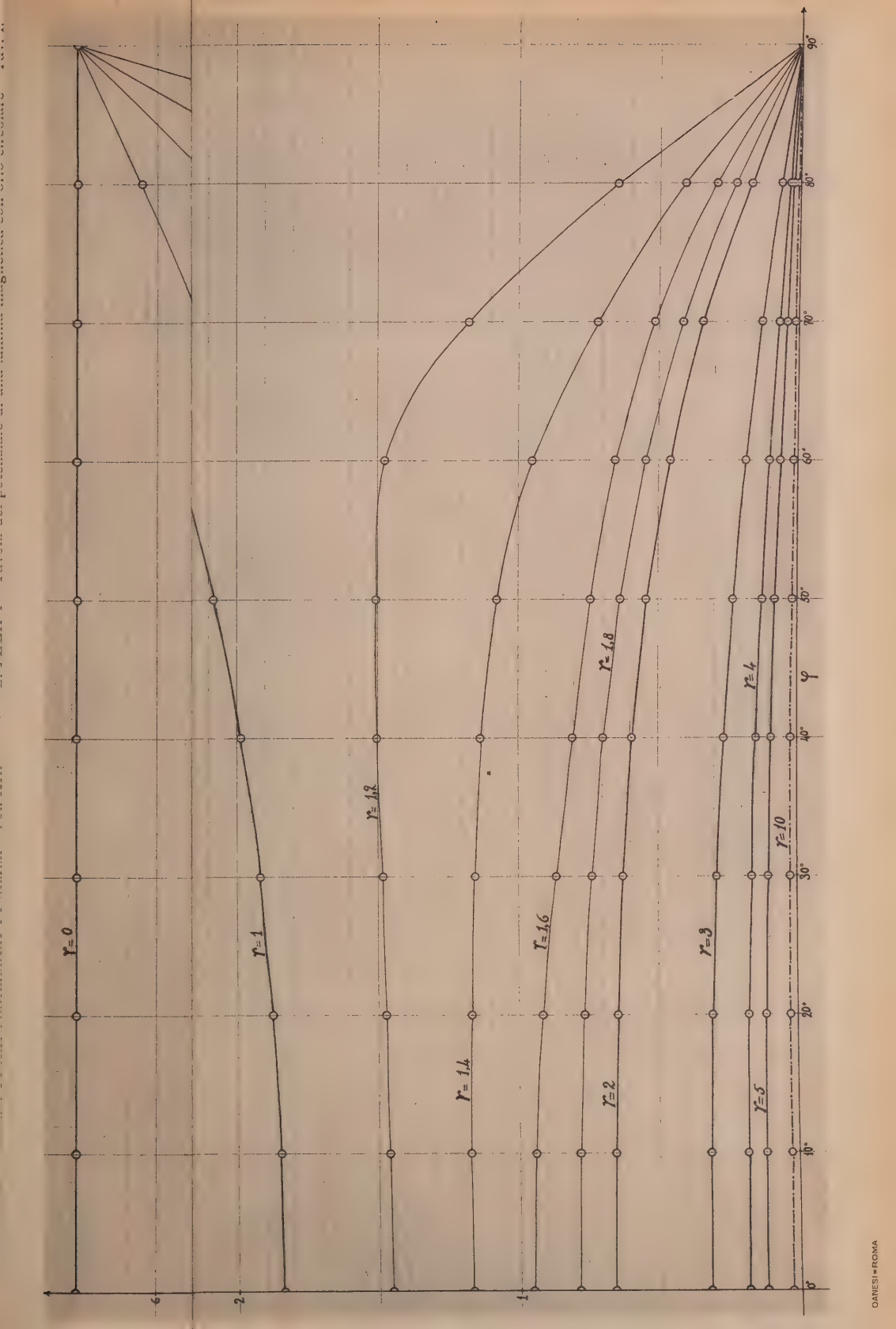
(9) GERHARDT, *Das Kaninchen ecc.*, S. 220, Leipzig 1909.

(10) Loc. cit.

(11) Loc. cit.

Mi sembrò pertanto utile studiare gli effetti della escisione sia del solo fascio vascolo-nervoso ovarico, sia dell'ovarico e dell'uterino; nel primo caso avrebbe dovuto prodursi secondo quel che ammette la maggior parte degli AA. la completa enervazione, e la parziale interruzione dei vasi dell'organo, nel secondo invece l'interruzione almeno temporanea di tutti i vasi e nervi che ad esso si portano. Riferirò in prossime Note i risultati sperimentali.

N. P.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1930 (Anno VIII).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica (Relatività). — *L'Universo di de Sitter.* Nota⁽¹⁾
del Socio G. CASTELNUOVO.

Un recente libro di L. SILBERSTEIN⁽²⁾, molto interessante ed attraente, ha richiamato l'attenzione sopra una soluzione data nel 1917 dall'astronomo DE SITTER delle equazioni gravitazionali di EINSTEIN nella ipotesi che il nostro spazio a tre dimensioni sia finito⁽³⁾. L'*universo* di de Sitter (spazio-tempo, o cronotopo a quattro dimensioni) ha importanza specialmente per ciò che esso dà luogo ad un effetto, che potrebbe dirsi di prospettiva, in virtù del quale il tempo segnato da un orologio lontano appare rallentato rispetto al tempo dell'osservatore. Se il nostro universo godesse di questa proprietà, le righe dello spettro di una stella remota, immobile rispetto a noi, dovrebbero apparire spostate verso il rosso, come se la stella si allontanasse dalla Terra. Ora sta il fatto che gli spettri delle stelle più lontane e delle nebulose presentano (in media) un siffatto spostamento. La ipotesi di de Sitter farebbe

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1930.

(2) *The Size of the Universe*, «Oxford University Press», 1930.

(3) Fu osservato che quella soluzione è incompatibile con la presenza della materia. Potremo prescindere da questo inconveniente, giacchè qui si cerca soltanto uno schema sufficientemente approssimato alla realtà per render ragione di un fenomeno dove la presenza della materia è inessenziale.

dunque dipendere dalla forma dello spazio un fenomeno che altrimenti dovrebbe attribuirsi ad una inesplicabile repulsione degli oggetti celesti dal sole o dalla regione galattica a cui questo appartiene.

Accolta quella ipotesi, il paragone dell'effetto *de Sitter* con le osservazioni dà il mezzo di valutare il raggio di curvatura dello spazio. Una prima determinazione fu fatta dallo stesso *de Sitter*. Con dati molto più copiosi e con minuta indagine statistica, il calcolo è rifatto per un'altra via dal *Silberstein* nel libro citato. Non vedo però bene come si giustifichi la correlazione fra velocità radiali e distanze di cui egli si serve: ed anche le ipotesi statistiche possono sollevare dubbi.

Data l'importanza filosofica della questione, ho pensato convenisse ricavare la formola esatta dell'effetto *Doppler-de Sitter* per una nuova via, molto più semplice di quella comunemente usata, dedurre poi la formola approssimata che fa dipendere quell'effetto dal quadrato del rapporto della distanza della stella al raggio di curvatura; finalmente mettere bene in rilievo le ipotesi introdotte, le quali sono necessarie per dare un senso preciso al problema trattato.

1. L'universo di *de Sitter* è uno spazio a quattro dimensioni a curvatura costante, o, più esattamente, differisce dallo spazio a curvatura costante positiva solo per ciò che il gruppo delle ∞^6 rotazioni intorno ad un punto qualsiasi eseguibili in questo spazio (omografie trasformanti in sè un cono quadrico immaginario) è sostituito dal gruppo di *Lorentz* (omografie trasformanti in sè un cono reale). Segue di qua che l'universo *U* di *de Sitter* può riguardarsi, dal punto di vista della metrica di *Cayley-Klein*, come uno spazio lineare a quattro dimensioni ove sia fissata una quadrica (*assoluto*)

$$(1) \quad t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Con linguaggio più chiaro per il lettore diremo che *U* può rappresentarsi sullo spazio euclideo S_4 , e precisamente sulla regione di spazio esterna alla quadrica di equazione cartesiana (1), in guisa che le geodetiche di *U* abbiamo per immagini le rette di S_4 ; ciò d'accordo con un classico teorema del *Beltrami* (2).

Le rette qui nominate sono le rette non secanti la (1) od i tratti esterni delle rette secanti. Le prime sono rette *spaziali*; due punti di una di esse rappresentano eventi contemporanei rispetto ad un conveniente osservatore. Le seconde sono rette *temporali*; esse possono riguardarsi come linee orarie di punti moventisi di moto libero (o in quiete). Son di passaggio tra le une e le altre le tangenti alla quadrica (1), linee orarie di propagazioni luminose.

(1) Dopo avere scritto questa Nota mi sono accorto che la detta rappresentazione fu pure considerata dal *Du Val*, *Geometrical Note* . . . , « *Philos. Magazine* », 47 (1924), p. 930, il quale però non ne fa uso allo scopo di ottenere la formola dell'effetto *Doppler*.

La distanza (AB) di due punti è data, a meno di un fattore costante, dal logaritmo del birapporto formato dai due punti con le intersezioni, reali o immaginarie, M, N della retta AB con la quadrica (1). Come fattore prenderemo $1/2i$ nel caso di una retta spaziale, allo scopo di ottenere distanze reali. Ponendo

$$(2) \quad (AB) = \frac{1}{2i} \lg (MNAB)$$

si viene ad assumere come unità di lunghezza il raggio di curvatura di uno spazio a tre dimensioni (ad es. $t = 0$) esterno alla quadrica. Le rette spaziali hanno lunghezza finita π e sono chiuse; il massimo valore che possa raggiungere la distanza di due punti di una tal retta è $\pi/2$ ⁽¹⁾.

Invece per una retta temporale scriveremo

$$(2') \quad (AB) = \frac{1}{2} \lg (MNAB).$$

È questo l'intervallo di *tempo proprio* che intercede tra i due eventi rappresentati da A e B rispetto ad un osservatore di cui sia quella la retta oraria. L'unità di tempo è scelta in modo che la velocità della luce sia 1 nell'intorno dell'osservatore ⁽²⁾. Il tempo (a differenza della distanza) varia da $-\infty$ a $+\infty$; le rette orarie hanno, nell'universo di de Sitter, estensione infinita.

Supposti A e B infinitamente vicini sopra una retta temporale, si deduce dalla (2') la forma dell'elemento lineare (di Beltrami) ⁽³⁾

$$(3) \quad ds^2 = \frac{(t dt - x dx - y dy - z dz)^2 - (t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 1)(dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)}{(t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 1)^2}$$

mentre per una retta spaziale occorre invertire il segno del secondo membro. Dalla (3) si deducono nel solito modo le formole angolari e si trova che

(1) Se, come faremo, si suppone biunivoca la corrispondenza fra U e la regione considerata in S_4 , due geodetiche di U non possono avere più di un punto comune, e nello spazio $t = 0$ e negli analoghi vale la metrica *ellittica*. Il caso, pure accettabile, di una corrispondenza (2, 1) dà luogo alla metrica *sferica*, dove le geodetiche di U uscenti da un punto si incontrano in un secondo punto, *antipodo*.

(2) In questa metrica la velocità della luce in un punto che disti ρ dall'osservatore è $\cos \rho$ quando venga misurata con strumenti spettanti ad esso, mentre è naturalmente 1 se vien misurata con strumenti spettanti al punto.

(3) La forma adoperata da de Sitter

$$ds^2 = \cos^2 \rho d\tau^2 - [d\rho^2 + \sin^2 \rho (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2)]$$

si muta nella forma (3) con la trasformazione

$$\operatorname{tgh} \tau = t, \quad \operatorname{tg} \theta = z/y, \quad \cos \varphi = x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/\sqrt{1 - t^2}.$$

la relazione di perpendicolarità corrisponde al coniugio (o polarità) rispetto alla quadrica (1).

2. Siamo ora in grado di stabilire la formola dell'effetto Doppler nell'universo di de Sitter.

Consideriamo un osservatore (ad es. collegato al sole) ed una stella, e supponiamo che quello si muova di moto libero, almeno durante il tempo che la luce impiega a pervenire dalla stella a noi ⁽¹⁾. Sarà lecito (senza alterare la (1)) assumere la linea oraria dell'osservatore come asse t , e l'origine come posizione dell'osservatore nell'istante (valutato da questo) in cui la stella emette un segnale luminoso. La stella avrà allora per immagine un punto A dello spazio $xy\zeta$, ad es. dell'asse x . In un istante successivo la stella sia rappresentata da un punto B. I raggi luminosi che partono da A e B incontrano l'osservatore in due punti A_0, B_0 del semiasse positivo t , determinati dal fatto che le rette AA_0, BB_0 (rappresentanti propagazioni luminose) devono esser tangenti alla quadrica (1). L'intervallo (AB) misurato nella nostra metrica dà il tempo proprio $d\tau$ (della stella) trascorso fra le due emissioni, mentre l'intervallo $d\tau_0 = (A_0 B_0)$ è il tempo dell'osservatore intercedente fra le due recezioni. Noi vogliamo valutare il rapporto $d\tau_0/d\tau$.

Possiamo supporre (senza introdurre restrizioni) che le coordinate cartesiane x, y, ζ, t delle due posizioni A e B della stella siano

$$A(r, 0, 0, 0) \quad , \quad B(r + l\varepsilon, m\varepsilon, 0, \varepsilon),$$

dove ε è una quantità positiva così piccola da poterne trascurare le potenze superiori alla prima, ed l, m sono due costanti. Se indichiamo con ρ e $\rho + d\rho$ le distanze non euclidee di A e B dall'asse t , cioè della stella dal sole negli istanti di emissione, abbiamo dalla (2):

$$(4) \quad \operatorname{tg} \rho = r \quad , \quad \operatorname{tg} (\rho + d\rho) = \sqrt{(r + l\varepsilon)^2 + m^2 \varepsilon^2}.$$

D'altra parte, dette $\tau_0, \tau_0 + d\tau_0$ le lunghezze non euclidee $(OA_0), (OB_0)$, si trova

$$(5) \quad \operatorname{tgh} \tau_0 = \operatorname{sen} \rho \quad , \quad \operatorname{tgh} (\tau_0 + d\tau_0 - \varepsilon) = \operatorname{sen} (\rho + d\rho).$$

Dalle (4) e (5) si ricava, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo,

$$d\tau_0 = (1 + l \cos \rho) \varepsilon.$$

(1) Questa od un'analoga ipotesi è indispensabile perchè occorre presumere nota la posizione del sole, non solo nell'istante dell'osservazione, ma pure in quello di emissione; altrimenti non si può definire la distanza della stella dal sole in questo istante. Nessuna ipotesi si fa invece sul movimento della stella.

L'intervallo (AB) fra le due emissioni può valutarsi ad es. mediante le (3) e (4), e risulta essere

$$d\tau = \varepsilon \sqrt{1 - m^2 - l^2 \cos^2 \rho} \cdot \cos \rho.$$

Quindi la formola richiesta ⁽¹⁾

$$(6) \quad \frac{d\tau_0}{d\tau} = \frac{1}{\cos \rho \sqrt{1 - m^2 - l^2 \cos^2 \rho}}.$$

Ricordiamo che ρ è il rapporto della distanza della stella dal sole al raggio di curvatura dello spazio, nell'istante di emissione. Quanto ad l ed m , esse danno in prima approssimazione la velocità radiale e la velocità trasversale (lineare) della stella, in quell'istante, misurate dall'osservatore prendendo come unità la velocità della luce. Esattamente le due velocità sono

$$(7) \quad v_r = l \cos^2 \rho, \quad v_t = m \cos \rho.$$

Se $d\tau$ è il periodo di una radiazione emessa dalla stella, $d\tau_0$ il periodo corrispondente qual è valutato dall'osservatore, la (6) esprime l'effetto Doppler nell'universo di de Sitter, effetto dipendente dalla velocità radiale, dalla trasversale, ed anche dalla distanza della sorgente luminosa ⁽²⁾.

Sostituiti nella (6) al posto di l ed m i valori (7), sviluppiamo in serie il coseno e il radicale. Ricordiamo che per la grande maggioranza delle stelle v_r e v_t non superano 10^{-3} (ossia 300 km/sec.), di guisa che si possono omettere le potenze superiori alla prima, perchè non darebbero effetto percepibile all'analisi spettroscopica. Altrettanto si può dire delle potenze (tutte pari) superiori alla seconda di ρ e dei prodotti del tipo $\rho^2 v_r, \dots$, se supponiamo $\rho \leq 0.05$, se cioè ci limitiamo ad astri che distino da noi non

(1) A prevedere la (6) era stato guidato lo CHAZY («Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences», 183, 2° sem., 1926, p. 1093) da considerazioni di analogia con la formola della relatività speciale, che qui invece viene dedotta come caso particolare. In risposta ad un appunto del detto autore, il SILBERSTEIN («Philos. Magazine», 3, 1927) fa vedere che quella formola, e quindi la nostra (6), è equivalente ad una delle sue formole esatte, che a prima vista appare diversa.

È ancora da avvertire che il caso particolare $l = m = 0$ era stato considerato dal DE SITTER fino dal 1917.

(2) Se si suppone infinito il raggio di curvatura dello spazio, e quindi $\rho = 0$, la (6) si riduce alla formola dell'effetto Doppler nella relatività speciale

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = \frac{1 + v_r}{\sqrt{1 - v_r^2 - v_t^2}},$$

mentre nella fisica classica e nelle applicazioni si tien conto del solo numeratore $1 + v_r$.

più di un ventesimo del raggio di curvatura. Con ciò la (6) può essere sostituita dalla formola approssimata

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = 1 + v_r + \frac{\rho^2}{2}.$$

Questa, del resto, può adoprarsi anche per valori doppi o tripli di v_r , v_t e doppi di ρ , perchè le potenze omesse darebbero un'aggiunta trascurabile ai termini conservati.

Sostituendo nell'ultima formola ai periodi le lunghezze d'onda (proporzionali) λ_0, λ e ponendo $\lambda_0 - \lambda = \delta\lambda$, si arriva alla formola

$$(8) \quad D = \frac{\delta\lambda}{\lambda} = v_r + \frac{\rho^2}{2}.$$

L'effetto Doppler complessivo D è dunque la somma algebrica dell'effetto Doppler propriamente detto, v_r , (positivo o negativo secondo che la stella si allontana o si avvicina) e dell'effetto de Sitter proporzionale al quadrato della distanza dell'astro⁽¹⁾.

3. L'esame dello spettro di una sola stella non permette di scindere le due componenti della (8). Possiamo farlo se consideriamo un gruppo numeroso di stelle ed introduciamo una ipotesi statistica che si presenta spontaneamente. Ricordiamo che il valor medio \bar{D} di D , per oggetti celesti molto lontani, risulta positivo e crescente con la distanza. Ammettere che questo fenomeno dipenda integralmente o in gran parte dall'effetto de Sitter, equivale ad ammettere che in media le stelle non abbiano tendenza ad allontanarsi o ad avvicinarsi al sole. Introduciamo dunque la *ipotesi di lavoro* che *sia zero la media di v_r per le stelle situate alla stessa distanza dal sole⁽²⁾*. Allora la (8) ci dà

$$(9) \quad \bar{D} = \frac{\rho^2}{2}.$$

È questa la formola che va sottoposta al controllo delle osservazioni e che, ove fosse verificata, darebbe il modo di calcolare il raggio di curvatura dello spazio. Infatti indicati ora con (ρ) ed R la distanza ed il raggio

(1) Appunto quest'ultimo effetto aveva trovato il DE SITTER nella ipotesi $v_r = v_t = 0$. Il SILBERSTEIN invece trascura il termine in ρ^2 che giudica troppo piccolo, e, con un procedimento di approssimazione che non mi risulta chiaro, trova su v_r un effetto del *primo* ordine dovuto alla distanza.

(2) Da un punto di vista astratto, due traiettorie rettilinee che differiscano solo per i segni di l ed m , ossia di v_r e v_t , hanno, rispetto alla traiettoria dell'osservatore (asse t), le stesse proprietà geometriche e cinematiche, salvo lo scambio del passato con l'avvenire, e devono quindi esser riguardate come ugualmente probabili.

di curvatura misurati in unità astronomiche (u. a. = $15 \cdot 10^7$ km circa, distanza della Terra dal sole), si ha dalla (7)

$$(10) \quad R = (\rho) (2\bar{D})^{-1/2}.$$

Il de Sitter, basandosi sulle stelle B, le cui distanze sono dell'ordine di 3×10^7 u. a., e che danno uno spostamento di righe spettrali corrispondenti a $\bar{D} = 1.5 \times 10^{-5}$, del quale spostamento egli attribuisce $1/3$ all'effetto gravitazionale Einstein e $2/3$ alla distanza, trova

$$R = 6.7 \times 10^9 \text{ u. a.,}$$

valore che è ritenuto eccessivamente piccolo.

Le nebulose spirali che danno per \bar{D} un valore dell'ordine di 5×10^{-4} (cioè 150 km/sec) e stanno a distanze ritenute dell'ordine di 6×10^{10} u. a. (circa 10^6 anni luce) condurrebbero al valore notevolmente più alto $R = 2 \times 10^{12}$, intermedio fra quelli ottenuti dal Silberstein fondandosi sopra altri dati ed altre considerazioni.

Non è qui il luogo per discutere questi risultati. Voglio solo osservare che, tenuto conto dell'incertezza nelle distanze degli oggetti astronomici lontani, distanze che andrebbero poi rivalutate quando si supponesse curvo lo spazio, è preferibile ricorrere anzitutto ad ipotesi semplici e in piccolo numero, quali sono quelle che ci hanno condotto alla formola (9). Trova essa conferma nelle osservazioni? Se la risposta dovesse esser negativa, come ora si crede⁽¹⁾, vorrebbe dire che l'effetto de Sitter non basta da solo a spiegare il fenomeno in esame; e sarebbe allora il caso di chiedersi se le altre cause a cui si dovrebbe ricorrere non fossero sufficienti allo scopo senza introdurre l'ipotesi dello spazio finito.

(1) Il TOLMAN, *On the astronomical Implications...*, «Astrophysical Journal», 69 (1929), p. 245, dice che le osservazioni indicherebbero una dipendenza lineare fra \bar{D} e la prima potenza della distanza. La stessa affermazione in HUBBLE, *A Relation between Distance...*, «Proc. of the National Academy of Science, Washington» 13 (marzo 1929).

Chimica. — *Ricerche per la concentrazione e l'isolamento dell'elemento di numero atomico 61*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ del Corrisp. L. ROLLA.

Già in precedenti pubblicazioni⁽³⁾ fu descritto l'impianto montato nell'Istituto di Chimica Generale di Firenze per l'attacco e il frazionamento di grandi quantità di terre rare e fu illustrato il metodo seguito per frazionare i ceridi provenienti da monazite brasiliana per arrivare alla concentrazione ed, eventualmente, all'isolamento dell'elemento di numero atomico 61.

Si partì da una tonnellata di didimio commerciale, che conteneva ancora una certa quantità di cerio, allo stato di nitrato: si trasformò in nitrati doppi col tallio e coll'ammonio che furono distribuiti in trenta frazioni e cristallizzati con 1500 cristallizzazioni. Così, furono separate, dalle frazioni di testa, quantità notevoli di materiali ricchi in lantanio che fu purificato a parte; quattro frazioni contenevano lantanio e praseodimio, altre quattro frazioni contenevano praseodimio impuro per tracce decrescenti di lantanio, una frazione conteneva oltre il praseodimio e il neodimio, ancora un poco di lantanio. Infine, dopo due frazioni contenenti praseodimio e neodimio soltanto, si separarono dieci frazioni in cui si venivano a trovare: praseodimio, neodimio, samario e le terre terbiche. In queste frazioni si dovevano, dunque, eseguire le ricerche necessarie per riconoscere la presenza dell'elemento di numero atomico 61 e per arrivare, eventualmente, alla sua concentrazione e al suo isolamento.

Queste frazioni di coda, incristallizzabili per la loro eccessiva densità, si trasformarono in ossalati, ottenendone 1200 chilogrammi, che, previa calcinazione, furono trasformati in nitrati doppi col magnesio e col manganese. Su questi, distribuiti in 22 frazioni, venne eseguito il frazionamento secondo lo schema classico. Si fecero 3825 cristallizzazioni. I frazionamenti laterali portarono alla separazione di quantità ingenti di praseodimio, neodimio, samario allo stato rigorosamente puro (0.01 % d'impurezza). I materiali di coda, gadoliniferi, furono ancora frazionati come nitrati doppi di magnesio e di manganese e, in realtà, la presenza di questo elemento fu molto vantaggiosa per la separazione di una ulteriore quantità di samario. Dopo, si iniziò il frazionamento su queste frazioni più solubili dei nitrati doppi contenenti la serie del gadolinio, sulle quali, l'esame spettroscopico (spettri d'assorbimento) portò a svelare l'esistenza di bande che Kiess ritenne caratteristiche per l'elemento 61. Si trasformarono le prime due frazioni della serie di otto, in cui fu diviso tutto il materiale, essenzialmente samarifere e con-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1930.

(3) « Gazz. Chim. It. », LVII, p. 704 (1927); « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », VI, 6ª serie, 1º sem., p. 370 (1928); « Atti del IIIº Congresso di Chimica », Firenze 1929, p. 27.

tenenti anche poco neodimio, in bromati, secondo il metodo di Jaines, e si frazionarono, prima su 25 e poi su un numero crescente di frazioni fino a 50, con un totale di 4255 cristallizzazioni. Intanto anche le miscele neodimio-samarifere e samario-neodimifere furono sottoposte alla cristallizzazione frazionata pure come bromati. In un primo tempo, i bromati delle miscele samario-neodimifere furono frazionati in sei frazioni con un totale di 2199 cristallizzazioni: il numero delle frazioni fu poi portato a 14 con 3034 cristallizzazioni. I bromati delle miscele neodimio-samarifere furono pure frazionati prima su sei, poi su cinque frazioni con un totale di 3845 cristallizzazioni: in seguito il numero delle frazioni fu portato a nove, con un totale di 4361 cristallizzazioni. Avendo raggiunto l'identità di composizione fra le frazioni di testa della serie neodimifera e delle frazioni di coda della serie samarifera, furono accodati i due frazionamenti e, progressivamente, fu portato il numero delle frazioni da 21 a 50, con un totale di 12960 cristallizzazioni, giungendo ad ottenere una testa costituita di samario puro e una coda costituita di neodimio puro. Ma la massa dei materiali costituenti le frazioni di mezzo è ancora troppo grande perchè sia possibile concentrarvi notevolmente un elemento così scarso; perciò si pensò a operare il frazionamento con criteri suggeriti dall'esperienza e dalla teoria, che permettano di arrivare allo scopo. Al momento attuale, sono già state fatte molte centinaia di cristallizzazioni, aumentando notevolmente il numero delle frazioni. Il frazionamento continuerà fino a che le frazioni centrali non saranno adeguate alla quantità dell'elemento che si vuol concentrare: contemporaneamente saranno trasformate in bromati e frazionate a parte tutte le frazioni gadolinifere per separare il terbio in esse contenuto, allo scopo di servirsene come elemento separatore e poter osservare lo spettro dell'elemento 61 in assoluta assenza di neodimio.

Il controllo del frazionamento fu fatto con numerose ricerche spettroscopiche ed altre saranno istituite per arrivare a chiarire numerose difficoltà. Intanto, gli spettri di emissione sono estremamente complicati, ricchi come sono di migliaia di righe; quelli di assorbimento, sono difficilmente interpretabili per la loro grande mutevolezza dovuta a numerose cause, quali la temperatura, la concentrazione, l'idratazione, l'idrolisi, le azioni interioniche, la presenza di elementi estranei, ecc. Nelle frazioni centrali, si notano alcune alterazioni delle intensità in bande che gli Autori americani attribuiscono all'elemento 61; ma un giudizio definitivo sul valore di queste apparenze potrà essere dato solo a frazionamento ultimato, a seconda che le righe di cui ora si osserva l'alterazione, appariranno o no in assenza assoluta di neodimio, al quale si deve il fenomeno. Allo stato attuale del frazionamento, non è possibile, per gli spettri ottici, ottenere di più di questi giochi d'intensità.

I metodi röntgenspettrografici, quando il frazionamento sarà completo, potranno dare risultati certi: la loro sensibilità, però, è assai minore di quella degli spettri ottici e di quelli di assorbimento in particolare.

Una ricerca sistematica istituita nel Laboratorio di Firenze, dove è montato un impianto modernissimo per la röntgenspettrografia, sia di emissione che di assorbimento, portò a stabilire, per ciascuna specie di spettro, il limite di sensibilità e, seguendo le fasi e i gradi del frazionamento, a determinare se e in quali frazioni, fosse in grado di permettere l'identificazione dell'elemento di numero atomico 61. Ebbene, nelle grandi masse che costituiscono le frazioni neodimo-samarifere, con gli spettri di emissione ed anche con quelli di assorbimento per quanto sicuramente meno sensibili dei primi, non è stato possibile ottenere un risultato positivo. Si fecero 75 esperienze, nelle condizioni sperimentali migliori, sulle frazioni neodimo-samarifere ottenute come nitrati doppi di magnesio e manganese e su quelle provenienti dal frazionamento di queste stesse e di quelle samario-neodimifere trasformate in bromati, ottenendo delle bellissime fotografie, ma senza potere, peraltro, svelare l'elemento 61.

Quando il frazionamento su larga scala che stiamo eseguendo ci avrà portato alle concentrazioni sufficienti per poter essere sicuri che il metodo röntgenspettrografico sia applicabile, si tornerà su questo argomento coi dati di fatto che avremo raccolti.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle geodetiche assolute delle superficie a metrica indefinita.* Nota⁽¹⁾ di G. BARBA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Ci proponiamo in questa Nota lo studio delle « geodetiche assolute » (geodetiche di lunghezza nulla) di una superficie immersa in uno spazio lorentziano.

Per fissare le idee, supponiamo di avere una superficie, definita dalle equazioni:

$$(1) \quad x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v)$$

immersa nello spazio lorentziano L_3 , nello spazio, cioè di cui l'elemento lineare è dato da:

$$(2) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

e quindi la distanza di due punti (x, y, z) , (x_1, y_1, z_1) è fornita da:

$$l^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (z - z_1)^2.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1930.

Eventualmente si potrebbe considerare una L_3 caratterizzata da

$$\sum a_{rs} dx_r dx_s \quad (r, s = 1, 2, 3)$$

ove, questa, sia una forma quadratica *indefinita* connessa ad una V_3 immersa in una L_n il cui elemento lineare sia dato da:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_r^2 - dx_{r+1}^2 - \dots - dx_n^2.$$

Se si considerano le proprietà della nostra superficie rispetto al L_3 lorentziano osserviamo, senz'altro che, condotto un generico piano tangente in un punto della superficie, dal punto di tangenza di questo piano si potranno condurre 2 rette di lunghezza nulla le quali saranno reali e distinte o coincidenti o immaginarie a seconda che la giacitura del piano tangente risulti esterna, tangente, interna all'assoluto nel piano improprio. Per tal modo, sulla superficie, supposta dotata di tutte le regolarità occorrenti, restano definite delle zone nelle quali le due suddette rette sono complesse coniugate ed altre in cui sono reali distinte: queste due zone sono divise da linee lungo le quali le due rette coincidono.

Orbene, quest'ultime linee possono essere o luoghi di cuspidi o inviluppi o l'uno o l'altro ad un tempo delle geodetiche assolute.

Se ora passiamo all'equazione delle suddette linee, vediamo che essa si ottiene annullando la forma (2), allorchè x, y, z siano forniti dalle (1). Si avrà dunque,

$$adu^2 + 2b du dv + cdv^2 = 0$$

che dà l'equazione delle « geodetiche assolute ».

Naturalmente, vi saranno dei punti di singolarità per le geodetiche — punti che non trovano riscontro nella ordinaria geometria delle superficie immerse in uno spazio euclideo — e sono, precisamente, quelli nei quali risulti, eventualmente, indeterminato il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$ delle « geodetiche assolute ».

Un primo gruppo è dato dalle linee già citate, lungo le quali coincidono le predette direzioni, ma si possono presentare, anche, punti eccezionali pei quali passino più di due « geodetiche assolute ». Ciò a prescindere dai punti conici.

2. L'equazione relativa alle immagini delle « geodetiche assolute » nel piano xy , con riferimento ad un sistema ortogonale, sia

$$(1) \quad ady^2 + 2b dx dy + cdx^2 = 0$$

da cui si deduce

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2b \frac{dy}{dx} + c = 0.$$

Questa equazione dà luogo ad un doppio sistema di curve che, nel campo in cui a, b, c sono monodrome, sono tali che per ogni punto ne passano due: una per ciascun sistema.

Risolviendo la (2), posto $b^2 - ac = \Delta$ risulta:

$$\frac{dy}{dx} = (-b + \sqrt{\Delta})/a, \quad \frac{dy}{dx} = (-b - \sqrt{\Delta})/a.$$

Dunque, se $\Delta \neq 0$ si hanno due curve per ogni punto.

Naturalmente, per ognuno dei due sistemi di curve possono presentarsi singolarità del tipo Poincaré.

Quindi, scritto il doppio sistema di curve formanti caratteristiche, possono presentarsi tre tipi di singolarità:

α) Punti critici per uno solo dei due sistemi.

β) Punti critici per ambedue i sistemi.

γ) Annullarsi di Δ , e quindi coincidenza delle caratteristiche.

Si osservi che, siccome in ogni punto le direzioni delle tangenti alle due immagini delle geodetiche assolute sono insieme reali o complesse, se uno dei due sistemi ha un «centro» anche l'altro dovrà averlo.

Se è $\Delta = 0$, in un punto, risulta

$$\frac{dy}{dx} = -b/a$$

e le tangenti alle due immagini, in quel punto, coincidono in una sola.

Ora, può accadere che, nel punto coincidano le direzioni ed i versi delle tangenti, oppure le direzioni e non i versi. Nel primo caso ne risulta un «luogo di cuspidi» nel secondo un «inviluppo».

Si vuole esaminare, ora, il caso in cui qualche punto singolare cada proprio sul «luogo».

Perchè ciò accada, dev'essere:

$$\{ a = 0, \quad b = 0, \quad \Delta = 0.$$

Tale sistema, fornisce i punti comuni a tre linee, cosa che in generale, accade ben difficilmente. Può accadere, però, che b sia identicamente nullo; la (I) diviene, quindi:

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + c = 0.$$

I punti critici dell'equazione saranno dati dal sistema:

$$(3) \quad \begin{cases} a = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Ci proponiamo, allora, di studiare il comportamento delle immagini delle geodetiche assolute nell'intorno di tali punti critici.

Senza ledere la generalità possiamo metterci nel punto $x = 0, y = 0$, supporre, cioè, il punto critico [soluzione del sistema (3)] di coordinate $(0, 0)$. (Ciò possiamo sempre fare trasportando parallelamente a se stessi gli assi in uno di tali punti).

Supposti a e c sviluppabili in serie, si può scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{mx + ny + \dots \text{term. ordine sup. al } 1^{\circ}}{px + qy + \dots \text{» » » » »}}}.$$

Trascurando, nell'intorno del punto $(0, 0)$ in esame, i termini di ordine superiore, risulta:

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{mx + ny}{px + qy}}.$$

Questa equazione possiamo ricondurla ad altra mediante la trasformazione:

$$\begin{cases} \sqrt{mx + ny} = \xi \\ \sqrt{px + qy} = \eta \end{cases}$$

che fornisce

$$\begin{cases} x = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \\ y = \gamma\xi^2 + \delta\eta^2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} dx = 2\alpha\xi d\xi + 2\beta\eta d\eta \\ dy = 2\gamma\xi d\xi + 2\delta\eta d\eta \end{cases}$$

e la (4) offre, allora:

$$(5) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\alpha\xi^2 - \gamma\eta\xi}{\eta^2\delta - \beta\eta\xi}$$

ch'è una equazione omogenea.

Orbene, lo studio del comportamento degli integrali d'un tal tipo di equazione, nell'intorno del punto singolare, è già stato fatto, in forma completa e generale ⁽¹⁾.

(1) La ricerca in questione non ha ricevuto veste tipografica a causa della prematura morte dell'autore, dott. Luca Bonocore, che, sotto la guida del prof. G. Andreoli, ne trattò ampiamente e diligentemente nella sua tesi. Riporto, perciò, qui, i risultati.

Il Bonocore si propose uno studio analogo a quello sviluppato dal Poincaré nella sua tesi (conducente alle nozioni di « colle », « centro », « nodo » ecc.) prendendo le mosse da l'equazione

$$dx/(a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + \dots) = dy/(b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2 + \dots)$$

dove i termini non scritti sono di grado superiore al 2°. Le singolarità incontrate dal

Resta, così, completamente determinata la via da seguire per lo studio topologico delle immagini delle « geodetiche assolute » di una superficie immersa in uno spazio lorentziano (od euclideo come caso particolare).

3. *Conclusioni.* - Dalle considerazioni sui punti critici (di 2° ordine) dell'equazione considerata, dobbiamo, ora passare a quelle relative alle « geodetiche assolute », attraverso le trasformazioni:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{mx + ny} = \xi \\ \sqrt{px + qy} = \eta. \end{array} \right.$$

Se si osserva la configurazione topologica creata nel piano xy in relazione a quella determinata dal punto critico nel piano $\xi\eta$, si vede che nel piano xy esistono le due rette

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv mx + ny = 0 \\ s \equiv px + qy = 0 \end{array} \right.$$

che dividono il piano in quattro regioni angolari. Il piano $\xi\eta$ è rappresentato per le (1) in una sola di queste, in maniera che, ad ogni punto del piano xy , corrispondono quattro punti, simmetrici rispetto agli assi, nel piano $\xi\eta$; oppure nessuno (reale). Più semplicemente, dato che a noi interessa, e solo, lo studio della configurazione topologica delle linee possiamo supporre legate le x, y, ξ, η dalle formule:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = \xi \\ \sqrt{y} = \eta \end{array} \right.$$

con che si vengono ad assumere, senza ledere la generalità (per quanto prima si è osservato) le due rette r ed s , ortogonali tra di loro: anzi noi assumeremo per tali rette addirittura i due assi x, y . Ne segue che per le (2), il piano $\xi\eta$ trova la sua corrispondenza nella regione angolare del

Bonocore, per distinguerle da quelle del Poincaré si potranno chiamare di « 2ª specie ». Ebbene, interviene anche qui, come già nel caso Poincaré, una equazione di 3° grado, determinante le possibili tangenti nell'origine, alle curve integrali.

I risultati si possono schematizzare come segue:

I. Radici reali semplici:

- a) Una sola λ negativa: « nodo di 2ª specie ».
- b) Una sola λ positiva: « sperone »,
- c) Tutte e tre negative: « colle di 2ª specie ».

II. Le radici siano: v_1 , $v_2 = \alpha + i\beta$, $v_3 = \alpha - i\beta$:

- a) $\lambda_1 > 0$: « polo ».
- b) $\lambda_1 < 0$: « lama ».

III. Radice doppia v_2 e v_1 semplice:

- a) $\lambda_1 < 0$: « nodo di tipo speciale ».
- b) $\lambda_1 > 0$: « sperone di tipo speciale ».

IV. Radice tripla: si ricade in uno dei tipi già visti: « polo » e « lama ». In quanto precede λ_i è il residuo relativo al polo v_i d'una certa funzione.

piano xy , determinata dalle direzioni positive degli assi. È necessario ora vedere, in che cosa si mutano, nella regione predetta del piano xy , le rette o le curve chiuse o non od avvolgentesi assintoticamente attorno all'origine, nel piano $\xi\eta$.

Evidentemente una retta generica del piano $\xi\eta$, *non passante* per l'origine, si muta in una conica e propriamente in una parabola, dato che l'equazione

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = c \quad (a, b, c, \text{ coeff. generici})$$

conduce a

$$a^4 x^2 + b^4 y^2 - 2 a^2 b^2 xy - 2 a^2 c^2 x - 2 b^2 c^2 y + c^4 = 0$$

che dà, suppostone il discriminante diverso da zero

$$A_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Se la retta, però, passa per l'origine ed è parallela ad uno degli assi ξ, η , nel piano xy , ad essa corrisponde un'altra retta, godente delle medesime proprietà rispetto al proprio piano.

Un cerchio, nel piano $\xi\eta$ con centro nell'origine, si muta, nel piano xy , in un segmento di retta non passante per l'origine. Un sistema di cerchi, quindi, l'uno interno all'altro, concentrici con l'origine nel piano $\xi\eta$, dà luogo, nel piano xy ad un sistema di segmenti di rette avvicinandesi sempre più all'origine, senza mai passarvi.

Un cerchio, invece, tangente nell'origine all'asse ξ dà luogo, nel piano xy , ad una parabola.

Consideriamo una curva chiusa che circondi l'origine, nel piano $\xi\eta$:

ai due punti d'intersezione di tale linea con l'asse ξ corrispondono due punti sull'asse x , agli altri due punti d'intersezione con l'asse η , altri due punti sull'asse y , l'insieme di questi quattro punti, nel piano xy , appartiene alla trasformata della data curva che, dovendo, inoltre, essere tutta compresa nel primo quadrante, risulterà, topologicamente, una linea chiusa dal 4° ordine, a mo' di « otto » o « bisaccia » adagiandosi sugli assi con due punti d'appoggio per ognuno di essi.

Pertanto, un sistema di curve chiuse, racchiudenti l'origine, nel piano $\xi\eta$, si trasformerà in un sistema di « bisacce » digradanti verso l'origine.

Segue, anche, che una curva che si avvolga assintoticamente attorno all'origine nel piano $\xi\eta$, si trasforma, nel piano xy , in una curva che serpeggiando e toccando, alternativamente, gli assi x, y , tende, assintoticamente all'origine.

Più precisamente, un sistema di curve chiuse, l'una interna all'altra, e tendenti all'origine, nel piano $\xi\eta$, avrà come corrispondente, nel piano xy un sistema di curve aventi ciascuna due contatti con ognuno degli assi x, y ,

e tali che ognuna di esse, la cui immagine è contenuta in quella d'un'altra, nel sistema primitivo del piano $\xi\eta$, verrà a trovarsi tutta nella zona racchiusa dalla prima linea ottenuta e dagli assi.

Se la curva del sistema primitivo è abbastanza prossima all'origine quella trasformata nel piano xy , sarà, anch'essa, abbastanza prossima all'origine.

Circa la configurazione caratteristica del « colle di 2^a specie », tre rette, cioè, e relativi 3 sistemi di iperboli concentriche aventi tali rette come assintoti, osserviamo che le rette (passanti per l'origine) si mutano, nel piano xy in rette anche passanti per l'origine, ciò per quanto s'è avanti detto ed inoltre una generica iperbole del piano $\xi\eta$, ha l'equazione (riferita agli assintoti):

$$\xi\eta = k^2$$

che si trasforma nell'altra

$$xy = a^2$$

ottenendosi, dunque, nel piano xy ancora delle iperboli.

Si ha, per tal maniera, una idea del comportamento delle « geodetiche assolute » d'una superficie immersa in un L_3 .

Matematica. — *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea.* Nota⁽¹⁾ di B. DE FINETTI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. — Una distribuzione di probabilità, o, in generale, di *masse* di qualsiasi specie (la cui somma supporremo = 1) su un asse ξ , può essere individuata mediante la *funzione caratteristica*⁽²⁾ $\psi(t) = \int e^{i\xi t} d\Phi(\xi)$ dove $\Phi(\xi)$ (*funzione di ripartizione*) rappresenta la massa a sinistra di ξ , e cioè sulla semiretta $(-\infty, \xi)$, e l'integrale è un integrale di STIELTJES. Data $\psi(t)$, si ricava $\Phi(\xi)$ dalla formula

$$\Phi(\xi) - \Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\xi t}}{it} \psi(t) dt;$$

perchè $\psi(t)$ sia una funzione caratteristica è necessario e sufficiente che tale integrale abbia un senso e Φ risulti non decrescente e tale che

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1930.

(2) Cfr. LÉVY, *Calcul des probabilités*; v. un cenno anche in CASTELNUOVO, *Calcolo delle probabilità*, vol. II, p. 188.

$\Phi(\infty) - \Phi(-\infty) = 1$. È noto poi che un prodotto di funzioni caratteristiche, una combinazione lineare (a coefficienti positivi di somma = 1) di funzioni caratteristiche, una funzione verso cui una successione di funzioni caratteristiche converga uniformemente in ogni intervallo limitato, sono ancora funzioni caratteristiche. In particolare la funzione $e^{ik\xi}$ è la funzione caratteristica nel caso che la massa sia tutta concentrata nel punto $\xi = k$; se $k = 0$ la funzione caratteristica è $\equiv 1$.

Ciò premesso, il problema che ci interessa consiste, formalmente, nell'individuare quelle funzioni $\psi(t)$ tali che $[\psi(t)]^\lambda$ risulti una funzione caratteristica qualunque sia l'esponente (reale e positivo)⁽¹⁾ λ . Se in luogo della funzione caratteristica consideriamo il suo logaritmo, si tratta di cercare le funzioni $\log \psi$ tali che $\lambda \log \psi$ sia sempre un logaritmo di funzione caratteristica, e cioè di caratterizzare le semirette (uscenti dall'origine) dello spazio funzionale costituite interamente di funzioni di detto tipo.

La ricerca interessa per la teoria delle funzioni a incremento aleatorio⁽²⁾ dove le funzioni del tipo considerato giocano un ruolo essenziale: è mediante esse che si possono rappresentare le *leggi istantanee* di incrementi aleatori. Troveremo che le funzioni cercate sono tutte e sole quelle della forma $\psi(t) = e^{p[\chi(t)-1]}$ con $\chi(t)$ funzione caratteristica e p reale positivo, e quelle che sono limiti di funzioni della forma precedente, nello spazio funzionale in cui la convergenza si intenda convergenza uniforme della funzione in ogni intervallo limitato. (Il modo di convergenza che considereremo, anche se sottinteso, sarà sempre questo). Tale risultato si presta a un'interessante interpretazione relativa al problema accennato di calcolo delle probabilità, e permette di approfondirne lo studio.

2. - Dimostriamo in primo luogo che una funzione della forma $\psi(t) = e^{p[\chi(t)-1]}$, con $\chi(t)$ funzione caratteristica e p reale positivo, è una funzione caratteristica. È infatti

$$e^{p[\chi(t)-1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{p}{n} \right) + \frac{p}{n} \chi(t) \right\}^n;$$

la funzione fra $\{ \}$ è (se $n > p$) una combinazione lineare, a coefficienti positivi e di somma = 1, delle due funzioni caratteristiche 1 e $\chi(t)$, ed è quindi una funzione caratteristica, e lo sono perciò anche le sue potenze. La funzione $e^{p[\chi(t)-1]}$ è il limite di una successione di funzioni caratteristiche, ed è perciò ancora una funzione caratteristica. È ovvio poi che lo è pure $\psi^\lambda(t)$ per $\lambda > 0$; non si ha che sostituire $p\lambda$ a p .

(1) Per $\lambda < 0$ ciò non potrà mai avvenire; basta ricordare che una funzione caratteristica è sempre in modulo ≤ 1 (cfr. LÉVY, op. cit., p. 173).

(2) Cfr. le mie Note *Sulle funzioni a incremento aleatorio; Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori; Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio*; questi «Rendiconti», 1929, 2° sem. V. anche la conferenza su *Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo* al Sem. Mat. di Roma, 1930.

Se ψ è limite di una successione di funzioni del tipo precedente, è ancora ovvio che ψ , e anche ψ^λ , con $\lambda > 0$ qualsiasi, sono sempre funzioni caratteristiche.

Condizione sufficiente perchè ψ^λ sia funzione caratteristica per ogni $\lambda > 0$ è dunque che ψ appartenga all'insieme J dello spazio funzionale costituito dalle funzioni del tipo $e^{i\lambda x - \lambda^2}$ o all'insieme derivato J' .

La condizione è anche necessaria. Se ψ^λ è, per ogni $\lambda > 0$, una funzione caratteristica, lo è anche, per quanto precede, la funzione $e^{i\lambda x - \lambda^2}$, che è una funzione J : ponendo $p = 1/\lambda$ e facendo tendere λ a zero, la funzione $e^{i\lambda x - \lambda^2}$ tende alla funzione ψ medesima, che appartiene pertanto necessariamente all'insieme J' .

In particolare si ha $J \supset J'$, e quindi l'insieme J è denso in sè. Si osservi poi che un prodotto di funzioni J (rispettivamente J') è ancora una funzione J (rispettivamente J').

3. - Cerchiamo ora le proprietà che caratterizzano, fra le funzioni caratteristiche ψ del tipo (più generale) J' , le funzioni caratteristiche del tipo J . Vedremo che la condizione necessaria e sufficiente è che, posto

$$\alpha(\lambda) = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} \psi^\lambda(t) dt$$

risulti $[1 - \alpha(\lambda)]/\lambda$ limitato superiormente (per $\lambda > 0$), ed esista cioè un numero p (necessariamente > 0) tale che $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$. È presumibile (e sarebbe assai importante accertarlo) che la condizione che $\alpha(\lambda)$ sia sempre positivo (per $\lambda > 0$) implichi (nel nostro caso) la proprietà precedente, e la si possa quindi ad essa sostituire, semplificando assai l'enunciato.

Sia $\psi(t)$ una funzione del tipo J , e osserviamo che la si può allora sempre e in un sol modo scrivere sotto la forma $\psi(t) = e^{i\lambda t - \lambda^2}$ imponendo la condizione

$$a_1 = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} \chi(t) dt = 0.$$

Infatti a_1 rappresenta ⁽¹⁾ la massa, della distribuzione rappresentata dalla funzione caratteristica χ , che è concentrata nel punto $\xi = 0$; se è $a_1 > 0$, la funzione caratteristica si può scrivere $\chi = a_1 - (1 - a_1)\bar{\chi}$ ove $\bar{\chi} = \frac{\chi - a_1}{1 - a_1}$ è ancora una funzione caratteristica, e per essa $\bar{a}_1 = 0$. E allora a $p[\chi - 1]$ si può sostituire $\bar{p}[\bar{\chi} - 1]$, ove $\bar{p} = p(1 - a_1)$. Supporremo dunque senz'altro $a_1 = 0$.

(1) Cfr. Lévy, op. cit., p. 169.

Calcoliamo allora

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda) &= \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} \psi^\lambda(t) dt = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} e^{\lambda t [X(t)-1]} dt = \\ &= e^{-\lambda p} \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} e^{\lambda p X(t)} dt.\end{aligned}$$

Sviluppando

$$e^{\lambda p X(t)} = \sum_b \frac{p^b \lambda^b}{b!} X^b(t)$$

ed essendo la serie totalmente convergente, si ha

$$\alpha(\lambda) = e^{-\lambda p} \sum_b \frac{p^b a_b}{b!} \lambda^b = e^{-\lambda p} \left\{ 1 + \sum_2 \frac{p^b a_b}{b!} \lambda^b \right\}$$

ove si ponga in generale, analogamente ad a_1 già definito,

$$a_b = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{+C} X^b(t) dt.$$

La funzione caratteristica $\chi^b(t)$ rappresenta la legge di probabilità della somma di b numeri aleatori indipendenti, ciascuno dei quali segua la legge di probabilità data dalla funzione caratteristica $\chi(t)$; i valori eccezionali (valori cui compete una probabilità non nulla) di una somma di numeri aleatori sono quelli ottenibili mediante una somma di rispettivi valori eccezionali; i valori eccezionali della legge data da $\chi^b(t)$ sono dunque i valori del tipo $c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_m \xi_m$ ove $c_1 \dots c_m$ sono interi positivi di somma $= b$, e $\xi_1 \dots \xi_m$ sono valori eccezionali della legge data da $\chi(t)$. Poichè a_b rappresenta la probabilità del valore $\xi = 0$ nella legge di funzione caratteristica $\chi^b(t)$, è $a_b > 0$ se e soltanto se esistono, fra le combinazioni indicate di valori eccezionali relative a $\chi(t)$, di quelle che diano una somma nulla. In ogni altro caso le a_b sono tutte nulle: in particolare, ad es., se $\chi(t)$ rappresenta una legge continua (senza valori eccezionali), o se tali valori eccezionali hanno tutti lo stesso segno, ecc.; allora è semplicemente $\alpha(\lambda) = e^{-p\lambda}$. In ogni caso è $\alpha(\lambda) \geq e^{-p\lambda}$ e $\alpha(\lambda) \leq e^{-p\lambda}$ per $\lambda \rightarrow 0$; è anche $\alpha(\lambda) < e^{-p\lambda(1-d)}$ ove d indichi la più grande massa concentrata relativa alla legge $\chi(t)$, perchè si dimostra facilmente che nessun a_b (più in generale: nessuna massa concentrata relativa alla legge $\chi^b(t)$) può superare d . Ciò prova poi che (escluso il caso banale $\psi(t) \equiv 1$), $\alpha(\lambda)$ tende sempre a zero al crescere di λ . Poichè $e^{-p\lambda} > 1 - p\lambda$ ($\lambda > 0$) la condizione preannunciata $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$ sussiste, ed è quindi necessaria.

4. — È anche sufficiente. Supponiamo sia p tale che $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$; ricordando il significato di $\alpha(\lambda)$ e una proprietà soprarichiamata, si vede subito che in tale ipotesi

$$\frac{\psi^\lambda - (1 - p\lambda)}{1 - (1 - p\lambda)} = \frac{1}{p\lambda} (\psi^\lambda - 1) + 1$$

è sempre una funzione caratteristica, e lo è quindi, al limite, anche la funzione $\chi = 1 + \frac{1}{p} \log \psi$. Risolvendo si ottiene $\psi = e^{p[\chi - 1]}$, come appunto volevasi dimostrare.

5. — Dal punto di vista delle leggi di incrementi aleatori, le funzioni caratteristiche del tipo J rappresentano le leggi di incrementi puramente discontinui. Se X è una grandezza soggetta a variare accidentalmente nel tempo, e l'incremento subito da X in un intervallo di tempo λ ha come funzione caratteristica $\psi^\lambda(t) = e^{p\lambda[\chi(t) - 1]}$, la X non varia se non per incrementi istantanei fortuiti che si verificano di tanto in tanto. Precisamente, in ogni tempuscolo $d\lambda$ si ha (indipendentemente dalla maggiore o minore prossimità di altri salti) una probabilità $p d\lambda$ che la X vi abbia un salto; la grandezza di tale salto è anch'essa aleatoria⁽¹⁾, e la sua legge di probabilità è quella che ha per funzione caratteristica $\chi(t)$.

Il primo risultato interessante di questa Nota è che ogni legge di incrementi aleatori si può ottenere come limite di una legge d'incrementi puramente discontinui. Anche il modo di questo passaggio al limite e le altre formule successive sono suscettibili di notevole e significativa interpretazione rispetto al detto problema. Per una discussione completa di esso occorrono però ulteriori più ampi sviluppi, che sembra dovrebbe esser possibile svolgere su queste basi.

I problemi più importanti da risolvere sarebbero i seguenti:

caratterizzare le funzioni (ovviamente del tipo J') prodotto di una funzione del tipo J per una funzione del tipo e^{ikt} (con k reale)⁽²⁾;

caratterizzare le funzioni del tipo J' che ammettono valori eccezionali, e riconoscere se coincidono (come sembra presumibile) con quelle precedenti;

caratterizzare le funzioni (ovviamente del tipo J') prodotto di una funzione del tipo J per una funzione del tipo J'.

(1) Come caso limite può non essere aleatoria se $\chi(t)$ è della forma e^{ikt} ; allora ogni salto è certamente uguale a k . Si cfr. la II delle mie Note già citate.

(2) Se k è assegnato, basta applicare il criterio ora sviluppato per riconoscere se $\psi(t)e^{-ikt}$ è funzione del tipo J; il problema nuovo sarebbe di riconoscere *a priori* se esiste un valore k per cui $\psi(t)e^{-ikt}$ è del tipo J.

Matematica. — *Sulla curvatura media delle superficie.* Nota ⁽¹⁾ di LUISA PELOSI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una recente Nota, che ha lo stesso titolo della presente, stampata nel fascicolo 6° di questi « Rendiconti » (1° sem. 1930), il dott. Calonghi stabilisce una nuova espressione della curvatura media di una superficie.

Egli considera, intorno ad un punto regolare P di una superficie Σ , una linea chiusa infinitesima λ , e poi introduce l'angolo θ che la retta normale alla curva λ e tangente alla Σ , forma colla normale a Σ in P ; allora il rapporto fra l'integrale della funzione θ preso lungo la curva λ e l'area della porzione di superficie Σ racchiusa da λ vale la *curvatura media* della superficie Σ in P .

Questa proprietà può essere ottenuta con calcoli assai più rapidi e semplici di quelli effettuati dal Calonghi, come appunto risulterà da quanto segue.

1. Sia P un punto generico di una superficie Σ , e diciamo \mathbf{n} il vettore unitario, normale a Σ in P , e secondo un verso arbitrariamente fissato; consideriamo poi sopra Σ una curva chiusa λ , contenente nel suo interno P , e i cui punti abbiano distanze infinitesime da P ; un punto qualunque Q di tale curva può rappresentarsi con

$$(1) \quad Q = P + dP.$$

Chiamiamo \mathbf{n}' il vettore unitario, normale a Σ nel punto Q , e diretto dalla stessa parte di \mathbf{n} , ed \mathbf{n}^* il vettore unitario, tangente in Q a Σ , normale alla curva λ e diretto all'interno di λ ; allora chiamando θ l'angolo che la retta $Q\mathbf{n}^*$ fa col piano tangente a Σ in P , si ha:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \text{ang}(\mathbf{n}^*, \mathbf{n}),$$

quindi

$$\text{sen } \theta = \cos \text{ang}(\mathbf{n}^*, \mathbf{n}) = \mathbf{n}^* \times \mathbf{n};$$

d'altra parte, se ds è l'elemento d'arco della curva λ , si può porre:

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n}' \wedge dQ/ds,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1930.

perciò si ha:

$$\operatorname{sen} \theta \cdot ds = \mathbf{n}' \wedge d\mathbf{Q} \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{n}' \times d\mathbf{Q}.$$

Il vettore \mathbf{n}' normale a Σ in Q , può rappresentarsi così;

$$(2) \quad \mathbf{n}' = \mathbf{n} + d\mathbf{n}^{(1)},$$

ove $d\mathbf{n}$ è l'incremento del vettore \mathbf{n} , corrispondente all'incremento dP che figura nella (1), perciò sostituendo risulta:

$$\operatorname{sen} \theta \cdot ds = \mathbf{n} \wedge d\mathbf{n} \times d\mathbf{Q};$$

ora, se si introduce l'omografia σ di Burali-Forti, definita da:

$$\sigma dP = d\mathbf{n},$$

si ha, dalla (1): $d\mathbf{n} = \sigma(Q - P)$ e quindi:

$$\operatorname{sen} \theta \cdot ds = \mathbf{n} \wedge \sigma(Q - P) \times d\mathbf{Q}.$$

2. Ciò posto, integrando lungo la curva chiusa λ , risulta:

$$\int_{\lambda} \operatorname{sen} \theta \cdot ds = \int_{\lambda} \mathbf{n} \wedge \sigma(Q - P) \times d\mathbf{Q},$$

od ancora, applicando il teorema di Stokes, e chiamando M un punto generico della regione Λ racchiusa da λ e appartenente a Σ :

$$\int_{\lambda} \operatorname{sen} \theta \cdot ds = \int_{\Lambda} \operatorname{rot}_M [\mathbf{n} \wedge \sigma(M - P)] \times \mathbf{n}_M d\Lambda,$$

ove \mathbf{n}_M è un vettore unitario, normale a Σ in M , e diretto dalla parte di \mathbf{n} .

Ora, essendo $d\Lambda$ l'elemento d'area della porzione Λ di superficie Σ , si ha:

$$(a) \quad \mathbf{n}_M d\Lambda = dM \wedge \delta M,$$

ove dM e δM sono due vettori infinitesimi, tangenti a Σ in M ; perciò

$$\int_{\lambda} \operatorname{sen} \theta \cdot ds = \int_{\Lambda} \operatorname{rot}_M [\mathbf{n} \wedge \sigma(M - P)] \times dM \wedge \delta M,$$

(1) Per la piccolezza della curva λ è lecito ritenere $(d\mathbf{n})^2 = 0$, e allora il vettore \mathbf{n}' risulta effettivamente unitario.

od ancora, per la definizione dell'operatore rot:

$$\int_{\lambda} \text{sen } \theta \cdot ds = \int_{\Lambda} (\mathbf{n} \wedge \sigma dM \times \delta M - \mathbf{n} \wedge \sigma \delta M \times dM).$$

Ricordando poi la definizione di invariante primo di una omografia, e osservando che $\sigma \mathbf{n} = 0$, risulta:

$$\int_{\lambda} \text{sen } \theta \cdot ds = \int_{\Lambda} (I_1 \sigma) \mathbf{n} \times dM \wedge \delta M;$$

la quantità $I_1 \sigma$ non è altro che la curvatura media in P della superficie Σ ; in virtù della (a) si ha ancora:

$$\int_{\lambda} \text{sen } \theta \cdot ds = I_1 \sigma \cdot \int_{\Lambda} \mathbf{n} \times \mathbf{n}_m \cdot d\Lambda;$$

ma il vettore \mathbf{n}_m può esprimersi con una formula analoga alla (2), e allora — sempre supponendo $(d\mathbf{n})^2$ trascurabile — si vede senz'altro che il secondo membro vale $I_1 \sigma \cdot \Lambda$, ove Λ indica l'area racchiusa dalla curva λ . Siccome poi θ è infinitesimo, si conclude

$$\left(\int_{\lambda} \theta ds \right) / \Lambda = I_1 \sigma,$$

che è appunto la formula che si voleva ottenere.

Matematica. — *Encore sur le théorème de Cauchy.* Nota ⁽¹⁾
di E. CECCH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

Dans la Note récente: *Une démonstration du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss* ⁽²⁾ j'ai démontré l'énoncé suivant: Soit C une courbe plane simple fermée positivement orientée rectifiable, désignons par Γ l'intérieur de C et posons $\Delta = \Gamma + C$. Soit $f(z)$ une fonction continue dans Δ et dérivable dans Γ ; alors $\int_C f(z) dz = 0$.

M. Picone m'a informé (dont je le remercie beaucoup) que le résultat n'est pas nouveau; il se trouve démontré dans la Note de M. Pollard *On the conditions for Cauchy's theorem*, « Proc. London Math. Soc. », vol. 21 (2), 1921, pp. 456-482. Le but de cette Note est d'en donner une nouvelle démonstration qui me semble plus simple que les deux précédentes. Je supposerai d'ailleurs comme connu le résultat particulier que l'on a $\int_P f(z) dz$, où P désigne un carré (ou, ce qui revient au même, un polygone aux côtés parallèles aux axes de coordonnées) contenu, ainsi que son intérieur, dans Γ .

Il suffit évidemment de démontrer que, δ étant un nombre positif donné, on a

$$(1) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| < 350 \delta s,$$

s étant la longueur de C . Choisissons dans Γ un point fixe α et désignons par $\rho > 0$ sa distance de C . Il existe un nombre

$$(2) \quad \eta > 0, \quad \eta < \frac{\rho}{2}, \quad \eta < s$$

tel que pour z_1, z_2 appartenant à Δ

$$(3) \quad |z_1 - z_2| < \eta \text{ entraîne } |f(z_1) - f(z_2)| < \delta.$$

Il existe un nombre

$$(4) \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon < \frac{\eta}{14}, \quad \varepsilon < s$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1930.

(2) Ces « Rendiconti », mai 1930.

tel que pour ζ_1, ζ_2 appartenant à C

$$(5) \quad |\zeta_1 - \zeta_2| < 7\varepsilon \text{ entraîne que la longueur de } C(\zeta_1, \zeta_2) \text{ est } < \frac{\eta}{2},$$

$C(\zeta_1, \zeta_2)$ étant le plus court arc de C aux extrémités ζ_1, ζ_2 .

Pour $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ soit $Q_{m,n}$ le carré (intérieur + périmètre) à côté ε et au centre $(m + ni) \cdot \varepsilon$. Appelons *associés* les deux carrés $Q_{2m, 2n}, Q_{2m+1, 2n}$, ainsi que $Q_{2m, 2n+1}, Q_{2m-1, 2n+1}$. Soit Ω la somme de ceux des carrés $Q_{m,n}$ qui ou dont les associés rencontrent C. Ω est un continu borné dont la frontière se compose d'un nombre fini de polygones $P', P'' \dots$ dont deux différents sont sans point commun.

On peut diviser C en un nombre $< \frac{s}{\varepsilon} + 1 < \frac{2s}{\varepsilon}$ d'arcs de longueur

$< \varepsilon$; on en conclut que Ω contient au plus $\frac{16s}{\varepsilon}$ carrés Q_{mn} . Donc la longueur de $P', P'' \dots$ est $< 49s$. Si le point ζ appartient à Ω , sa distance de C est $< 3\varepsilon$; donc, d'après (2) et (4), α n'appartient pas à Ω . La courbe C étant située à l'intérieur de Ω , un des polygones $P', P'' \dots$ — désignons le par P — sépare α de C. Puisque α appartient à Γ , le point α est à l'intérieur de P et P est dans Γ . σ étant la longueur de P, on a

$$(6) \quad \sigma < 49s;$$

on peut donc partager P (positivement orienté) en

$$(7) \quad n < \frac{50s}{\varepsilon}$$

arcs P_v ($1 \leq v \leq n$) dont la longueur $\sigma_v \leq \varepsilon$. Désignons par u_{v-1}, u_v les extrémités de P_v de manière que

$$(8) \quad u_0 = u_n.$$

Les points u_v faisant partie de Ω , leur distance de C est $< 3\varepsilon$. Il existe donc sur C des points v_v ($0 \leq v_v \leq n$) tels que

$$(9) \quad v_0 = v_n;$$

les segments $[u_v, v_v]$ font partie de Δ et l'on a $|u_v - v_v| < 3\varepsilon$. Puisque $|u_v - u_{v-1}| < \varepsilon$, d'après (5) on a $s_v < \frac{\eta}{2}$, s_v étant la longueur de $C_v = C(u_{v-1}, u_v)$.

Pour abréger l'écriture posons $\varphi(C_v) = \int_{C_v} f(\tilde{z}) d\tilde{z}$ etc. D'après (8) et (9), on a

$$(10) \quad \sum_i^n [\varphi(C_v) - \varphi(P_v)] = \sum_i^n \varphi(\gamma_v),$$

γ_v étant la courbe (non simple) fermée contenue dans Δ qui se compose : 1° de l'arc C_v ; 2° du segment $[v_v, u_v]$; 3° de l'arc P_v dont on a changé l'orientation ; 4° du segment $[u_{v-1}, v_{v-1}]$. On voit que (v. (2) et (4))

$$(11) \quad \text{la longueur de } \gamma_v \text{ est } < s_v + \sigma_v + 6\varepsilon < \frac{\eta}{2} + 7\varepsilon < \eta < \frac{\rho}{2}.$$

Donc aucune des courbes C_v, P_v, γ_v ne contient pas α de sorte que la formule (10) reste valable lorsqu'on y remplace $f(\tilde{z})$ par $\frac{1}{\tilde{z} - \alpha}$ ce qui donne

$$\sum_i^n [\psi(C_v) - \psi(P_v)] = \sum_i^n \psi(\gamma_v),$$

où $\psi(C_v)$, p. ex., est la variation de l'argument de $\tilde{z} - \alpha$ lorsque \tilde{z} parcourt C_v . Or si \tilde{z} appartient à γ_v , (11) donne $|\tilde{z} - v_v| < \frac{\rho}{2}$, tandis que $|\alpha - v_v| \geq \rho$. On peut donc séparer le point α de la courbe γ_v par une droite (horizontale ou verticale) ce qui donne $\psi(\gamma_v) = 0$. Le point α étant situé à l'intérieur de P , on a $\sum_i^n \psi(P_v) = \psi(P) = 2\pi$. Il en résulte que

$$(12) \quad \sum_i^n \psi(C_v) = 2\pi.$$

En choisissant un point fixe a de la courbe C désignons pour chaque \tilde{z} agrégé à C par $C(\tilde{z})$ l'arc que l'on obtient en parcourant C au sens positif de a à \tilde{z} . La courbe C contient, pour $1 \leq v \leq n$, un arc différent de C_v aux extrémités v_{v-1}, v_v ; désignons le par C'_v . Evidemment un des deux nombres $\varphi(C_v), \varphi(C'_v)$ est égal à $\varphi[C(v_v)] - \varphi[C(v_{v-1})]$; or $\varphi(C_v) - \varphi(C'_v) = \pm \varphi(C)$ de manière que

$$(13) \quad \varphi(C_v) = \varphi[C(v_v)] - \varphi[C(v_{v-1})] + h_v \cdot \varphi(C),$$

h_v étant un nombre entier, $|h_v| \leq 1$. Dans la formule (13), on peut évidemment remplacer $f(\zeta)$ par $\frac{1}{\zeta - \alpha}$, ce qui donne, d'après (8) et (9),

$$\sum_1^n \varphi(C_v) = \varphi(C) \cdot \sum_1^n h_v, \quad \sum_1^n \psi(C_v) = \psi(C) \cdot \sum_1^n h_v.$$

Or le point α appartenant à Γ , on a $\psi(C) = 2\pi$. Vu la formule (12), il en résulte que $\sum_1^n \varphi(C_v) = \varphi(C)$. D'autre part, $\sum_1^n \varphi(P_v) = \varphi(P) = \oint_P f(\zeta) d\zeta = 0$ d'après le cas particulier du théorème de Cauchy que nous supposons connu. Donc la formule (10) devient

$$(14) \quad \varphi(C) = \sum_1^n \varphi(\gamma_v).$$

La courbe γ_v étant fermée, on a

$$\varphi(\gamma_v) = \int_{\gamma_v} [f(\zeta) - f(u_v)] d\zeta$$

de manière que, d'après (3) et (11)

$$|\varphi(\gamma_v)| < \delta(s_v + \sigma_v + 6\varepsilon).$$

Mais alors la formule (14) donne [v. (6) et (7)]

$$|\varphi(C)| < \delta(s + \sigma + 6\varepsilon n) < 350 \delta s$$

et la formule (1) est démontrée.

On voit facilement que la démonstration que je viens d'achever s'étend sans peine, également à celle donnée dans la Note précédente, au cas plus général où la frontière C de la région Γ se compose d'un nombre fini d'arcs simples rectifiables, ayant deux à deux au plus une extrémité en commun.

Matematica (Algebra). — *Risoluzione, nel campo delle matrici complesse, di una qualsiasi equazione analitica a coefficienti numerici.*
Nota ⁽¹⁾ di S. AMANTE, presentata dal Socio F. SEVERI.

1. Data una qualunque funzione analitica $f(x)$, proponiamoci di risolvere il problema della ricerca di tutte le matrici quadrate X , d'ordine fissato m , (del resto qualunque), ad elementi complessi, che soddisfano alla equazione

$$(1) \quad f(X) = 0$$

cioè le matrici X tali che la matrice $f(X)$ sia ad elementi tutti nulli.

Incominciamo con l'osservare che, se la (1) è verificata da una matrice X , sarà anche soddisfatta da qualunque trasformata di questa, perchè la trasformata di una funzione di una matrice X , mediante una trasformatrice T , è uguale alla stessa funzione della trasformata $T^{-1}XT$ di X .

Supponendo che la matrice X abbia la forma (*canonica*) *tipica*, cioè:

I) abbia gli elementi principali eguali alle radici caratteristiche di X , disposti per valori non decrescenti dei loro moduli, e quelli di modulo eguale per valori non decrescenti degli argomenti (supposti nell'intervallo $0'-2\pi$); per conseguenza le radici eguali sono elementi consecutivi della diagonale principale;

II) gli elementi non principali siano tutti nulli salvo tutto al più quelli contigui a destra della diagonale principale (*che diremo elementi della seconda trasversale*).

III) Ogni matrice principale di X , determinata da un tratto della diagonale principale costituito dalle radici tutte eguali ad una data ρ , sia formata da una o più matrici della forma

$$(2) \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \rho & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \rho & \varepsilon & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho \end{vmatrix}$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1930.

con $\varepsilon = 1$ oppure 0. La C dicesi una *catena* (o un *ciclo*) di X relativa alla radice ρ , e dicesi *catena propria* o *impropria* secondo che ε è 1 oppure 0.

IV) Le catene relative ad una radice ρ si succedano in X , a cominciare dalle proprie (se ve ne sono), per valori non crescenti dei loro ordini, seguite infine da un'unica catena impropria (se c'è).

Se si denota con ν la molteplicità di ρ e con n_1, n_2, \dots, n_k gli ordini delle successive catene proprie C , si ha dunque:

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq \nu$$

e l'ordine della impropria (se esiste) è

$$\nu - (n_1 + n_2 + \dots + n_k).$$

Quando è assegnata una matrice X non tipica, si sa che essa è trasformabile alla forma tipica (*unica* ⁽¹⁾) per tutte le matrici equivalenti ad X nel campo complesso) e gli ordini delle catene sono completamente determinati in base alla *segnatura* ⁽²⁾ relativa a ciascun indice, o in base ai cosiddetti *divisori elementari della matrice*.

2. Denotiamo ora con m l'ordine della matrice tipica X , con x_q ($q = 1, 2, \dots, m$) il termine generico della diagonale principale, con ε_q l'elemento della riga q^{esima} e colonna $q + 1^{esima}$ di X , cioè contiguo a destra all'elemento x_q (per le ipotesi fatte è sempre ε_q eguale ad 1 o a 0). Siano poi: J la matrice identica dello stesso ordine m di X , $D_{sr}(x)$ il complemento algebrico in $X - xJ$ dell'elemento della s^{esima} riga ed r^{esima} colonna, e

$$D(x) = |X - xJ|$$

il determinante di $X - xJ$.

Si ha allora, in virtù di un notevole risultato ottenuto dal prof. Fantappiè mediante l'applicazione della teoria dei *funzionali analitici* ⁽³⁾, che l'elemento generico f_{rs} della matrice $f(X)$ è uguale alla somma dei residui della funzione $-\frac{D_{sr}(x)}{D(x)}f(x)$ nei valori che sono radici di $D(x)$ (le cosiddette radici caratteristiche della matrice X).

(1) Per la trasformazione a forma canonica ordinaria v., per es. M. CIPOLLA, *Analisi Algebrica e introduzione al Calcolo Infinitesimale*; Casa Ed. D. Capozzi, Palermo 1921, p. 418. La trasformazione di una matrice ad elementi complessi alla forma tipica e l'unicità di questa sarà esposta, in una prossima Nota, dal prof. Cipolla a cui è dovuta.

(2) V. per es. G. SCORZA, *Corpi numerici ed Algebre*, Messina 1921, p. 433.

(3) V. L. FANTAPPIÈ, *Le calcul des matrices*, « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences », t. 186, p. 169, 1928.

Orbene, poichè, essendo la X della forma tipica, $X - xJ$ è certamente normale, segue

$$D_{sr}(x) = 0 \quad \text{per } s < r$$

mentre, dalla particolare forma della matrice $X - xJ$, si deduce

$$D_{rr}(x) = (x_1 - x) \cdots (x_{r-1} - x)(x_{r+1} - x) \cdots (x_m - x) \text{ per } r = 1, 2, \dots, m$$

e, per $s > r$:

$$D_{sr}(x) = (-1)^{r+s} (x_1 - x) \cdots (x_{r-1} - x) \varepsilon_r \varepsilon_{r+1} \cdots \varepsilon_{s-1} (x_{s+1} - x) \cdots (x_m - x)$$

Ma

$$D(x) = (x_1 - x)(x_2 - x) \cdots (x_m - x)$$

quindi

$$\frac{D_{sr}(x)}{D(x)} = 0 \text{ per } s < r ; \quad \frac{D_{rr}(x)}{D(x)} = \frac{1}{x_r - x} \text{ per } r = 1, 2, \dots, m$$

$$\frac{D_{sr}(x)}{D(x)} = - \frac{\varepsilon_r \varepsilon_{r+1} \cdots \varepsilon_{s-1}}{(x - x_r)(x - x_{r+1}) \cdots (x - x_s)} \text{ per } s > r$$

e però

$$f_{rs} = 0 \quad \text{per } s < r ;$$

f_{rr} , per $r = 1, 2, \dots, m$, è eguale al residuo della funzione $\frac{f(x)}{x - x_r}$ nel punto x_r , cioè, per la formola di Cauchy

$$(3) \quad f_{rr} = f(x_r) \quad r = 1, 2, \dots, m ;$$

f_{rs} , per $s > r$, è uguale alla somma dei residui della funzione

$$(4) \quad \frac{\varepsilon_r \varepsilon_{r+1} \cdots \varepsilon_{s-1}}{(x - x_r)(x - x_{r+1}) \cdots (x - x_s)} f(x)$$

nei valori x_r, x_{r+1}, \dots, x_s .

Perchè sia $f(X) = 0$, dovrà essere in particolare

$$f_{rr} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

e, per la (3),

$$f(x_r) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, m ;$$

quindi:

Condizione necessaria perchè una matrice tipica X soddisfi all'equazione $f(X) = 0$ è che le radici caratteristiche di X (elementi della diagonale principale di X) siano zeri di $f(x)$.

Ed allora, fissati h ($1 \leq h \leq m$) zeri distinti $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ della funzione $f(x)$, cerchiamo di determinare tutte le matrici X di forma tipica che verificano la (1) e le cui radici caratteristiche distinte siano appunto $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$.

Per quanto abbiamo precedentemente detto, basta vedere quale è la condizione perchè gli elementi f_{rs} ($s > r$) di $f(X)$ siano nulli.

Indichiamo perciò con $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h$ i rispettivi ordini di molteplicità di $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ per la $f(x)$ e supposto che siano $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$, rispettivamente, gli ordini di molteplicità di dette radici in $D(x) = 0$, si dovrà avere

$$(5) \quad \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_h = m \quad \text{con } m \geq h.$$

Incominciamo con l'osservare che l'elemento f_{rs} , per $s > r$, è certamente nullo se qualcuno delle ϵ che interviene nell'espressione (4) è nulla.

D'altra parte, le $\epsilon_r, \epsilon_{r+1}, \dots, \epsilon_{s-1}$ possono essere tutte uguali ad 1 allora e solo se appartengono ad una stessa catena propria, e in tal caso le x_r, x_{r+1}, \dots, x_s sono tutte eguali fra loro e ad una delle ρ , ad es. alla ρ_i , e la (4) diviene:

$$(6) \quad \frac{f(x)}{(x - \rho_i)^{s-r+1}}.$$

È bene tener presente che, detto p_i il massimo ordine delle catene corrispondenti alla radice ρ_i , dovrà essere, poichè $s - r$ è il numero delle ϵ (tutte eguali ad 1) che figurano nella (4),

$$0 < s - r + 1 \leq p_i$$

ed $s - r + 1$ può, effettivamente, prendere tutti e solo i valori $1, 2, \dots, p_i$; noi porremo:

$$s - r + 1 = n_i \quad (n_i = 1, 2, \dots, p_i).$$

Siccome ρ_i è zero d'ordine μ_i di $f(x)$, si ha

$$f(x) = (x - \rho_i)^{\mu_i} Q(x)$$

dove $Q(x)$ è una funzione che non ammette come zero ρ_i ; e però la (6) si può scrivere:

$$(7) \quad \frac{f(x)}{(x - \rho_i)^{n_i}} = (x - \rho_i)^{\mu_i - n_i} Q(x).$$

Dimostriamo ora che dovrà essere necessariamente

$$(8) \quad p_i \leq \mu_i.$$

Infatti, se fosse $p_i \geq \mu_i$ siccome n_i può assumere i valori $1, 2, \dots, p_i$, ci sarebbe, in particolare, un termine della matrice $f(X)$ per cui $n_i = \mu_i + 1$ e precisamente il termine $f_{r, r+\mu_i}$. Ma allora l'espressione (7) diviene

$$\frac{Q(x)}{x - \rho_i}$$

è il residuo di questa nel punto ρ_i , cioè il termine $f_{r, r+\mu_i}$, non sarebbe nullo essendo $Q(\rho_i) \neq 0$.

D'altra parte, se è invece $p_i \leq \mu_i$, l'esponente $\mu_i - n_i$ del fattore $x - \rho_i$ a secondo membro di (7) è sempre positivo o nullo e quindi il residuo della (7) nel punto ρ_i è nullo, cioè tutti i termini f_{rs} , per $s > r$, sono effettivamente nulli.

In tutta la dimostrazione non intervengono i numeri v_1, v_2, \dots, v_h , quindi essi restano arbitrari, purchè soluzioni in numeri interi positivi dell'equazione (5); ed allora, se alla condizione che le radici caratteristiche di X siano zeri di $f(x)$ aggiungiamo la (8), perveniamo al teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice X , dell'ordine m (del resto qualunque) e della forma tipica, verifichi l'equazione $f(X) = 0$ è che le radici caratteristiche distinte di X siano zeri di $f(x)$, e inoltre l'ordine di ogni catena propria, relativa ad una radice ρ_i , non superi l'ordine di molteplicità di ρ_i come zero di $f(x)$.

3. Da quanto è stato esposto segue che la risoluzione della (1) è sempre possibile nel campo delle matrici complesse, purchè la funzione $f(x)$ abbia zeri. Inoltre risulta pure, come vedremo, che in corrispondenza ad un sistema $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ di zeri distinti di $f(x)$, si ha un numero finito di matrici tipiche, di ordine fissato $m (m \geq b)$ soddisfacenti l'equazione (1). L'insieme di queste matrici, per le premesse fatte, gode delle proprietà che due qualunque, distinte, di esse non sono equivalenti, ed ogni altra matrice, dello stesso ordine m , e le cui radici caratteristiche distinte sono $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$, se è soluzione dell'equazione $f(X) = 0$, è equivalente ad una e ad una sola matrice dell'insieme.

Orbene, noi chiameremo *sistema completo di soluzioni*, d'ordine m , della equazione (1), relativo agli zeri $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ distinti di $f(x)$, un qualunque insieme di matrici d'ordine m , che abbia le proprietà seguenti:

- 1^a tutte le matrici del sistema sono soluzioni dell'equazione (1);
- 2^a due matrici diverse del sistema non sono mai equivalenti;
- 3^a ogni matrice d'ordine m , soluzione dell'equazione $f(X) = 0$, è equivalente ad una e ad una sola matrice del sistema.

Se, in particolare, il sistema completo è costituito da tutte le matrici tipiche, precedentemente determinate, che verificano la (1), lo diremo *sistema completo tipico di soluzioni*, d'ordine m , della (1).

4. Dimostriamo ora che:

Il numero delle matrici di un sistema completo di soluzioni, di ordine m , di un'equazione $f(X) = 0$; relativo alle radici $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ di $f(x)$, è finito.

Questo numero, infatti, può essere calcolato nel seguente modo:

Fissata una soluzione v_1, v_2, \dots, v_h in numeri interi positivi della equazione (5), detti $n_{1,i}, n_{2,i}, \dots, n_{k_i,i}$ gli ordini delle catene proprie relative alla radice ρ_i , chiamato con λ_i il più piccolo dei numeri v_i e μ_i , dovranno, per la proprietà (IV), verificarsi le condizioni

$$(9) \quad \lambda_i \geq n_{1,i} \geq n_{2,i} \geq \dots \geq n_{k_i,i} \geq 2 \quad \text{con } 0 \leq k_i \leq \left\lfloor \frac{v_i}{2} \right\rfloor$$

e

$$(10) \quad n_{1,i} + n_{2,i} + \dots + n_{k_i,i} \leq v_i$$

avendo denotato con $\left\lfloor \frac{v_i}{2} \right\rfloor$ la massima parte intera di $\frac{v_i}{2}$.

L'ordine della catena impropria (quando questa esiste, ossia quando $n_{1,i} + n_{2,i} + \dots + n_{k_i,i} < v_i$), corrispondente ad una soluzione della (10), sarà di conseguenza

$$v_i - (n_{1,i} + n_{2,i} + \dots + n_{k_i,i}) \geq 0.$$

Chiamando con P_i il numero, evidentemente finito, delle soluzioni della (10) verificanti le condizioni (9), sarà P_i il numero delle catene che si possono costruire in corrispondenza alla radice ρ_i , di molteplicità v_i , di cui una almeno sia propria. Questo numero è da aumentarsi di 1 per includere il caso in cui non si hanno catene proprie ma un'unica catena impropria.

Se ne deduce che:

$$(P_1 + 1)(P_2 + 1) \dots (P_h + 1)$$

è il numero delle matrici tipiche non equivalenti che si ottengono corrispondentemente ad una soluzione v_1, v_2, \dots, v_h della (5). Allora

$$(11) \quad N = \sum (P_1 + 1)(P_2 + 1) \dots (P_h + 1),$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le possibili soluzioni in numeri interi positivi della (5), è il numero totale di matrici tipiche di ordine m e le cui radici caratteristiche sono $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$.

Il numero N dato dalla (11) dà dunque il numero di matrici di ordine m costituenti un sistema completo di soluzioni della $f(X) = 0$.

La determinazione delle P_i rientra in noti problemi di partizione.

5. Vogliamo in ultimo determinare il numero delle *moltiplicazioni* che fanno parte di un sistema completo di soluzioni di ordine m , relativo agli zeri $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_b$ distinti di $f(x)$. A tal uopo basta osservare che detto numero è uguale al numero delle soluzioni in numeri interi positivi dell'equazione (5), cioè, per quanto è noto

$$(12) \quad \binom{m-1}{b-1}.$$

Questo numero dà dunque il numero delle moltiplicazioni richieste.

È bene osservare che $\binom{m-1}{b-1}$ è pure un *limite inferiore* del numero N (dato dalla (11)) di matrici costituenti un sistema completo di soluzioni della (1) di ordine m , relativo a b zeri distinti di $f(x)$.

Matematica (Calcolo funzionale). — *I massimi e minimi dei funzionali analitici reali*. Nota ⁽¹⁾ di L. FANTAPPIÈ, presentata dal Socio F. SEVERI.

1. Tra i rami più antichi ed importanti del calcolo funzionale è certo il cosiddetto *calcolo delle variazioni* che, nelle trattazioni classiche, ha per oggetto la determinazione dei massimi e minimi di alcuni funzionali reali di un tipo molto particolare, e cioè del tipo

$$(1) \quad F[y(t)] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) dt.$$

In questa Nota vogliamo invece dare le condizioni necessarie perchè un *qualunque* funzionale analitico F possa essere massimo o minimo per una funzione $y_0(t)$. L'importanza di queste condizioni è dovuta al fatto che esse, in generale, sono sufficienti a individuare delle *funzioni isolate*, soltanto nelle quali F può essere massimo o minimo.

2. Per poter parlare di massimi o minimi bisogna naturalmente restringerci dal campo complesso al campo reale, dove solo si può parlare di maggiore o minore.

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1930.

Diremo perciò che un funzionale analitico localmente⁽¹⁾ $F[y(t)]$ è reale quando esso assume valori reali per ogni funzione analitica $y(t)$ del suo campo di definizione che sia reale, che assuma cioè valori reali sull'asse reale (valori complessi coniugati per valori complessi coniugati dell'argomento).

Diremo inoltre che un funzionale analitico reale $F[y(t)]$ ha un massimo per una funzione reale $y = y_0(t)$ quando si può determinare un intorno (r, σ) conveniente di $y_0(t)$, tale che, per ogni funzione $y(t)$, pure reale ed appartenente a questo intorno nonchè al campo di definizione di F , sia sempre

$$(2) \quad F[y(t)] \leq F[y_0(t)]$$

(in modo perfettamente analogo si definiscono i minimi di un funzionale reale F).

Sia ora $y_0(t)$ una funzione (reale) per cui un funzionale analitico reale $F[y(t)]$, del resto comunque assegnato, è massimo, ed (r, σ) un suo intorno in cui è soddisfatta la disuguaglianza (2). Questo intorno è dato dalle funzioni $y(t) = y_0(t) + \varphi(t)$ olomorfe nella regione chiusa $A(r)$ della sfera complessa, costituita dai punti che hanno una distanza sferica $\cong r$ dai punti non regolari di $y_0(t)$, le quali, inoltre, in tutto $A(r)$ differiscono in modulo da $y_0(t)$ per meno di σ , cioè

$$(3) \quad |y(t) - y_0(t)| = |\varphi(t)| < \sigma$$

in tutta $A(r)$. Essendo $y_0(t)$ reale, l'insieme I dei suoi punti non regolari sarà simmetricamente disposto rispetto all'asse reale, e quindi anche la regione chiusa $A(r)$, sopra definita, sarà simmetrica rispetto a quest'asse. Per le funzioni reali $y(t) = y_0(t) + \varphi(t)$ dell'intorno (r, σ) di $y_0(t)$ la differenza $\varphi(t) = y(t) - y_0(t)$ sarà quindi pure una funzione reale, olomorfa in tutta la regione simmetrica $A(r)$ ed ivi in modulo $< \sigma$. Viceversa, tutte queste funzioni reali dell'intorno (r, σ) di $y_0(t)$ potranno sempre ottenersi dalla formola

$$(4) \quad y = y_0(t) + \varepsilon \varphi(t)$$

in cui $\varphi(t)$ è una qualunque funzione reale, olomorfa in $A(r)$, del resto arbitraria, ed ε è un numero reale soddisfacente alla disuguaglianza

$$(5) \quad |\varepsilon| < \frac{\sigma}{M}$$

(1) Vedi, per la definizione e le proprietà di questi funzionali, la Memoria *I funzionali analitici* «Memorie Lincei», vol 3°, serie 6°. 1930, Memoria che indicheremo nel seguito con F. A.

se M è il massimo di $|\varphi(t)|$ in $A(r)$. Posto

$$(6) \quad f(\varepsilon) = F_t[y_0(t) + \varepsilon\varphi(t)]$$

quindi

$$(7) \quad f(0) = F[y_0(t)]$$

ed essendo verificata la disuguaglianza (2) per tutte le funzioni reali dell'intorno (r, σ) di $y_0(t)$, dovrà dunque aversi

$$(8) \quad f(\varepsilon) \leq f(0)$$

per ogni valore di ε contenuto nell'intervallo (5), che ha $\varepsilon = 0$ per punto medio. In altri termini la funzione $f(\varepsilon)$, definita dalla (6), risulta non solo analitica (per l'analiticità di F) ma anche reale, assumendo valori reali per valori reali di ε nell'intervallo (5), con un massimo per $\varepsilon = 0$, punto medio di questo intervallo, a causa della disuguaglianza (8). Dovrà dunque aversi $f'(0) = 0$. Ma è, per una nota formola di derivazione (vedi F. A., cap. VI, n. 85)

$$(9) \quad f'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} F_t[y_0(t) + \varepsilon\varphi(t)] = F'_t[y_0(t) + \varepsilon\varphi(t), \alpha_*] \varphi^*(\alpha_*)$$

e quindi dovrà essere identicamente, se F è massimo o minimo per $y = y_0(t)$

$$(10) \quad F'_t[y_0(t), \alpha_*] \varphi^*(\alpha_*) = 0$$

qualunque sia la funzione reale $\varphi(\alpha)$, olomorfa in $A(r)$.

3. La condizione (10), necessaria perchè il funzionale F abbia un massimo o minimo in $y = y_0(t)$, deve essere verificata per ogni funzione reale $\varphi(\alpha)$ olomorfa in $A(r)$. In particolare, preso un valore α_0 interno alla regione $B(r)$, complementare di $A(r)$ sulla sfera complessa, e quindi pure simmetrica rispetto all'asse reale, anche il valore coniugato $\bar{\alpha}_0$ (simmetrico di α_0) sarà interno a $B(r)$, e le funzioni, manifestamente reali

$$(11) \quad \varphi_1(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_0} + \frac{1}{\alpha - \bar{\alpha}_0} \right)$$

$$(12) \quad \varphi_2(\alpha) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_0} - \frac{1}{\alpha - \bar{\alpha}_0} \right)$$

saranno perciò olomorfe in $A(r)$. Ricordando che, per la formola integrale di Cauchy, è

$$(13) \quad F'[y_0(t), \alpha] \frac{1}{\alpha - \alpha_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F'[y_0(t), \alpha]}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = F'[y_0(t), \alpha_0]$$

e applicando alle due funzioni (11) e (12) la condizione (10), dovremo allora avere identicamente, ponendo ancora α al posto di α_0 , del resto qualunque nella regione $B(r)$,

$$(14) \quad \frac{1}{2} (F'[y_0(t), \alpha] + F'[y_0(t), \bar{\alpha}]) = 0$$

$$(15) \quad \frac{1}{2i} (F'[y_0(t), \alpha] - F'[y_0(t), \bar{\alpha}]) = 0$$

da cui, moltiplicando la (15) per i e sommando membro a membro, segue identicamente

$$(16) \quad F'[y_0(t), \alpha] = 0$$

qualunque sia α nella regione $B(r)$. *Condizione necessaria perchè il funzionale analitico reale $F[y(t)]$ abbia un massimo o un minimo per $y = y_0(t)$ è dunque che sia nullo identicamente, per questa funzione, il funzionale derivato primo $F'[y_0(t), \alpha]$, pensato come funzione dell'indice α .*

D'altra parte non solo questa condizione segue dalla condizione (10), apparentemente più generale, ma anzi dalla (16) segue viceversa la (10) per qualunque funzione $\varphi(\alpha)$, anche *non reale*, olomorfa in $A(r)$.

L'equazione funzionale (16) individua, in generale, funzioni isolate, dove solo può aversi un massimo o un minimo di F . Presa una qualunque soluzione $y_0(t)$ della (16), per vedere se in essa c'è effettivamente un massimo o un minimo di F , basterà considerare lo sviluppo della funzione $f(\epsilon)$, data dalla (6), in serie di potenze di ϵ (vedi F. A., cap. VI, n. 87),

$$(17) \quad f(\epsilon) = F[y_0(t) + \epsilon\varphi(t)] = F[y_0(t)] + \epsilon F'[y_0(t), \alpha] \varphi(\alpha) + \\ + \frac{\epsilon^2}{2} F''[y_0(t), \alpha, \beta] \varphi(\alpha) \varphi(\beta) + \dots$$

Essendo nullo, per la (16), il termine in ϵ , sarà sufficiente, perchè ci sia un massimo o un minimo, che il coefficiente di $\frac{\epsilon^2}{2}$ abbia sempre lo stesso segno (sia < 0 nel caso del massimo, > 0 nel caso del minimo), che cioè il fun-

zionale polinomiale omogeneo di secondo grado (vedi F. A., cap. VII, n. 91)

$$(18) \quad F''[y_0(t), \alpha, \beta] \varphi(\alpha) \varphi(\beta)$$

individuato dalla funzione simmetrica di α e β $F''[y_0(t), \alpha, \beta]$ assuma sempre valori reali e dello stesso segno per qualunque funzione reale $\varphi(\alpha)$, olomorfa in $A(r)$ (sia « definito »).

4. Applichiamo quanto precede al caso classico dei funzionali studiati dal calcolo delle variazioni, anzi, per semplicità, ai funzionali del tipo

$$(19) \quad F[y(t)] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt$$

(f funzione analitica reale dei suoi tre argomenti, cioè reale per valori reali di questi). Si tratta di determinare quelle funzioni reali $y_0(t)$, olomorfe sul segmento reale $a - b$, per cui il funzionale (19) può essere massimo o minimo (caso degli estremi liberi). La condizione necessaria (16), applicata al funzionale (19) porta, con facili calcoli, all'equazione

$$(20) \quad F'[y(t), \alpha] = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{1}{t - \alpha} dt + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{t=b} \frac{1}{b - \alpha} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{t=a} \frac{1}{a - \alpha} = 0.$$

Osserviamo ora che, qualunque sia la funzione analitica $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'}$, olomorfa sul segmento $a - b$, il primo termine di questa espressione risulterà una funzione analitica di α con un taglio di Hermite lungo il segmento stesso, e quindi prolungabile al di là di questo, anzi la differenza fra due rami consecutivi di questa funzione, in generale polidroma (avente gli estremi a e b per punti di diramazione) sarà data precisamente da

$$(21) \quad 2\pi i \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'} \right)_{t=\alpha}$$

Poichè gli altri due termini dell'espressione (20) sono funzioni monodrome, anzi razionali, di α (proporzionali a $\frac{1}{b - \alpha}$ e $\frac{1}{a - \alpha}$ rispettivamente) e la (20) stessa deve essere identicamente nulla, dovrà in particolare esser nulla anche la differenza (21) tra due rami consecutivi del primo termine, cioè,

chiamando ancora con t la variabile indipendente, invece di α , dovrà intanto aversi

$$(22) \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

che non è altro che la celebre *equazione differenziale di Eulero* (in questo caso del secondo ordine) nella funzione incognita y . Le funzioni cercate dovranno dunque essere fra le soluzioni della (22), che dipendono da due costanti arbitrarie.

Ma l'equazione funzionale (20) ci dice ancora di più. Se infatti la y soddisfa alla (22) sarà identicamente nullo, nella (20), il primo termine, e poichè la (20) stessa deve essere soddisfatta identicamente, perchè sia identicamente nulla la somma dei due termini rimanenti, dovrà aversi separatamente

$$(23) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{t=b} = 0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{t=a} = 0.$$

Sostituendo nelle (23), al posto di y , l'integrale generale dell'equazione di Eulero (22), dipendente dalle due costanti arbitrarie, avremo così due equazioni che potranno servire a determinare coppie isolate di valori per queste costanti.

Dalla teoria generale dei massimi e minimi dei funzionali analitici reali abbiamo dunque riottenuto, come nella teoria classica, le equazioni (22) e (23) per determinare delle funzioni $y_0(t)$ isolate, ove solo può aversi un massimo o un minimo del funzionale (19). Mentre però nella teoria classica si ha direttamente solo l'equazione di Eulero, che individua le cosiddette « estremanti » e le condizioni ai limiti (23) vengono imposte indipendentemente, la nostra equazione generale (20) si presenta già di per sé sola sufficiente a individuare queste funzioni isolate $y_0(t)$, potendosi da essa dedurre tanto l'equazione di Eulero (22) quanto le condizioni ai limiti (23).

Matematica (Geometria). — *La congruence R ayant deux surfaces gauches pour les deux nappes de sa surface focale.* Nota⁽¹⁾ di S. FINIKOFF, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Considérons une surface gauche (règlée), S_1 et une congruence R qui la touche.

Soit⁽²⁾ (x_1) le point générateur de la surface gauche S_1 , $(x_1 x_3)$ — sa génératrice rectiligne, $(x_1 x_2)$ — le rayon de la congruence en question qui touche la ligne $v = \text{const.}$ sur la surface (x_1) et la ligne $u = \text{const.}$ sur la surface (x_2) .

Si (x_4) est un point arbitraire dans le plan tangent de la surface (x_2) , nous avons pour les déplacements du tétraèdre $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ le tableau⁽³⁾

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 u = \delta x_2 & x_1 v = p x_1 + q x_2 + x_3 \\ x_2 u = q_1 x_1 + p_1 x_2 + x_4 & x_2 v = \delta_1 x_1 \\ x_3 u = m x_1 + n x_2 - q x_4 & x_3 v = R x_1 + N x_2 - p x_3 - \delta x_4 \\ x_4 u = N_1 x_1 + R_1 x_2 - \delta_1 x_3 - p_1 x_4 & x_4 v = n_1 x_1 + m_1 x_2 - q_1 x_3 \end{cases}$$

Le tableau (1) suppose que la congruence $(x_1 x_2)$ est une congruence R, mais il n'exprime pas encore que la droite $(x_1 x_3)$ est une génératrice rectiligne de la surface (x_1) .

Or il dérive du tableau (1) que les deux premiers différentiels dans la directions $(x_1 x_3)$ sont

$$dx_1 = x_{1u} q - x_{1v} \delta = -\delta (p x_1 + x_3)$$

$$d^2 x_1 = A x_1 + B x_3 + x_2 \delta (N \delta - n q) + x_4 \delta (q^2 - \delta^2)$$

A et B sont des expressions qui ne nous intéressent pas. La droite $(x_1 x_3)$

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1930.

(2) Nous désignons par une seule lettre (x_i) les quatre coordonnées homogènes $(x_i^1 x_i^2 x_i^3 x_i^4)$ du point, par la paranthèse $(x_i x_k)$ — les six déterminants $x_i^1 x_k^2 - x_i^2 x_k^1$ etc.

(3) Les paramètres u, v et les coordonnées homogènes bien choisies. Voir *Sur les congruences stratifiables*, « Rendiconti Palermo », t. LIII, p. 313. J'ai changé les notations

$$\frac{p}{\delta} \frac{\sigma}{\delta_1} - \frac{p}{q} - \frac{q}{m} \frac{M}{n} - \frac{S}{N} - \frac{R}{R}.$$

appartenant à la surface (x_1) , le point $(d^2 x_1)$ est situé sur cette droite; donc nous avons

$$q^2 = \delta^2 \quad , \quad N\delta = nq$$

et même

$$(2) \quad q = \delta \quad , \quad N = n$$

car le changement du signe du paramètre u entraîne celui de δ sans modifier le q .

En précisant la position du point (x_3) sur la droite $(x_1 x_3)$ et celle du point (x_4) dans le plan $(x_1 x_2 x_4)$ nous y ajoutons encore

$$(3) \quad q_1 = \delta_1 \quad , \quad p = 0 \quad , \quad p_1 = 0$$

et la condition d'intégrabilité du système (1) est

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} m = 0 \quad , \quad m_1 = 0 \quad , \quad n = 0 \quad , \quad N_1 = -n_1 \quad , \quad R = R_1 \\ \delta_u - \delta_v = 0 \quad , \quad \delta_{1u} - \delta_{1v} = n_1 \\ R_u = -2n_1\delta \quad , \quad R_v = 2n_1\delta \\ n_{1u} + n_{1v} = 0 . \end{array} \right.$$

Il suit de là

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \varphi(u + v) \quad , \quad R = \psi(u - v) \\ n_1 = -\frac{\psi'}{2\varphi} \end{array} \right.$$

où la dérivation est désignée par l'accent.

En portant la valeur (5) dans la dernière équation (4) nous avons

$$\frac{\varphi' \psi'}{\varphi^2} = 0$$

donc

$$a) \quad \psi' = 0 \quad \text{on} \quad b) \quad \varphi' = 0$$

a) La première hypothèse nous donne

$$R = \text{const} \quad , \quad n_1 = 0 \quad , \quad \delta_1 = \chi(u + v).$$

En introduisant les paramètres asymptotiques

$$2\alpha = u + v \quad , \quad 2\beta = u - v$$

nous écrirons le tableau (1) dans la forme :

$$(6) \quad \begin{cases} x_{1\alpha} = 2\delta x_2 + x_3 & x_{1\beta} = -x_3 \\ x_{2\alpha} = 2\delta_1 x_1 + x_4 & x_{2\beta} = x_4 \\ x_{3\alpha} = Rx_1 - 2\delta x_4 & x_{3\beta} = -Rx_1 \\ x_{4\alpha} = Rx_1 - 2\delta_1 x_3 & x_{4\beta} = Rx_2 \end{cases}$$

d'où suit que les lignes β sur les surfaces (x_1) et (x_2) sont des droites.
Les points

$$\begin{aligned} y_1 &= x_3 + x_1 \sqrt{R} & y_2 &= x_3 - x_1 \sqrt{R} \\ z_1 &= x_4 + x_2 \sqrt{R} & z_2 &= x_4 - x_2 \sqrt{R} \end{aligned}$$

ne bougent pas quand β varie; ils décrivent les droites $(y_1 z_2)$ et $(y_2 z_1)$ quand α varie,

$$\begin{aligned} y_{1\alpha} &= y_1 \sqrt{R} - 2\delta z_2 & y_{1\beta} &= -y_1 \sqrt{R} \\ y_{2\alpha} &= -y_2 \sqrt{R} - 2\delta z_1 & y_{2\beta} &= y_2 \sqrt{R} \\ z_{1\alpha} &= z_1 \sqrt{R} - 2\delta_1 y_2 & z_{1\beta} &= z_1 \sqrt{R} \\ z_{2\alpha} &= -z_2 \sqrt{R} - 2\delta_1 y_1 & z_{2\beta} &= -z_2 \sqrt{R}. \end{aligned}$$

Donc toutes les deux nappes de la surface focale (x_1) et (x_2) sont des surfaces gauches ayant deux directrices communes.

b) La seconde hypothèse nous donne

$$\delta = \text{const}$$

donc

$$x_{1\alpha} = Rx_1 \quad x_{1\alpha\alpha} = (4\delta_1 + R)x_1.$$

Toutes les deux asymptotiques de la surface (x_1) $\alpha = \text{const}$ et $\beta = \text{const}$ sont des droites.

La première nappe (x_1) est une quadrique. La seconde, en général, n'a pas de génératrices rectilignes.

THÉORÈME. — Si une nappe de la surface focale d'une congruence R est une surface gauche (et pas une quadrique), l'autre l'est aussi et toutes les deux appartiennent à une congruence linéaire.

2. Réciproquement deux surfaces gauches d'une congruence linéaire déterminent une congruence R dont elles sont les deux nappes de la surface focale.

Si (x_1) et (x_2) sont les deux surfaces gauches en jeu, $(x_1 x_3)$ et $(x_2 x_4)$ — leurs génératrices rectilignes et (y_1) , (y_2) et (z_1) , (z_2) — les points où elles coupent les deux directrices, nous choisirons les points (x_3) et (x_4)

sur les génératrices correspondantes de telle manière que

$$y_1 = x_3 + x_4 \quad , \quad y_2 = x_3 - x_4 \quad , \quad z_1 = x_4 + x_2 \quad , \quad z_2 = x_4 - x_2 .$$

Comme les points (y_1) et (z_2) ainsi que (y_2) et (z_1) décrivent une même droite, nous avons

$$\begin{aligned} y_1 u &= a y_1 + b z_2 & z_1 u &= a' z_1 + b' y_2 \\ y_2 u &= a_1 y_2 + b_1 z_1 & z_2 u &= a'_1 z_2 + b'_1 y_1 \end{aligned}$$

donc

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 u = \frac{a + a_1}{2} x_1 + \frac{a - a_1}{2} x_3 - \frac{b + b_1}{2} x_2 + \frac{b - b_1}{2} x_4 \\ x_3 u = \frac{a - a_1}{2} x_1 + \frac{a + a_1}{2} x_3 + \frac{b - b_1}{2} x_2 + \frac{b + b_1}{2} x_4 \text{ etc.} \end{cases}$$

Or les points (x_1) et (x_2) sont les foyers du rayon $(x_1 x_2)$ qui correspondent aux développables u et v ; en portant ces suppositions dans les formules (7) nous les ramenons immédiatement à la forme (1) d'où résulte le théorème.

3. Nous avons vu : si une nappe de la surface focale d'une congruence R est une surface gauche, il en sera de même pour la seconde. Il suit de là que toute la suite de Laplace est formée de surfaces gauches si elle ne contient pas de quadriques.

Or, en nous bornant toujours aux congruence R, nous avons le théorème :

Si une transformée de Laplace d'une quadrique est une surface gauche, l'autre l'est aussi.

Les deux nappes (x_1) et (x_2) étant des surfaces gauches, nous revenons au tableau (6); de plus, si la surface (x_1) est une quadrique, δ est une constante qu'on peut ramener à l'unité.

Introduisons le tétraèdre

$$x_1^* = x_2 + x_3 \quad , \quad x_2^* = x_1 \quad , \quad x_3^* = R x_1 - x_4 \quad , \quad x_4^* = -x_3 .$$

Le tableau (6) nous donne pour les déplacements du nouveau tétraèdre absolument les mêmes formules; donc la congruence transformée $(x_1^* x_2^*) = -(x_1 x_1 v)$ est de même nature que la congruence primitive. De plus, les droites communes aux deux nappes (x_1^*) et (x_2^*) sont les mêmes que celles des surfaces (x_1) et (x_2)

$$(y_1^* z_2^*) = (x_3^* + x_1^* \sqrt{R} , x_4^* - x_2^* \sqrt{R}) = (y_1 z_2) .$$

Donc, si une surface d'une suite R est une surface gauche, toutes les surfaces le sont et appartiennent à la même congruence linéaire. Si deux surfaces consecutives sont des quadriques, toutes leurs transformées le sont aussi.

4. La dite congruence linéaire est formée de génératrices de ∞^1 quadriques dont les génératrices de la seconde famille sont les rayons d'une congruence de la suite.

M. Egoroff a montré tout récemment⁽¹⁾ que la congruence W dont la surface focale est formée de deux surfaces gauches est engendrée par les génératrices d'un mode de ∞^1 quadriques si la caractéristique de chaque quadrique dégénère en quatre droites d'un quadrilatère gauche. Deux arêtes opposées du quadrilatère engendrent les deux surfaces gauches en question.

Or nous voyons que le quadrilatère de M. Egoroff a deux arêtes fixes si la congruence engendrée est une congruence R .

Cette proposition déjà démontrée analytiquement peut être approuvée sans peine par la voie synthétique.

La congruence K étant une congruence R , il existe une seconde congruence K' de la même espèce; leurs rayons déterminent dans les plans tangents de leur focale commune S_1 des directions deux à deux conjuguées. Les rayons de chaque congruence distribués en ∞^1 quadriques, deux d'elles Q et Q' touchent la surface S_1 le long d'une génératrice quelconque L . Leur ligne d'intersection se décompose en quatre droites: deux fois la génératrice L et deux génératrices du second mode D_1 et D_2 .

Or les génératrices du second mode sont les rayons des congruences K et K' , donc — deux à deux conjuguées. Si elles coïncident, elles touchent une asymptotique, les deux foyers du rayon coïncident et les deux nappes de la surface focale S_1 et S_2 ont un point commun. Or par un point ne passe qu'une génératrice L de la quadrique Q , donc les deux surfaces S_1 et S_2 ont une génératrice L commune et, par les mêmes raisonnements, toutes — si non les deux droites D_1 et D_2 leur appartiennent par tous leurs points. Les deux nappes de la surface focale S_1 et S_2 ont deux directrices communes qui sont les mêmes pour la seconde congruence, donc, pour toutes les congruences de la suite.

(1) Sur les congruences W à focales réglées, «Rendiconti Acc. dei Lincei», serie 6^a, vol. X, p. 145, 1929.

Meccanica. — *Sul problema dinamico di un qualsivoglia sistema vincolato ridotto all'analogo problema relativo ad un sistema libero.* Nota⁽¹⁾ di E. GUGINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Con le equazioni del Lagrange della seconda forma⁽²⁾ il problema della determinazione del moto di un sistema olonomo di N punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) comunque sollecitato, sotto l'aspetto analitico si riduce, com'è noto, alla integrazione di un sistema differenziale del secondo ordine, nel minimo numero possibile di funzioni incognite (numero dei gradi di libertà del sistema). Tali equazioni, sebbene abbiano forma sintetica e particolarmente espressiva, nessun elemento forniscono sul comportamento delle reazioni R_i provenienti dai vincoli e che istante per istante, durante il fenomeno dinamico, si esercitano sui singoli punti P_i del sistema. Nè poteva essere altrimenti, ove si tenga conto del metodo seguito per pervenire alle dette equazioni; metodo che, secondo l'indirizzo classico, essenzialmente consiste nella eliminazione sistematica delle incognite reazioni.

Se invece il sistema che si considera è anolonomo, le equazioni differenziali del moto si possono notoriamente ridurre alla forma tipica dovuta al Maggi⁽³⁾; dette equazioni però, sebbene forniscano la completa impostazione differenziale del problema dinamico relativo a tali sistemi, sono ben lungi dal possedere quella semplicità di struttura e quelle caratteristiche deduttive, che costituiscono il maggiore pregio delle equazioni del Lagrange, valide solo per i sistemi olonomi. Così anche dalle equazioni del Maggi, nulla può desumersi intorno al comportamento delle forze vincolari.

Vi sono però problemi, come ad esempio i problemi tecnici, per i quali l'interesse maggiore è unicamente rivolto alla determinazione delle reazioni R_i , che cambiate di segno, danno la misura dei cimenti dinamici cui sono sottoposti i vincoli, durante il moto del sistema. Nei problemi della tecnica e più specialmente nelle questioni di cinetostatica generale, accade spesso di dovere stabilire il massimo cimento dinamico cui è sottoposto un determinato vincolo, al fine di prendere le opportune precauzioni, che valgano ad assicurare la stabilità delle parti materiali che lo realizzano.

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1930.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte I, pp. 359-363.

(3) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte I, pp. 396-411.

In tale caso, com'è noto, a ciascun punto P_i di massa m_i , sollecitato dalla forza attiva risultante \mathbf{F}_i , occorre applicare l'equazione fondamentale della dinamica:

$$(1) \quad m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$$

per desumere, in ciascun istante, la misura dei cimenti dinamici $-\mathbf{R}_i$, che interessa valutare; però tali cimenti dinamici, come facilmente si scorge dalle (1), dipendono, non soltanto dalle forze direttamente applicate, ma anche dalle forze di inerzia $-m_i \mathbf{a}_i$, talchè, per calcolarli effettivamente, occorre avere già determinata la legge del moto del sistema che si considera. Siffatta determinazione d'altra parte, è quasi sempre la questione più difficile da risolvere nei problemi di dinamica e solo in casi molto particolari si riesce ad individuarla; quindi in pochi casi favorevoli soltanto è possibile procedere alla effettiva determinazione dei cimenti dinamici che occorre calcolare.

Appare da ciò desiderabile di ricercare qualche procedimento, che consenta *a priori* la determinazione delle forze vincolari \mathbf{R}_i prima ancora di avere risolto il problema dinamico fondamentale. A tale fine si osservi, che dette forze vincolari, per quel che riguarda i loro effetti dinamici, hanno tutti i caratteri delle forze (fittizie) applicate; esse quindi debbono ritenersi conosciute, allorchè sarà possibile esplicitarle in funzione della configurazione del sistema, delle velocità simultanee degli N punti P_i e del tempo, in accordo con quanto ha luogo in meccanica pel più generale sistema di forze applicate. Di qui ne consegue, che le equazioni (1) non costituiscono, per il problema della determinazione delle forze vincolari, se non una impostazione provvisoria; in linea di massima, deve potere riuscire possibile la superiore esplicitazione, indipendentemente dalla conoscenza delle forze di inerzia. Se tale esplicitazione si riuscisse a realizzare, il problema della determinazione del moto del sistema (specialmente se esso è costituito da un numero non considerevole di punti) invece che con le equazioni del Lagrange o del Maggi, nei due casi sopra considerati, potrebbe essere affrontato ed anche più semplicemente risolto, in base alle equazioni (1) proiettate su di una terna Ω, ξ, η, ζ galileiana prefissata:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_i \ddot{\xi}_i = X_i + \Xi_i \\ m_i \ddot{\eta}_i = Y_i + H_i \\ m_i \ddot{\zeta}_i = Z_i + Z_i \end{array} \right.$$

ove le Ξ_i, H_i, Z_i denotano le componenti della reazione \mathbf{R}_i , che non avrebbero più il carattere di incognite ausiliarie. Per i sistemi olonomi le $3N$ equazioni (2) dovrebbero certamente risultare equivalenti alla *prima*

forma delle equazioni del Lagrange⁽¹⁾ nelle quali, com'è noto, le $\Xi_i H_i Z_i$ sono espresse in funzione di certi moltiplicatori indeterminati; invece nelle (2) tali moltiplicatori dovrebbero potersi esprimere in funzione delle $\xi_i \eta_i \zeta_i$, $\dot{\xi}_i \dot{\eta}_i \dot{\zeta}_i$, e di t . Scopo nostro è quello di mostrare come per qualsivoglia sistema S comunque sollecitato, a vincoli olonomi o più generalmente anolonomi, dipendenti o no esplicitamente dal tempo, sia possibile determinare le reazioni R_i in funzione delle posizioni simultanee dei punti P_i , dell'atto di moto v_i e del tempo; in conseguenza il problema dinamico di un qualsivoglia sistema di N punti materiali P_i è ridotto all'analogo problema relativo al medesimo sistema di punti, supposti però liberi.

Assumendo quali parametri lagrangiani sovrabbondanti, atti a caratterizzare le configurazioni del sistema, le coordinate cartesiane $\xi_i \eta_i \zeta_i$ dei punti P_i rispetto alla terna galileiana prefissata, i vincoli del sistema, siano essi olonomi o più generalmente anolonomi, saranno espressi da un certo numero r di equazioni linearmente indipendenti del tipo:

$$\sum_i^N (b'_{ki} d\xi_i + b''_{ki} d\eta_i + b'''_{ki} d\zeta_i) + b_k dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

dove i coefficienti b risultano in generale funzioni delle $\xi_i \eta_i \zeta_i$ e di t e solo nel caso di vincoli indipendenti dal tempo le b'_{ki} , b''_{ki} , b'''_{ki} risultano esclusivamente funzioni delle coordinate, e tutte le b_k sono identicamente nulle.

Le componenti $\dot{\xi}_i \dot{\eta}_i \dot{\zeta}_i$ delle velocità, che i dati vincoli consentono ai singoli punti del sistema, sono definite dalle equazioni:

$$\sum_i^N (b'_{ki} \dot{\xi}_i + b''_{ki} \dot{\eta}_i + b'''_{ki} \dot{\zeta}_i) + b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

e le analoghe componenti $\ddot{\xi}_i \ddot{\eta}_i \ddot{\zeta}_i$ delle accelerazioni compatibili coi legami, sono caratterizzate dalle equazioni che si deducono dalle precedenti per derivazione rapporto al tempo, cioè dalle

$$(3) \quad \sum_i^N (b'_{ki} \ddot{\xi}_i + b''_{ki} \ddot{\eta}_i + b'''_{ki} \ddot{\zeta}_i) + c_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

dove le c_k , a differenza delle b_k , in generale dipendono oltre che dalle coordinate e dal tempo, dalle componenti $\dot{\xi}_i \dot{\eta}_i \dot{\zeta}_i$ delle velocità dei singoli punti P_i del sistema.

Ciò premesso riprendiamo il principio della minima costrizione del Gauss, espresso però in forma analitica: « nel moto di ogni sistema materiale a vincoli bilaterali e privi di attrito, a partire dall'atto di moto relativo al generico istante t , ferma restando la sollecitazione attiva, le com-

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte I, pp. 352-355.

ponenti ξ, η, ζ , delle accelerazioni dei punti P, nel moto naturale del sistema, tra tutte le possibili determinazioni ξ^*, η^*, ζ^* compatibili coi vincoli (a partire dal medesimo atto di moto all'istante t) assumono tali valori da rendere minima la funzione:

$$(4) \quad R = \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} \left\{ (X - m_i \xi^*)^2 + (Y - m_i \eta^*)^2 + (Z - m_i \zeta^*)^2 \right\}$$

di secondo grado in ξ^*, η^*, ζ^* con m_i, X, Y, Z , prefissate «.

Ord una qualsivoglia distribuzione di accelerazioni ξ^*, η^*, ζ^* compatibile coi vincoli a partire dall'atto di moto relativo all'istante t , caratterizza manifestamente un ipotetico moto M^* conciliabile coi legami, ferma restando la sollecitazione attiva. A norma delle (2) si può anche affermare che l'ipotetico moto M^* è quello stesso, che avrebbe luogo liberamente (cioè a dire quale moto libero) se a partire dalla prefissata distribuzione di velocità all'istante t , alla sollecitazione attiva di componenti X, Y, Z , si aggiungesse l'ipotetica reazione di componenti Ξ^*, H^*, Z^* che i vincoli sono atti a generare. Tale reazione ipotetica dovrà quindi esser tale, che le relative componenti verifichino il sistema delle r equazioni:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} (k' \Xi_i^* + k'' H_i^* + k''' Z_i^*) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} (k' X_i + k'' Y_i + k''' Z_i) + c_i = 0$$

(i = 1, 2, ..., r)

che si deducono dalle (3) tenendo conto delle (2).

In conseguenza l'enunciato analitico del principio del Gauss, può mettersi sotto diversa forma, in maniera da involgere soltanto il comportamento delle incognite reazioni R , durante il moto naturale del sistema: « A partire dall'atto di moto relativo al generico istante t , ferma restando la sollecitazione attiva, le componenti Ξ, H, Z , delle reazioni, che si esercitano sui punti P, nel moto naturale del sistema, fra tutte le possibili determinazioni delle componenti Ξ^*, H^*, Z^* che i vincoli sono atti a generare, assumono tali valori da rendere minima la funzione

$$(6) \quad R = \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} (\Xi_i^{*2} + H_i^{*2} + Z_i^{*2})$$

che si deduce direttamente dalla (4) tenendo sempre conto delle (2) «.

In ultima analisi il problema della determinazione delle componenti Ξ, H, Z , delle reazioni provenienti dai vincoli e che si esercitano sui punti P, nel moto naturale, è ridotto ad un semplice problema algebrico di minime condizionato. Applicando la regola dei moltiplicatori del Lagrange, si è

condotti, come è noto, a minimizzare la seguente funzione delle variabili $\Xi_i^* H_i^* Z_i^*$ riguardate però del tutto indipendenti:

$$T = \sum_i^N \frac{1}{m_i} (\Xi_i^{*2} - H_i^{*2} + Z_i^{*2}) - 2 \sum_i^r \lambda_i \sum_i^N \frac{1}{m_i} (\dot{\xi}_{i1}^* \Xi_i^* + \dot{\xi}_{i2}^* H_i^* + \dot{\xi}_{i3}^* Z_i^*) - \dots$$

funzione, che si ottiene sommando alla (6) le equazioni (7) moltiplicate per opportuni parametri, che conviene mettere sotto la forma $-2\lambda_i$, ed i termini che si omettono risultano indipendenti dalle $\Xi^* H^* Z^*$.

Derivando la T rispetto alle variabili da cui dipende ed annullando tali derivate per le determinazioni Ξ, H, Z delle componenti delle reazioni che competono al moto naturale, si ottengono le ben note relazioni:

$$(7) \quad \Xi_i = \sum_k \lambda_k b'_k, \quad H_i = \sum_k \lambda_k b''_k, \quad Z_i = \sum_k \lambda_k b'''_k$$

che esprimono tali componenti in funzione delle coordinate, del tempo pel tramite delle b , ed inoltre degli r parametri λ , che col nostro procedimento risultano univocamente determinati in virtù delle equazioni (7).

Basta infatti sostituire le (7), ove l'indice di sommazione si denoti con b , nelle (5), certamente valide quando in luogo delle $\Xi^* H^* Z^*$ generiche si sostituiscano le Ξ, H, Z relative al moto naturale.

Si ottengono in tal modo le equazioni

$$(8) \quad \sum_i^N \frac{1}{m_i} \left(b'_{ki} \sum_i^r \lambda_i b'_{ki} + b''_{ki} \sum_i^r \lambda_i b''_{ki} + b'''_{ki} \sum_i^r \lambda_i b'''_{ki} \right) - C_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

ove si è indicato con C_k la funzione:

$$C_k = \sum_i^N \frac{1}{m_i} (\dot{\xi}_{ki}^* X_i + \dot{\xi}_{ki}^{*2} Y_i + \dot{\xi}_{ki}^{*3} Z_i) - \dots \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

dipendente dalla configurazione del sistema dalle velocità simultanee degli N punti, e dal tempo, oltre che dalle componenti X, Y, Z della sollecitazione attiva.

Le (8) possono anche scriversi:

$$\sum_i^r \lambda_i \sum_i^N \frac{1}{m_i} (\dot{\xi}_{ki}^* b'_{ki} + \dot{\xi}_{ki}^{*2} b''_{ki} + \dot{\xi}_{ki}^{*3} b'''_{ki}) - C_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

Ponendo:

$$A_{kk} = \sum_i^N \frac{1}{m_i} (b'_{ki} b'_{ki} + b''_{ki} b''_{ki} + b'''_{ki} b'''_{ki})$$

col secondo membro funzione esclusivamente delle coordinate e del tempo, le (8) possono mettersi sotto la forma definitiva:

$$(I) \quad \sum_{k=1}^r A_{hk} \lambda_k + C_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Si ottiene in tale modo un sistema di r equazioni lineari e generalmente non omogenee nelle r incognite λ_k ; sistema che permette la univoca determinazione di tali incognite in funzione delle coordinate, delle derivate prime delle coordinate e del tempo, per ogni sollecitazione attiva prefissata. Conosciute le λ_k , in base alle (7), risultano anche determinate le componenti $E_i H_i Z_i$ delle reazioni, che si esercitano sui punti P_i nel moto naturale del sistema, ed il relativo problema dinamico è così ridotto, come si è detto, all'analogo problema relativo al medesimo sistema supposto libero.

Meccanica. — *Sulle deformazioni finite dei sistemi continui.*
Nota⁽¹⁾ di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La presente Nota serve d'introduzione — puramente cinematica — ad un sommario esposto di alcuni studi sulle deformazioni finite dei sistemi continui a trasformazioni reversibili e, più in particolare, dei sistemi elastici: nozioni classiche⁽²⁾ vengono opportunamente coordinate, con qualche perfezionamento di dettaglio.

1. Siano: S un qualsiasi sistema continuo esente da lacerazioni o compenetrazioni di masse; C la configurazione attuale di S ; Σ il contorno completo di C ; C_* una configurazione di riferimento arbitrariamente scelta fra tutte le possibili per S ; Σ_* il contorno completo di C_* ; N ed N_* i versori delle normali interne a due elementi corrispondenti ($d\Sigma$ e $d\Sigma_*$) di Σ e Σ_* ; $P_* \equiv (y_1, y_2, y_3)$ il punto generico di C_* ; $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$ il punto che corrisponde a P_* in C ; $d\sigma_*$ il generico elemento superficiale per P_* ; $d\sigma$ il corrispondente elemento per P ; n_* il versore della normale a $d\sigma_*$ (orientata in verso arbitrario). Per semplicità la terna cartesiana di riferimento (i_1, i_2, i_3) sarà sempre supposta ortogonale.

A meno di una traslazione rigida, lo spostamento dell'intorno di P_* (spostamento omogeneo tangente allo spostamento $C_* \rightarrow C$ in P_*) è defi-

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1930.

(2) Cfr., ad es., E. et F. COSSERAT, *Sur la Théorie de l'Élasticité*, Chap. I (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », X, 1896).

nito dall'omografia vettoriale α che trasforma $dP_* \equiv (dy_1, dy_2, dy_3)$ in $dP \equiv (dx_1, dx_2, dx_3)$:

$$(1) \quad \alpha \equiv \left\| \frac{\partial x_r}{\partial y_s} \right\| \quad (r, s = 1, 2, 3).$$

L'omografia α non può riuscire degenerare, anzi la condizione imposta ad S si traduce in

$$(2) \quad D \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} > 0.$$

La legge di corrispondenza tra gli elementi di superficie *orientati* semplicemente si esprime mediante l'omografia ⁽¹⁾ $R\alpha = I_3 \alpha \cdot K\alpha^{-1}$ (la quale ha come coefficienti i complementi algebrici dei singoli elementi del determinante funzionale $D = I_3 \alpha$). Invero, indicando con \mathbf{n} il versore della normale a $d\sigma$ orientata in senso concorde ad $\alpha \mathbf{n}_*$ (vettore che è necessariamente ortogonale a $d\sigma$) risulta

$$(3) \quad \mathbf{n} d\sigma = R\alpha (\mathbf{n}_* d\sigma_*);$$

in particolare,

$$(3)' \quad \mathbf{N} d\Sigma = R\alpha (\mathbf{N}_* d\Sigma_*).$$

I coefficienti dell'omografia $\tilde{\omega} = K\alpha \cdot \alpha$ sono espressi da

$$(4) \quad b_{m,n} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_m} \frac{\partial x_i}{\partial y_n};$$

al tempo stesso si ha $dP^2 = \alpha dP_* \times \alpha dP_* = dP_* \times \tilde{\omega} dP_*$; vuol dire che l'omografia $\tilde{\omega}$ è una dilatazione coi tre coefficienti principali tutti positivi. In altre parole, $\tilde{\omega}$ è un'omografia vettoriale che ammette tre *semirette* unite mutuamente ortogonali. Conviene chiamare *deformazione pura* ogni omografia che goda della stessa proprietà.

Sia α_1 la deformazione pura cui si riduce $\tilde{\omega}$ quando si sostituiscano i suoi coefficienti principali coi valori assoluti delle rispettive radici quadrate, senza toccare le direzioni degli assi principali (*direzioni principali di deformazione in P_**): ciò che implica

$$(5) \quad \alpha_1^2 = \tilde{\omega}.$$

(1) Cfr., ad es., BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, cap. I, § 3 (Bologna, Zanichelli, 1929). Nel seguito è più volte sottintesa la citazione di questo Trattato.

L'omografia α coincide col prodotto di α_d per una conveniente rotazione rigida α_r ,

$$(6) \quad \alpha = \alpha_r \alpha_d,$$

ed è questo l'unico modo di decomporre α (cioè, in sostanza, lo spostamento omogeneo tangente) nel prodotto di una deformazione pura per una rotazione rigida⁽¹⁾.

La α_d è atta, al pari della $\tilde{\omega}$, a caratterizzare la deformazione locale: ma le ordinarie *caratteristiche di deformazione* ϵ_r, γ_s ($r, s = 1, 2, 3$) corrispondono alle posizioni

$$(7) \quad \epsilon_r = \frac{b_{rr} - 1}{2}, \quad \gamma_s = b_{s+1, s+2}$$

e sono legate agli allungamenti unitari δ_r nelle direzioni degli assi coordinati ed ai mutui scorrimenti τ_s delle direzioni stesse dalle relazioni

$$(8) \quad 1 + \delta_r = \sqrt{1 + 2\epsilon_r}, \quad (1 + \delta_{s+1})(1 + \delta_{s+2}) \sin \tau_s = \gamma_s.$$

Nel seguito viene chiamata *omografia di deformazione* la dilatazione

$$(9) \quad \epsilon = \frac{1}{2} (\tilde{\omega} - 1) \equiv \begin{vmatrix} \epsilon_1 & \frac{\gamma_3}{2} & \frac{\gamma_2}{2} \\ \frac{\gamma_3}{2} & \epsilon_2 & \frac{\gamma_1}{2} \\ \frac{\gamma_2}{2} & \frac{\gamma_1}{2} & \epsilon_3 \end{vmatrix} :$$

in guisa che il simultaneo annullamento delle sei caratteristiche di deformazione viene a riassumersi nell'annullamento dell'omografia di deformazione, ecc.

Ponendo

$$(10) \quad \begin{cases} I_1 \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ I_2 \epsilon = \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 - \frac{1}{4} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \\ I_3 \epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 - \frac{1}{4} (\epsilon_1 \gamma_1^2 + \epsilon_2 \gamma_2^2 + \epsilon_3 \gamma_3^2) + \frac{1}{4} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \end{cases}$$

(1) Cfr., ad es., BURGAITI, *Sulle deformazioni finite dei corpi continui*, n. 1 («Memorie della R. Accademia di Bologna», 1913-1914).

i coefficienti principali E_1, E_2, E_3 della ε (*caratteristiche principali di deformazione*) vengono a coincidere colle tre radici dell'equazione *secolare*:

$$(11) \quad E^3 - I_1 \varepsilon \cdot E^2 + I_2 \varepsilon \cdot E - I_3 \varepsilon = 0.$$

$I_1 \varepsilon, I_2 \varepsilon, I_3 \varepsilon$ sono i tre *invarianti principali di deformazione*: condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione delle ε_r, γ_s non cambi di valore in una qualunque trasformazione delle nostre coordinate ortogonali, è che essa dipenda dalle ε_r, γ_s solo pel tramite dei tre invarianti in questione.

La (11) può essere sostituita colla relazione omografica

$$(11)' \quad \varepsilon^3 - I_1 \varepsilon \cdot \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon \cdot \varepsilon - I_3 \varepsilon = 0,$$

caso particolare (in quanto ε è una dilatazione) di una ben nota identità.

Ricorderemo infine che il coefficiente di dilatazione cubica δ_c può ricavarsi dall'eguaglianza $\delta_c = 1 + D$ e dall'equivalente

$$(12) \quad 1 + \delta_c = \sqrt{1 + 2 I_1 \varepsilon + 4 I_2 \varepsilon + 8 I_3 \varepsilon} = I_3 \alpha.$$

2. Per un momento indichiamo con $X_{m,n}^{(s)}$ ($m, n, s = 1, 2, 3$) i coefficienti dell'omografia $K\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y_s}$. Senza alcuna difficoltà si verifica che

$$X_{m,n}^{(s)} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_m} \frac{\partial}{\partial y_s} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{m,n}}{\partial y_s} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial b_{m,s}}{\partial y_n} - \frac{\partial b_{n,s}}{\partial y_m} \right\}$$

e che (per ogni s) le 9 parentesi dei secondi membri ordinatamente coincidono coi coefficienti dell'omografia assiale $\text{rot}_{P_*} \tilde{\omega} i_s \wedge = 2 \text{rot}_{P_*} \varepsilon i_s \wedge$. Sussiste dunque l'eguaglianza

$$(13) \quad K\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y_s} + \text{rot}_{P_*} \varepsilon i_s \wedge \quad (s = 1, 2, 3).$$

D'altra parte, essendo $\alpha = \alpha_r \alpha_d$, $K\alpha = K\alpha_d \cdot K\alpha_r = \alpha_d \alpha_r^{-1}$, $\tilde{\omega} = \alpha_d^2$, risulta

$$K\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y_s} = \alpha_d \cdot \left(\alpha_r^{-1} \frac{\partial \alpha_r}{\partial y_s} \right) \alpha_d + \frac{1}{2} \alpha_d \frac{\partial \alpha_d}{\partial y_s} - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_d}{\partial y_s} \alpha_d:$$

onde basta rilevare che le due omografie $\alpha_d \frac{\partial \alpha_d}{\partial y_s}$ e $\frac{\partial \alpha_d}{\partial y_s} \alpha_d$ sono coniugate, per giungere alla conclusione⁽¹⁾ che (per ogni s)

$$(14) \quad \alpha_r^{-1} \frac{\partial \alpha_r}{\partial y_s} = \alpha_d^{-1} \left(\left\{ V \left(\frac{\partial \alpha_d}{\partial y_s} \alpha_d \right) + \text{rot}_{P_*} \varepsilon i_s \right\} \wedge \right) \alpha_d^{-1}.$$

(1) V. BURGATTI, loc. cit., in (1), a p. 314, n. 4.

Le classiche *condizioni di congruenza del Saint-Venant* non sono altro che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè, assegnata la ε (e quindi la α_d) in funzione di P_* , esista una rotazione rigida $\alpha_r(P_*)$ che simultaneamente soddisfi le tre equazioni omografiche (14).

Nel caso delle deformazioni infinitesime, ponendo $\alpha_r = V \wedge$, le (14) senz'altro si riducono alle tre equazioni vettoriali

$$\frac{\partial V}{\partial y_s} = \text{rot}_{P_*} \varepsilon \dot{t}_s,$$

fornendo le condizioni del Saint-Venant nella forma mista

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial y_{s+1}} \text{rot}_{P_*} \varepsilon \dot{t}_s = \frac{\partial}{\partial y_s} \text{rot}_{P_*} \varepsilon \dot{t}_{s+1} \quad (s = 1, 2, 3).$$

Meccanica. — *Moti rigidi negli spazi generalizzati.* Nota ⁽¹⁾ di ANGELINA CABRAS, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Affinchè in uno spazio non euclideo sia illimitatamente possibile il moto di un corpo rigido, deve essere uno spazio metricamente uniforme. Come tipo, per fissare le idee, considero un S_n ellittico. Un moto rigido generale in questo spazio equivale a un moto rigido con un punto fisso in un S_{n+1} euclideo. Considerando la stella delle rette intere che escono da O , si ha uno spazio ellittico del tipo di Riemann e Klein; invece la stella delle semirette terminate in O , oppure l'insieme dei punti di una ipersfera avente detto centro realizzano lo spazio ellittico a connessione di tipo sferico, nel quale due punti antipodi valgono come distinti. Quanto siamo per dire si applica, con lievi varianti, a entrambi i tipi di spazi e si estende poi con facili modificazioni agli spazi con curvatura negativa.

Assumiamo il centro fisso O come origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x_0, x_1, \dots, x_n nell' S_{n+1} . In questo spazio euclideo, il vettore velocità U di un punto generico M è funzione lineare del vettore $M - O$. Cioè la dipendenza fra i due è un'omografia vettoriale, che cartesianamente si esprime col sistema

$$(1) \quad u_i = \sum_{j=0}^n p_{ij} x_j \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

L'insieme delle p_{ij} costituisce un tensore misto (covariante-contravariante).

Il tipo di formole scritto è quello che vale per una deformazione lineare omogenea qualunque, di centro O . La rigidità del moto impone condizioni particolari alle p_{ij} . Passiamo a ricercarle.

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1930.

Trascorso un tempuscolo infinitesimo δt il punto M si è portato in $M + \delta M$; le sue nuove coordinate sono

$$x_i + \delta x_i = x_i + u_i \delta t = x_i + \sum_{j=0}^n p_{ij} x_j \delta t.$$

Queste nuove coordinate sono funzioni lineari omogenee delle antiche. Si può scrivere quindi

$$x_i + \delta x_i = \sum_{j=0}^n A_{ij} x_j.$$

L'insieme delle A_{ij} costituisce un nuovo tensore cioè definisce una nuova omografia. Si ha

$$(2) \quad \begin{cases} A_{ii} = 1 + p_{ii} \delta t \\ A_{ij} = p_{ij} \delta t \end{cases}, \quad \text{per } i \neq j$$

cioè: le A con due indici uguali sono infinitamente prossime all'unità: le altre sono infinitesime. Ciò dice appunto che la trasformazione è infinitesimale. Per esprimere la condizione di rigidità è necessario e sufficiente scrivere che le A sono i coefficienti di una trasformazione ortogonale, cioè soddisfano alle stesse condizioni come i coseni direttori di una n -pla ortogonale di assi; cioè:

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_i A_{ij}^2 = 1 & ; & \sum_i A_{ij}^2 = 1 \\ \sum_i A_{ij} A_{ik} = 0 & ; & \sum_i A_{hi} A_{ki} = 0 \end{cases}$$

per qualunque i, j, h, k .

La prima di queste formole dà

$$(1 + p_{ii} \delta t)^2 + \sum_{j \neq i} p_{ij}^2 \delta t^2 = 0$$

(nella sommatoria del secondo termine essendo escluso $j = i$).

Questa condizione deve essere soddisfatta fino a tutti i termini di primo ordine, per δt infinitesimo arbitrario: se ne deduce

$$(4) \quad p_{ii} = 0$$

cioè le p con due indici uguali sono tutte nulle: con questo è soddisfatta anche la seconda delle (3).

Similmente dalla terza o della quarta delle (3) si ricava

$$(5) \quad p_{ij} = -p_{ji}$$

cioè le p con due indici diversi cambiano segno quando s'inverte l'ordine degli indici. Queste due condizioni assicurano che le (3) siano soddisfatte, e sono necessarie e sufficienti per la rigidità del moto. Il loro enunciato si riassume dicendo che il determinante delle p_{ij} è emisimmetrico. Ciò, come è noto, porta due conseguenze diverse secondo che n è pari o dispari. Nel primo caso, l'ordine $n + 1$ del determinante è dispari, e il determinante allora è nullo. Nel secondo caso il determinante è il quadrato di uno speciale polinomio (pfaffiano). Queste proprietà sono collegate con quelle delle polarità degeneri e col verificarsi dei « sistemi nulli » negli spazi con numero dispari di dimensioni.

Venendo a considerare l'atto di moto, vediamo che esso è definito dall'insieme delle p_{ij} . Dunque un atto di moto rigido generale in un S_n ellittico è biunivocamente associato a un tensore emisimmetrico a due indici in $n + 1$ coordinate; esso dipende (come si ricava anche geometricamente per diverse vie) da $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ parametri.

Il moto descritto non è il moto rigido più semplice possibile: per $n > 2$ si può decomporlo in moti più elementari. Infatti, supposto $n > 2$ teniamo fissa nell' S_{n+1} euclideo una stella Σ uscente da O , avente per base $n - 1$ raggi linearmente indipendenti. Questa stella ha come elemento iperortogonale (polare rispetto all'assoluto) un piano Π uscente anch'esso da O . Tutte le rette di Π sono ortogonali a tutte le rette di Σ . Possiamo far rotare il piano in se stesso, attorno all'origine, mentre tutti i raggi della stella rimangono fissi. Ciò vuol dire che il movimento di un vettore qualunque uscente da O si trova decomponendolo in due altri fra loro ortogonali, uno giacente in Σ l'altro in Π ; la prima di queste componenti resta ferma, l'altra subisce una rotazione; ricomponendo, si ha il vettore trasformato. Così resta definito il moto di tutto lo spazio attorno ad O , e manifestamente è un moto rigido. L'atto di moto corrispondente è individuato dando la giacitura del piano (cioè $2n - 2$ parametri) e la velocità di rotazione nel piano (1 parametro); quindi in tutto $2n - 1$ parametri. Manifestamente questo è il moto più semplice possibile; l'insieme di tutte le rotazioni così fatte, con un piano-base Π obbligato, costituisce un gruppo a un parametro. L'operazione infinitesimale corrispondente a questo gruppo è l'omografia che dà il relativo atto di moto. Anche essa viene individuata da un tensore misto, a due indici, in $n + 1$ variabili.

Consideriamo allora il corrispondente moto nella stella di tutti i raggi che escono da O , oppure intersechiamo tutto con l'ipersfera per riportarci all' S_n che ci interessa. Ne deduciamo che in qualunque S_n ellittico l'atto di moto rigido più elementare consiste in uno scorrimento lungo una retta, mentre l' S_{n-2} polare (iperortogonale) rispetto a quella retta resta fisso in tutti i suoi elementi, e questo atto di moto è associato biunivocamente a una particolare omografia vettoriale dell' S_{n+1} , e quindi al corrispondente tensore.

Detta omografia che dal vettore di posizione di un punto conduce, in questo tipo di moto, a ricavarne la velocità, non è altro che una generalizzazione di quelle che nell' S_3 vengono dette assiali.

Qui la denominazione « assiale » non si applica più perchè ciò che resta fermo non è un asse ma una stella con $n - 1$ dimensioni. Ma il fatto costante che si verifica è che i vettori velocità sono tutti paralleli a un piano. Potrebbe applicarsi il nome di omografie planari, se non si vuole usare quello di assiali in senso così generalizzato. Il lato geometrico caratteristico è la degenerescenza di ordine $n - 1$; cioè il tensore è tale che il determinante formato coi suoi coefficienti p_{ij} non solamente è antisimmetrico (proprietà comune a tutti i moti rigidi) ma ha la caratteristica 2.

Per dimostrare che un atto di moto rigido generico può ottenersi come sovrapposizione (somma) di atti di moto di questo tipo elementare, riflettiamo che nel moto rigido generico compiuto nell' S_{n+1} (con origine fissa) vi sono, come in ogni moto deformatario lineare qualunque, $n + 1$ raggi uniti uscenti dall'origine, perchè la stella ad $n + 1$ dimensioni uscente dall'origine, è una forma di specie n che si trasforma proiettivamente in se stessa. Ora, dato che l' S_{n+1} è euclideo, e il moto è rigido, e la trasformazione è a coefficienti reali, i raggi uniti sono rette generatrici dell'ipercono assoluto, e sono immaginari coniugati a due a due, salvo al più uno reale, ed esterno all'ipercono, quando n sia pari. Quindi, dicendo N il massimo intero uguale o inferiore ad $(n + 1)/2$, vi sono N piani uniti reali passanti per l'origine; e sono tutti ortogonali fra loro, a causa della relazione che hanno rispetto all'assoluto. Ognuno di questi piani, poichè resta fisso, ruota in se stesso durante il moto. L'atto di moto rigido si scompone dunque in N moti elementari, o di rotazione semplice, del tipo descritto. E nel caso di n pari, vi è in più un asse fisso uscente dall'origine.

Riportiamoci allo spazio ellittico. Abbiamo allora che un atto di moto rigido generico in un S_n ellittico lascia fisse N rette, tutte fra loro polari a due a due rispetto all'assoluto (iperortogonali), e si lascia decomporre in N moti elementari ognuno dei quali consiste in uno scorrimento singolo lungo una di tali rette, mentre l' S_{n-2} contenente tutte le altre rette resta fisso in tutti i suoi elementi. Se n è pari, vi è in più un punto fisso che è esterno e polare all' S_{n-2} di cui sopra; altrimenti nessun punto fisso, o infiniti. Questa differenza fra n pari e dispari è in relazione con le proprietà ricordate del determinante emisimmetrico formato con le p_{ij} .

Come caso particolare illustrativo, abbiamo questi fatti noti: nell' S_2 ellittico un moto rigido è una rotazione attorno a un punto fisso, durante la quale la retta polare a quel punto scorre lungo se stessa, e non esiste moto più elementare; nell' S_3 ellittico il moto rigido è quello descritto da Clifford, un simultaneo avvvitamento intorno a due assi fra loro polari, decomponibile in due moti elementari, ognuno dei quali è rotazione intorno

a uno degli assi e scorrimento lungo l'altro; nell' S_4 si ha in più il punto fisso; così di seguito.

Corrispondentemente, il tensore o l'omografia associati all'atto di moto rigido generico si decompongono sempre in N tensori od omografie di caratteristica $= 2$.

L'ente geometrico associato ad ogni atto di moto di tipo elementare corrisponde a quello che si chiama un vettore applicato, o meglio un *corsore*, secondo la denominazione adottata dal dott. Rachel; poichè è definito da un asse associato a un verso e a una grandezza scalare⁽¹⁾. Apprendiamo così che ogni corsore di un S_n ellittico può essere biunivocamente associato a un tensore in $n + 1$ variabili, con determinante emisimmetrico e caratteristica $= 2$.

Conservando il nome di *motore*, già usato da Clifford, Ball, e recentemente anche da von Mises, all'ente geometrico associato a un moto rigido qualunque, abbiamo che nell' S_n ellittico il motore generico si lascia decomporre nella somma di tanti cursori quanto è il massimo intero N contenuto nella metà di n .

Esposto così il metodo di trattazione, e il principio che serve per associare fra loro gli atti di moto rigido degli S_n ellittici con le omografie vettoriali degli S_{n+1} euclidei e i corrispondenti tensori, è facile applicarlo agli altri S_n uniformi, di tipo diverso dall'ellittico.

Il caso euclideo anzitutto è un caso limite, nel quale si verifica la degenerescenza e la realtà di alcuni elementi. Gli elementi fra loro polari non possono trovarsi entrambi al finito: quindi avvengono dissimmetrie. Così nell' S_3 può essere all'infinito il centro di rotazione o l'asse di scorrimento, e ne seguono due tipi di moti elementari. Nell' S_4 euclideo uno dei due assi polari è sempre all'infinito, e anche qui i moti elementari sono di due tipi, rotazione e traslazione. Questi esempi illustrano quanto può avvenire negli iperspazi. Interessa notare che anche i moti rigidi negli S_n euclidei si possono, considerandoli come ottenuti al limite degli ellittici, associare a tensori a due indici in $n + 1$ variabili; e si può dimostrare che questi tensori hanno caratteri di degenerescenza particolari, che consistono nell'annullarsi di alcune serie di coefficienti.

I casi invece non degeneri, fra cui i casi iperbolici, quelli misti ellittico-iperbolici, e quelli detti « non Kleiniani », differiscono da quello ellittico

(1) Clifford, studiando l' S_3 ellittico e euclideo, denominava *rotore* un ente di questo tipo; ma la denominazione non è più appropriata per $n > 2$. Ricordiamo ancora che Clifford, nell' S_3 ellittico, considerava come moto elementare quello consistente in due moti d'avvitamento uguali intorno a due assi fra loro polari; e denominava *vettore* il corrispondente atto di moto: dimostrava poi il suo elegante teorema, che un motore generico si decompone sempre in due siffatti vettori. Questo teorema può ricavarci anche come conseguenza di quanto esposto sopra. Ma a mio avviso non conviene conservare questa denominazione di vettore negli spazi non euclidei, e non conviene considerare in generale come elementari questi tipi di moto, perchè generalizzazione ad $n \neq 3$ non può farsi.

solo pel divenire reali alcuni elementi dell'assoluto, ovvero col cessare di essere « definite positive » le forme algebriche associate ai tensori. Ne segue che alcuni scorrimenti e alcune rotazioni risultano non rientranti; e quanto più n è elevato, tanto maggior numero di sottocasi si presenta: ma la loro descrizione particolareggiata non presenta interesse notevole.

In una Nota successiva mostrerò come queste deduzioni cinematiche si prestino a dare i fondamenti della statica e della dinamica rigida non euclidea. *f.*

Meccanica (Idrodinamica). — *Vortice rettilineo in un canale a sponde piane parallele.* Nota ⁽¹⁾ di A. MASOTTI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. In un canale a sponde piane parallele indefinite si trova un vortice rettilineo indefinito, parallelo alle sponde. Il moto del liquido è piano, ed avviene per piani normali al vortice ed alle sponde.

Il moto irrotazionale indotto dal vortice nel liquido ed il movimento proprio del vortice furono studiati dal Routh ⁽²⁾ e dal Lagally ⁽³⁾; allo stesso problema si connette la determinazione della funzione di Green per la striscia compresa fra due rette parallele, effettuata dal prof. Boggio ⁽⁴⁾. Ciò nondimeno l'indagine è in parte rifatta nella presente Nota, con lo scopo di presentarne i risultati sotto una forma opportuna per l'applicazione idrodinamica ed elettrostatica che ci proponiamo.

L'applicazione idrodinamica riguarda la corrente circolatoria che si può stabilire intorno ad un sottile cilindro rotondo in un canale a sponde piane parallele. È assegnato il potenziale complesso di una tale corrente; è stabilita una relazione fra gli elementi geometrici del campo del moto, la circolazione e la portata della corrente; sono determinate le azioni dinamiche esercitate dal liquido sopra il cilindro e su ciascuna delle due sponde.

L'applicazione elettrostatica riguarda il condensatore elettrico formato da un filo rettilineo fra due piani paralleli, il cui studio, in un notevole caso particolare, è stato fatto recentemente dai professori Perucca, Fubini e Vallauri. Essa è esposta in una Nota successiva.

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1930.

(2) E. J. ROUTH, *Some Applications of Conjugate Functions*. «Proceedings of the London Mathematical Society», vol. XII, 1881, pp. 73-89. V. a p. 86.

(3) M. LAGALLY, *Ueber die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit*. «Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München», Jahrgang 1914, pp. 377-432. V. a p. 394.

(4) T. BOGGIO, *Sulla funzione di Green per una lastra infinita*. «Rendiconti del R. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere», ser. 2°, vol. XLII, 1909, pp. 611-624. V. §§ 1 e 2.

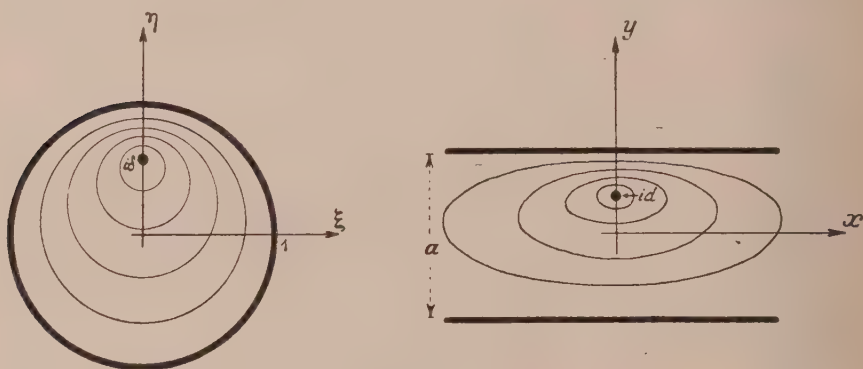
2. Consideriamo, nel piano ausiliario della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$, il cerchio $|\zeta| \leq 1$. È noto il potenziale complesso del moto piano irrotazionale indotto, dentro al cerchio, da un vortice di intensità C situato nel punto di affissa $i\delta$ (con $0 \leq \delta < 1$) ⁽¹⁾; se si desidera che la funzione di corrente ψ si annulli sulla circonferenza, il potenziale predetto ha la seguente espressione:

$$(1) \quad f = -\frac{iC}{2\pi} \log \frac{\zeta - i\delta}{1 + i\delta\zeta}.$$

È anche noto che la relazione ⁽²⁾

$$(2) \quad \zeta = \text{Th} \frac{\pi\tilde{\zeta}}{2a}$$

rappresenta in modo conforme il cerchio $|\zeta| \leq 1$, del piano ζ , sulla stri-



scia $-a/2 \leq y \leq a/2$ del piano della variabile complessa $z = x + iy$ (v. figura). Ne segue che, detto $\tilde{\zeta}_0$ l'omologo di $i\delta$, sicché

$$(3) \quad i\delta = \text{Th} \frac{\pi\tilde{\zeta}_0}{2a},$$

la relazione

$$(4) \quad f = \varphi + i\psi = -\frac{iC}{2\pi} \log \frac{\text{Th} \frac{\pi\tilde{\zeta}}{2a} - \text{Th} \frac{\pi\tilde{\zeta}_0}{2a}}{1 + \text{Th} \frac{\pi\tilde{\zeta}_0}{2a} \text{Th} \frac{\pi\tilde{\zeta}}{2a}}$$

(1) V. ad es. H. LAMB, *Hydrodynamics*, 5^a ed., p. 205 (Cambridge, University Press, 1924); v. anche U. CISOTTI, *Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra un cilindro e una parete piana indefinita*, in questi «Rendiconti», vol. I, serie 6^a, 1^o semestre 1925, pp. 494-499, n. 1.

(2) V. ad es. CISOTTI, *Idromeccanica Piana*, p. 40 (Milano, Tamburini, 1921-22).

definisce il potenziale complesso del moto indotto nella striscia considerata da un vortice di intensità C situato nel punto di affissa z_0 ⁽¹⁾. (Come è consuetudine, φ denota il potenziale cinetico e ψ la funzione di corrente). La (3) porge

$$(5) \quad z_0 = \frac{2a}{\pi} \operatorname{arctg} \delta \cdot i = id,$$

se con d si indica la distanza del vortice dall'asse del canale.

3. Discende subito dalla (4) la seguente espressione della funzione di corrente:

$$(6) \quad \psi = -\frac{C}{2\pi} \log \left| \frac{\operatorname{Th} \frac{\pi \chi}{2a} - \operatorname{Th} \frac{\pi z_0}{2a}}{1 + \operatorname{Th} \frac{\pi z_0}{2a} \operatorname{Th} \frac{\pi \chi}{2a}} \right|.$$

Se ne deduce che

$$(7) \quad \left| \frac{\operatorname{Th} \frac{\pi \chi}{2a} - \operatorname{Th} \frac{\pi z_0}{2a}}{1 + \operatorname{Th} \frac{\pi z_0}{2a} \operatorname{Th} \frac{\pi \chi}{2a}} \right| = e^{-\frac{2\pi\psi}{C}},$$

e questa relazione rappresenta la famiglia delle linee di flusso.

È utile esplorare l'andamento delle linee di flusso nelle immediate vicinanze del punto z_0 . Ciò si fa ponendo $\chi = z_0 + \varepsilon$, se con ε si indica una quantità complessa di modulo infinitesimo. Allora si ottiene, con facili calcoli, dalla (6):

$$(8) \quad \psi = -\frac{C}{2\pi} \log \frac{\pi}{2a \cos \frac{\pi \varepsilon}{a}} |\varepsilon| \quad (2).$$

(1) Con applicazione del metodo delle immagini, il LAGALLY assegnò la rappresentazione mediante serie del potenziale cinetico φ ; v. loc. cit., a p. 394. — Con lo stesso metodo, ed anche utilizzando un suo teorema sul comportamento della funzione di Green in una rappresentazione conforme, il BOGICIO determinò la funzione di Green per la striscia compresa fra due rette parallele; v. loc. cit., §§ 1 e 2. Moltiplicando questa funzione per la costante $C/2\pi$ si ottiene la funzione di corrente ψ relativa al problema in esame. È facile constatare che il risultato coincide con quello contenuto nella nostra formula (4).

(2) Infatti si ha, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$\operatorname{Th} \frac{\pi \chi}{2a} = \operatorname{Th} \frac{\pi}{2a} (z_0 + \varepsilon) = \operatorname{Th} \frac{\pi z_0}{2a} + \frac{\pi \varepsilon}{2a} \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 \frac{\pi z_0}{2a}}.$$

Questa relazione dimostra che nelle immediate vicinanze dell'asse del vortice le linee di flusso sono circolari, col centro nel punto ζ_0 . Posto $|\varepsilon| = r$, la precedente fornisce r in funzione di ψ :

$$(9) \quad r = \frac{2a}{\pi} \cos \frac{\pi d}{a} e^{\frac{2\pi\psi}{C}}.$$

4. Questa osservazione presenta qualche interesse. Essa mostra che la (4) dà anche il potenziale della corrente circolatoria intorno ad un sottile cilindro rotondo in un canale a sponde piane parallele.

Poiché la funzione di corrente ψ assume valore nullo sulle sponde del canale, il suo valore q sul cilindro misura la portata della corrente⁽¹⁾. Discende allora dalla (8) la seguente relazione fra gli elementi geometrici che caratterizzano il campo del movimento, cioè a, d, r , la circolazione C e la portata q della corrente:

$$(10) \quad q = \frac{C}{2\pi} \log \left(\frac{2a}{\pi r} \cos \frac{\pi d}{a} \right).$$

Se $d = 0$ la precedente diviene

$$(10^{bis}) \quad q = \frac{C}{2\pi} \log \frac{2a}{\pi r}.$$

5. La risultante delle azioni dinamiche subite dal cilindro, per unità di lunghezza, è applicata evidentemente al centro della sezione media, e le

Quindi

$$\begin{aligned} \text{Th} \frac{\pi \zeta}{2a} - \text{Th} \frac{\pi \zeta_0}{2a} &= \frac{\pi \varepsilon}{2a} \frac{1}{\text{Ch}^2 \frac{\pi \zeta_0}{2a}}, \\ 1 + \text{Th} \frac{\pi \zeta_0}{2a} \text{Th} \frac{\pi \zeta}{2a} &= 1 + \text{Th}^2 \frac{\pi \zeta_0}{2a} + \frac{\pi \varepsilon}{2a} \frac{\text{Th} \frac{\pi \zeta_0}{2a}}{\text{Ch}^2 \frac{\pi \zeta_0}{2a}} = \frac{\text{Ch} \frac{\pi \zeta_0}{a}}{\text{Ch}^2 \frac{\pi \zeta_0}{2a}} + \frac{\pi \varepsilon}{2a} \frac{\text{Th} \frac{\pi \zeta_0}{2a}}{\text{Ch}^2 \frac{\pi \zeta_0}{2a}} = \frac{\text{Ch} \frac{\pi \zeta_0}{a}}{\text{Ch}^2 \frac{\pi \zeta_0}{2a}} \left(1 + \frac{\pi \varepsilon}{2a} \frac{\text{Th} \frac{\pi \zeta_0}{2a}}{\text{Ch} \frac{\pi \zeta_0}{a}} \right) \end{aligned}$$

e si deduce:

$$\frac{\text{Th} \frac{\pi \zeta}{2a} - \text{Th} \frac{\pi \zeta_0}{2a}}{1 + \text{Th} \frac{\pi \zeta_0}{2a} \text{Th} \frac{\pi \zeta}{2a}} = \frac{\pi \varepsilon}{2a} \frac{1}{\text{Ch} \frac{\pi \zeta_0}{a}}.$$

Ora basta osservare che

$$\text{Ch} \frac{\pi \zeta_0}{a} = \text{Ch} \frac{\pi d}{a} i = \cos \frac{\pi d}{a}$$

per dedurre subito dalla (6) la (8).

(1) CIsOTTI, loc. ult. cit., p. 64.

sue componenti cartesiane R_x e R_y sono definite dalla prima formula del Blasius ⁽¹⁾:

$$(11) \quad R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 d\zeta,$$

nella quale μ indica la densità del liquido, e c designa il contorno della sezione del cilindro, che si intende percorso in modo da lasciare la sezione stessa a sinistra.

Osservando che

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\gamma},$$

la precedente diviene

$$(12) \quad R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int_{\gamma} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{d\gamma} d\gamma$$

se γ designa la linea del piano ζ che corrisponde alla linea c del piano z . Si vede facilmente che γ è una piccola circonferenza col centro nel punto $i\delta$ e avente il raggio dello stesso ordine di r ⁽²⁾. Anche γ risulta percorsa in senso antiorario ⁽³⁾.

In virtù delle (1) e (2), la (12) dà ⁽⁴⁾:

$$(13) \quad R_x = 0, \quad R_y = \frac{\mu C^2}{4a} \operatorname{tg} \frac{\pi d}{a}.$$

(1) CISOTTI, loc. ult. cit., p. 171.

(2) Infatti se $\zeta = \zeta_0 + \epsilon$ la (2) porge:

$$\zeta = \operatorname{Th} \frac{\pi \zeta_0}{2a} + \frac{\pi \epsilon}{2a} \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 \frac{\pi \zeta_0}{2a}} = \operatorname{Th} \frac{\pi \zeta_0}{2a} + \frac{\pi \epsilon}{2a} \left(1 - \operatorname{Th}^2 \frac{\pi \zeta_0}{2a} \right),$$

ossia, tenendo conto della (3):

$$\zeta = i\delta + \frac{\pi \epsilon}{2a} (1 + \delta^2).$$

Scende da questa che

$$\zeta - i\delta = \frac{\pi}{2a} (1 + \delta^2) r,$$

relazione che contiene quanto si è asserito.

(3) Infatti si deduce, da una formula della precedente nota, che $\arg(\zeta - i\delta) \doteq \arg \epsilon$. Pertanto mentre si percorre tutto c in senso antiorario, con che l'argomento di ϵ cresce di 2π , lo stesso fa l'argomento di $\zeta - i\delta$.

(4) Si ha:

$$\frac{df}{d\zeta} = -\frac{iC}{2\pi} \left(\frac{1}{\zeta - i\delta} - \frac{1}{\zeta - i\frac{1}{\delta}} \right), \quad \frac{d\zeta}{d\gamma} = \frac{\pi}{2a} \left(1 - \operatorname{Th}^2 \frac{\pi \zeta}{2a} \right) = \frac{\pi}{2a} (1 - \zeta^2).$$

Si vede che il cilindro è spinto verso la parete più vicina da una forza che è, per assegnati valori di a e d , proporzionale al quadrato della circolazione ed indipendente dal raggio. Non è superfluo osservare che la stessa forza subirebbe l'unità di lunghezza di un cilindro la cui sezione *finita* avesse per contorno una qualsiasi delle linee di flusso definite dalla (7). Per un assegnato canale e per un dato valore della circolazione, la spinta sul cilindro, che è nulla sull'asse del canale ($d = 0$), cresce indefinitamente quando il cilindro s'avvicina alla parete, e il diagramma relativo è una tangente (1).

La funzione

$$\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{d\zeta} = -\frac{C^2}{8\pi a} \left(\frac{1}{\zeta - i\delta} - \frac{1}{\zeta - i\frac{1}{\delta}} \right)^2 (1 - \zeta^2)$$

ha dentro γ solamente un punto singolare: $\zeta = i\delta$. È questo un polo di secondo ordine, con residuo

$$\frac{C^2}{2\pi a} \frac{\delta}{1 - \delta^2} i.$$

Ciò premesso è facile valutare l'integrale che figura nel secondo membro della (12), e dedurre le (13), purchè non si dimentichi che

$$\delta = \operatorname{tg} \frac{\pi d}{2a}.$$

(1) È istruttiva la seguente verifica dei risultati ottenuti. — La (4) ha significato meccanico su tutto il piano, e rappresenta il moto provocato da vortici situati nelle due successioni di punti

$$(d + 2na)i, \quad (a - d + 2na)i$$

(dove n assume tutti i valori interi, incluso lo zero), aventi le intensità C e $-C$ rispettivamente. Quanto è stato detto nei nn. 3 e 4 autorizza a sostituire i filetti vorticosi costituenti gli assi di questi vortici con sottili cilindri rotondi, di raggio infinitesimo r . Il calcolo dell'azione dinamica che subisce uno di questi cilindri, per unità di lunghezza, si può fare come è indicato nella Nota *Sulle azioni dinamiche in un sistema di vortici rettilinei*, n. 4 (in questi « Rendiconti », vol. IX, ser. 6^a, 1^o sem. 1929, pp. 301-304): l'azione dinamica subita da un cilindro si ottiene moltiplicando la velocità locale per $\mu |C|$, e rotando poi il vettore così ottenuto di un angolo retto nel verso opposto a quello della circolazione. La velocità locale è quella che si avrebbe nel centro del cilindro considerato se il cilindro stesso venisse rimosso; essa è dovuta alle correnti circolatorie che avvolgono gli altri cilindri; se tutti i cilindri venissero soppressi e i vortici fossero liberi di muoversi, il vortice corrispondente al cilindro considerato possederebbe appunto, in ogni istante, la velocità locale che, nella configurazione attuale, ad esso compete. Nel caso nostro la velocità locale è parallela all'asse x , e la sua componente lungo quest'asse è

$$-\frac{C}{4a} \operatorname{tg} \frac{\pi d}{a}$$

(ROUTH e LAGALLY, II. cc.); si ritrovano quindi le (13).

6. L'azione dinamica su ciascuna parete è normale ad essa, rivolta verso il liquido, applicata nel punto di intersezione della parete con l'asse y .

Si trova che le intensità delle risultanti delle azioni dinamiche, per unità di lunghezza, sulla parete più vicina al cilindro, e su quella più lontana, sono rispettivamente

$$(14) \quad \frac{\mu C^2}{4\pi a} \left[1 + \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2d}{a} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi d}{a} \right] \quad \text{e} \quad \frac{\mu C^2}{4\pi a} \left[1 - \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2d}{a} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi d}{a} \right],$$

Se $d = 0$ le due espressioni (14) assumono lo stesso valore:

$$(15) \quad \frac{\mu C^2}{4\pi a} \quad (2).$$

(1) Le espressioni (14) si ottengono calcolando gli integrali

$$\frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V_1^2 dx \quad \text{e} \quad \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V_2^2 dx,$$

dove V_1 e V_2 indicano i valori delle velocità sulla parete più vicina al cilindro e sull'altra, rispettivamente. Dalla (4) si deduce la velocità complessa $w = u - iv$ (u e v essendo le componenti cartesiane della velocità):

$$w = \frac{df}{d\zeta} = -\frac{iC}{2a} \frac{\cos \frac{\pi d}{a}}{\operatorname{Sh} \frac{\pi \zeta}{a} - i \sin \frac{\pi d}{a}}.$$

Sulle pareti si ha:

$$\text{per } \zeta = x + i \frac{a}{2}, \quad u_1 = -\frac{C}{2a} \frac{\cos \frac{\pi d}{a}}{\operatorname{Ch} \frac{\pi x}{a} - \sin \frac{\pi d}{a}} \quad \text{e} \quad v_1 = 0;$$

$$\text{per } \zeta = x - i \frac{a}{2}, \quad u_2 = \frac{C}{2a} \frac{\cos \frac{\pi d}{a}}{\operatorname{Ch} \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{\pi d}{a}} \quad \text{e} \quad v_2 = 0.$$

Negli integrali si porrà $V_1^2 = u_1^2$ e $V_2^2 = u_2^2$.

(2) V. la Nota: *Traslazione uniforme di un cilindro rotondo in un canale a sponde piane parallele*, ultimo richiamo a piè di pagina (questi « Rendiconti », vol. IV, ser. 6^a, 2^o sem. 1926, pp. 359-363).

Astronomia. — *Sulle variazioni di luce della variabile RZ Cassiopejae.* Nota ⁽¹⁾ di A. FRESA, presentata dal Corrisp. A. BEM-PORAD.

Durante le vacanze estive, per gentile concessione del prof. A. Bemporad ho eseguito nel R. Osservatorio di Capodimonte, una serie di osservazioni di *minimo* delle seguenti variabili ad eclisse: *Z Herculis*, *U Ophiuchi* ed *RZ Cassiopejae*; delle quali l'ultima è stata osservata persistentemente nello spazio di un mese dalla metà di agosto alla metà di settembre. Però non tutte le serate d'osservazione, pur abbracciando un numero notevole d'ore, sono state prese in esame, giacchè si è creduto opportuno di tralasciare quelle nelle quali le condizioni meteorologiche o la stanchezza dell'osservatore infirmavano notevolmente le misure.

Queste furono eseguite all'equatoriale di Fraunhofer di 18 centimetri di apertura e metri 3 di distanza focale, col fotometro registratore a cuneo di Töpfer, la cui costante (0.1288) venne determinata nel 1927 dal dr. Merola ⁽²⁾. Ogni serata di osservazione comprende in media una cinquantina di confronti, ognuno dei quali consta di 16 misure di estinzione distribuite fra la variabile (V) e due stelle di confronto *a* e *b*, alternandosi nel seguente ordine:

3 *a* , 3 V , 4 *b* , 3 V , 3 *a*
 3 *b* , 3 V , 4 *a* , 3 V , 3 *b*

I confronti si susseguono a intervalli di 7 minuti in media, mentre per ogni confronto si sono impiegati circa 4 minuti.

I tempi furono segnati adoperando il cronografo ideato dal prof. Bemporad ed illustrato dal Fontana nelle « Osservazioni fotometriche di *RR Lyrae* » ⁽³⁾: ad ogni confronto corrisponde una registrazione fatta nel punto medio di esso in conformità alla simmetria delle estinzioni.

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1930.

(2) M. MEROLA, *Il fotometro di Töpfer II del R. Osservatorio di Capodimonte*. « Contributi Astronomici », n. 42.

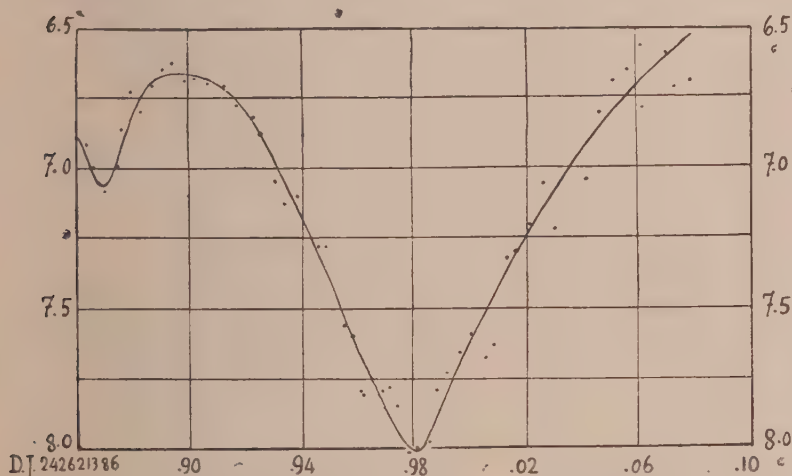
(3) « Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani », serie 2^a, vol. II, anno 1913, p. 182.

Le stelle di riferimento con le quali fu costantemente confrontata la variabile sono

$$(a) = \text{BD} + 68^{\circ}.200 \quad \alpha = 2^{\text{h}} 39^{\text{m}} 7^{\text{s}} \quad \delta = + 68^{\circ} 16'.6 \quad 6.5$$

$$(b) = \text{BD} + 69^{\circ}.171 \quad \alpha = 2 \ 28 \ 47 \quad \delta = + 69 \ 3 \ .9 \ 8.0$$

Per la stella *a* ci siamo serviti, nelle riduzioni, della grandezza 6.06 ottenuta da osservazioni fotometriche.



Curva di luce della variabile ad eclisse RZ Cassiopejae.

Giacchè si dubita che la stella *a* sia variabile, si è creduto opportuno, per accertarsi di tale fenomeno, di tracciare, per la serata del 24 agosto, due curve di luce della variabile, in maniera che i valori dell'una sono ottenuti dal confronto di una sola stella di paragone, quelli dell'altra con la seconda stella di riferimento.

Dal confronto ci è apparso evidente un sufficiente parallelismo delle due curve di luce: in base a questa considerazione abbiamo creduto opportuno di non sostituire la supposta variabile *a* con un'altra stella di riferimento o di servirci unicamente della stella *b*.

Nella seguente tabella riportiamo, fra il materiale di osservazione, le grandezze della variabile i cui valori furono ottenuti dalla media dei confronti colle due stelle di riferimento.

TABELLA I.

N. d'ordine	Data	TME (elioc.)	Distanza dal minimo	Grandezza media della variabile	N. d'ordine	Data	TME (elioc.)	Distanza dal minimo	Grandezza media della variabile
1	agosto 18	21 ^h 3 ^m .5	— 3 ^h 5 ^m .5	6.74	31	agosto 19	0 ^h 15 ^m .2	+ 0 ^h 6 ^m .2	8.28
2		8 .1	— 3 0 .9	6.97	32		19 .7	+ 0 10 .7	8.25
3		12 .2	— 2 57 .8	6.71	33		25 .8	+ 0 16 .8	7.74
4		16 .5	— 2 52 .5	7.03	34		30 .1	+ 0 21 .1	7.86
5		21 .0	— 2 48 .0	6.77	35		33 .4	+ 0 24 .4	7.87
6		31 .7	— 2 37 .3	6.36	36		49 .2	+ 0 40 .2	7.35
7		35 .9	— 2 33 .1	6.74	37		56 .8	+ 0 47 .8	7.03
8		41 .0	— 2 28 .0	6.94	38		1 11 .2	+ 1 2 .2	6.86
9		45 .9	— 2 23 .1	6.90	39		14 .4	+ 1 5 .4	7.45
10		50 .8	— 2 18 .2	6.61	40		18 .5	+ 1 9 .5	7.61
11		22 0 .7	— 2 8 .3	6.90	41		29 .0	+ 1 20 .0	6.67
12		4 .6	— 2 4 .4	6.84	42		36 .0	+ 1 27 .0	7.09
13		9 .1	— 1 59 .9	6.48	43		40 .5	+ 1 31 .5	6.91
14		13 .3	— 1 55 .7	6.51	44		44 .8	+ 1 35 .8	6.97
15		17 .8	— 1 51 .2	7.22	45		49 .0	+ 1 40 .0	7.58
16		27 .0	— 1 42 .0	6.93	46		2 0 .2	+ 1 51 .2	6.54
17		31 .9	— 1 37 .1	6.90	47		4 .5	+ 1 55 .5	6.36
18		36 .8	— 1 32 .2	6.87	48		12 .7	+ 2 3 .7	6.68
19		42 .9	— 1 26 .1	7.55	49		18 .2	+ 2 9 .2	6.61
20		23 2 .0	— 1 7 .0	7.32	50		29 .8	+ 2 20 .8	6.32
21		13 .5	— 0 55 .5	7.19	51		39 .0	+ 2 30 .0	7.00
22		23 .5	— 0 45 .5	7.71	52		43 .0	+ 2 34 .0	5.97
23		27 .2	— 0 41 .8	7.41	53		45 .7	+ 2 36 .7	6.36
24		31 .8	— 0 37 .2	7.29	54		51 .0	+ 2 41 .0	7.39
25		44 .0	— 0 25 .0	8.22	55		54 .4	+ 2 45 .4	6.79
26		50 .5	— 0 18 .5	8.03	56	agosto 24	20 49 .8	— 2 52 .2	7.16
27		54 .0	— 0 15 .0	8.32	57		53 .6	— 2 48 .4	7.48
28		57 .5	— 0 11 .5	8.16	58		57 .4	— 2 44 .6	7.65
29	agosto 19	0 3 .0	— 0 6 .0	7.97	59		21 0 .6	— 2 41 .4	7.74
30		6 .1	— 0 2 .9	8.62	60		3 .9	— 2 38 .1	7.64

Segue: TABELLA I.

N. d'ordine	Data	TME (eliec.)	Distanza dal minimo	Grandezza media della variabile	N. d'ordine	Data	TME (eliec.)	Distanza dal minimo	Grandezza media della variabile
61	agosto 24	21 ^h 10 ^m .2	— 2 ^h 31 ^m .8	7.06	91	agosto 24	23 ^h 56 ^m .4	+ 0 ^h 14 ^m .4	7.74
62		16 .6	— 2 25 .4	7.20	92	agosto 25	0 6 .6	+ 0 24 .6	7.86
63		19 .8	— 2 22 .2	7.19	93		9 .0	+ 0 27 .0	7.90
64		22 .4	— 2 19 .6	6.83	94		11 .6	+ 0 29 .6	7.61
65		25 .5	— 2 16 .5	6.16	95		15 .1	+ 0 33 .1	7.54
66		37 .4	— 2 5 .6	6.32	96		19 .1	+ 0 37 .1	7.77
67		39 .9	— 2 2 .1	6.93	97		28 .2	+ 0 46 .2	6.77
68		45 .0	— 1 57 .0	6.61	98		33 .8	+ 0 51 .8	7.61
69		50 .4	— 1 51 .6	6.64	99		39 .1	+ 0 57 .1	6.71
70		57 .6	— 1 44 .4	6.61	100		43 .6	+ 1 1 .6	6.67
71		22 22 .4	— 1 19 .6	6.29	101		47 .1	+ 1 5 .1	6.94
72		26 .2	— 1 15 .8	6.38	102		56 .6	+ 1 14 .6	6.68
73		31 .8	— 1 10 .2	7.10	103		1 2 .4	+ 1 20 .4	6.87
74		34 .9	— 1 7 .1	6.87	104		12 .6	+ 1 30 .6	6.71
75		38 .2	— 1 3 .8	6.77	105		15 .8	+ 1 33 .8	6.71
76		41 .9	— 1 0 .1	6.93	106		18 .5	+ 1 36 .5	7.38
77		45 .3	— 0 56 .7	6.48	107		24 .8	+ 1 42 .8	6.16
78		56 .2	— 0 45 .8	7.10	108		28 .6	+ 1 46 .6	6.20
79		59 .1	— 0 42 .9	7.51	109		31 .7	+ 1 49 .7	6.22
80		23 8 .6	— 0 33 .4	7.77	110		36 .3	+ 1 54 .3	7.12
81		11 .8	— 0 30 .2	7.61	111		39 .8	+ 1 57 .8	7.57
82		18 .8	— 0 23 .2	7.55	112	agosto 30	20 7 .2	— 3 0 .8	6.74
83		21 .4	— 0 20 .6	7.74	113		13 .2	— 2 54 .8	6.67
84		24 .6	— 0 17 .4	7.99	114		16 .8	— 2 51 .2	6.29
85		27 .6	— 0 14 .4	7.60	115		19 .4	— 2 48 .6	6.77
86		31 .2	— 0 10 .8	7.96	116		25 .7	— 2 42 .3	7.19
87		40 .1	— 0 1 .9	8.04	117		28 .5	— 2 39 .5	6.38
88		44 .3	+ 0 2 .3	8.19	118		31 .4	— 2 36 .6	6.38
89		49 .6	+ 0 7 .6	8.12	119		35 .0	— 2 33 .0	6.30
90		51 .1	+ 0 9 .1	7.29	120		37 .7	— 2 30 .3	6.71

Segue: TABELLA I.

N. d'ordine	Data	TME (elioc.)	Distanza dal minimo	Grandezza media della variabile	N. d'ordine	Data	TME (elioc.)	Distanza dal minimo	Grandezza media della variabile
121	agosto 30	20 ^h 47 ^m .5	— 2 ^h 20 ^m .5	6.68	139	agosto 30	22 ^h 24 ^m .7	— 0 ^h 43 ^m .3	7.16
122		50 .4	— 2 17 .6	6.74	140		27 .8	— 0 40 .2	7.45
123		57 .0	— 2 11 .0	6.52	141		36 .0	— 0 32 .0	7.06
124		59 .6	— 2 8 .4	6.84	142		38 .5	— 0 29 .5	7.55
125		21 6 .0	— 2 2 .0	6.71	143		44 .8	— 0 23 .2	8.24
126		18 .4	— 1 59 .6	6.65	144		47 .6	— 0 20 .4	7.73
127		24 .0	— 1 43 .0	6.93	145		51 .8	— 0 16 .2	7.54
128		26 .6	— 1 41 .4	7.06	146		57 .3	— 0 10 .7	7.86
129		31 .6	— 1 36 .4	6.96	147		23 0 .4	— 0 7 .6	7.93
130		35 .6	— 1 32 .4	7.15	148		6 .7	— 0 1 .3	8.00
131		38 .0	— 1 30 .0	6.87	149		9 .9	+ 0 1 .9	8.22
132		41 .9	— 1 26 .1	7.55	150		14 .8	+ 0 6 .8	8.00
133		45 .0	— 1 23 .0	7.08	151		17 .0	+ 0 9 .0	7.58
134		22 8 .8	— 0 59 .2	8.03	152		28 .5	+ 0 20 .5	7.48
135		11 .6	— 0 56 .4	6.94	153		31 .5	+ 0 23 .5	7.29
136		14 .3	— 0 53 .7	7.16	154		36 .8	+ 0 28 .8	7.22
137		17 .3	— 0 50 .7	7.90	155		45 .0	+ 0 37 .0	7.70
138		21 .6	— 0 46 .4	7.74	156	agosto 31	0 1 .0	+ 0 53 .0	7.60

La curva di luce che qui riportiamo è media delle tre curve corrispondenti al 18, 24 e 30 agosto, i cui valori furono determinati perequando di 3 in 3 quelli delle grandezze osservate, riportati nella tavola I. I tempi, riferiti al meridiano dell'Etna, furono ridotti al 24 agosto in epoca giuliana e vi fu apportata anche la correzione eliocentrica.

Dalla curva di luce appare innanzitutto un minimo secondario ben pronunciato, in prossimità del massimo che precede il minimo principale. Inoltre il ramo discendente presenta una leggiera inflessione, la quale manca nella curva del 24, mentre risulta evidente in quella del 30 e accentuata nell'altra del 18; così pure per l'inclinazione di essi rami, la quale per quello discendente va aumentando nell'ordine delle tre serate: 30, 18, 24 agosto. D'altra parte la dissimmetria nelle singole curve di luce viene a convalidare quello che già era stato riscontrato dal prof. Bemporad, il

quale in proposito attestava che « le rappresentazioni grafiche dei singoli minimi isolatamente considerati lasciano apparire effettivamente delle dissimmetrie molto accentuate, ora in un senso ora in un altro »⁽¹⁾. In conseguenza di ciò crediamo opportuno riportare nella seguente tabella le grandezze della variabile (ricavate dalla curva media) ad intervalli di 10 minuti a partire dal minimo (23^h 34^m).

TABELLA II.

Distanza dal minimo	Grandezza		Differenza	Distanza dal minimo	Grandezza		Differenza
	nel ramo discendente	nel ramo ascendente			nel ramo discendente	nel ramo ascendente	
0 ^h 10 ^m	7.94	7.88	6	1 ^h 10 ^m	7.00	7.07	7
20	7.80	7.74	6	20	6.86	6.96	10
30	7.64	7.58	6	30	6.77	6.87	10
40	7.46	7.45	1	40	6.71	6.79	8
50	7.30	7.32	2	50	6.67	6.70	3
1 0	7.15	7.18	3	2 0	6.66	6.64	2

Da questo prospetto appare evidente la dissimmetria, i cui valori (diff.) risultano più grandi di quelli riscontrati dal prof. Bemporad.

In quanto poi alla differenza fra le grandezze estreme, dalle tre curve di luce risultano per il 18, 24, 30 agosto 1.7, 1.4, 1.5; quindi come variazione totale abbiamo un valore medio di 1.5 in ottimo accordo con quello (1.5) trovato dal prof. Bemporad, e con l'altro (1.57) ottenuto dal dott. Padova.

Per quanto riguarda il periodo di questa variabile, durante l'osservazione dei *minimi* è stato riscontrato un ritardo sistematico di alcuni minuti sull'epoca calcolata; ciò sarebbe in contraddizione con l'anticipo trovato da parecchi osservatori negli anni decorsi; tuttavia giova in proposito far notare che tale ritardo è stato già riscontrato dal dott. Aurino riducendo le proprie osservazioni, ancora inedite, eseguite nello scorso anno.

Dalla curva media si ha in tempo medio eliocentrico di Greenwich:

$$\text{Min. elioc.} = 1930 \text{ agosto } 24^{\text{d}} 22^{\text{h}} 33'.6 = 2426213.940.$$

(1) A. BEMPORAD, *Sulla curva di luce della variabile RZ Cassiopeae*. « Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani », serie 2^a, vol. II, anno 1913, p. 153.

Confrontando questo tempo con quello della formula del Nijland⁽¹⁾ risulta, per $E = 7411$, come valore del periodo:

$$p = 1^d 4^h 41^m 11^s.32 = 1^d.19527$$

superiore a quello del Nijland di 0^s.86.

Concludendo, dal complesso delle nostre osservazioni risulta:

1° L'esistenza di un minimo secondario ben pronunciato in prossimità del massimo precedente il minimo principale.

2° Una leggiera inflessione nella curva di luce sul ramo discendente, non costante, ma forse periodica.

3° Un aumento del periodo della variabile di 0^s.86.

Fisica. — *Onde e corpuscoli.* Nota⁽²⁾ di SEB. TIMPANARO, presentata dal Corrisp. M. LA ROSA.

Il fenomeno fotoelettrico e l'effetto Compton rendono molto plausibile l'ipotesi che il corpuscolo di luce, o fotone, abbia una quantità di moto:

$$(1) \quad \bar{m}c = \frac{h\bar{\nu}}{c}$$

se indichiamo con h la costante di Planck e con c , $\bar{\nu}$ ed \bar{m} rispettivamente la velocità, la frequenza e la massa del fotone, misurate da un osservatore fisso rispetto alla sorgente luminosa.

Se la sorgente si muove con velocità v rispetto all'osservatore, l'ipotesi balistica di Ritz e La Rosa vuole che la velocità della luce diventi $c + v$ e perciò la quantità di moto diventerà $\bar{m}(c + v)$. Ponendo $\beta = \frac{v}{c}$, si avrà:

$$\bar{m}(c + v) = \bar{m}c + \bar{m}c\beta.$$

Per effetto della velocità v , la quantità di moto subisce dunque un incremento uguale al prodotto della quantità di moto primitiva per β . Per la (1), si vede subito che

$$\bar{m}(c + v) = \frac{h\bar{\nu}}{c} + \frac{h\bar{\nu}}{c}\beta$$

(1) Min. = 1906 maggio 24^d 10^h 9^m.7^s.2 + 1^d 4^h 41^m.10^s.46 · E
= 2417355.423 d. J. + 1^d.19526 E. (T. M. Greenw.).

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1930.

cioè

$$(2) \quad \bar{m}(c + v) = \frac{h\nu}{c} (1 + \beta)$$

o, in altri termini, invece della frequenza ν , si avrà una nuova frequenza

$$\bar{\nu}' = \bar{\nu} (1 + \beta)$$

come vuole la teoria classica dell'effetto Doppler.

È interessante osservare che, ammettendo la variazione einsteiniana della massa si avrebbe, invece della (2), l'equazione

$$\frac{\bar{m}}{\sqrt{1 - \beta^2}} (c + v) = \frac{h\nu}{c} \frac{(1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

e così il nuovo valore della frequenza sarebbe

$$\nu'_1 = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

cioè quello che si ottiene nella teoria della relatività, con considerazioni di carattere ondulatorio.

Alla (1), che possiamo scrivere sotto la forma

$$(3) \quad \bar{m}c^2 = h\bar{\nu}$$

va associata l'equazione ondulatoria

$$(4) \quad \bar{\nu}\bar{\lambda} = c$$

se indichiamo con $\bar{\lambda}$ la lunghezza d'onda delle radiazioni di frequenza $\bar{\nu}$.

Eliminando $\bar{\nu}$ tra la (3) e la (4), si ottiene

$$(5) \quad \bar{\lambda} = \frac{h}{\bar{m}c}$$

Se ammettiamo adesso che, non solo il fotone, ma ogni corpuscolo di massa m e velocità v , abbia associata un'onda di frequenza ν e lunghezza λ , è naturale scrivere, generalizzando le tre equazioni precedenti:

$$(6) \quad mv^2 = h\nu$$

$$(7) \quad \nu\lambda = v$$

$$(8) \quad \lambda = \frac{h}{mv}$$

La (8) è l'equazione di de Broglie, verificata dalle esperienze sulla diffrazione degli elettroni; sul significato fisico delle altre due equazioni, nulla per ora si può dire di preciso. Si vede però subito che se, invece della (6), scriviamo l'equazione relativistica

$$(6') \quad mc^2 = h\nu_i$$

ed eliminiamo h tra questa e la (8), si ottiene la « velocità di fase »

$$\nu_i \lambda = \frac{c^2}{v}$$

dell'onda di de Broglie e si vede pure immediatamente che

$$v = \nu_i \frac{v^2}{c^2}.$$

Fisica-Matematica. — *Alcune considerazioni sulla teoria della trasmissione del calore per convezione forzata.* Nota II ⁽¹⁾ di D. GRAFFI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

4. In una Nota precedente (alla quale rimandiamo per il significato delle notazioni e per l'ordine delle equazioni) abbiamo stabilito un teorema di unicità, dal quale segue in modo immediato il seguente *principio di sovrapposizione degli effetti*.

Si consideri, come nella Nota precedente, un tubo cilindrico percorso da un fluido in moto, tale che alla sezione di uscita sia $\mathbf{v} \times \mathbf{n} \leq 0$. Allora indichiamo con T' una soluzione della (2) della Nota precedente, che assume sulla superficie di entrata i valori T'_e , alle pareti del tubo il valore T'_p e all'inizio dei tempi al valore T'_i e indichiamo con T'' un'altra soluzione della (2), tale che assume al contorno i valori T''_e e T''_p e abbia per condizioni iniziali T''_i . Per la linearità della (2) e per il teorema di unicità sopra ricordato, l'unica soluzione della (2) che soddisfa alle condizioni iniziali $T'_i + T''_i$ e alle condizioni al contorno $T'_e + T''_e$ e $T'_p + T''_p$ non è altro che la $T' + T'' = T$. Perciò se indichiamo con Q' , Q'' , Q la quantità di calore ceduta dal tubo al fluido nello stesso intervallo di tempo nello stato rispettivamente rappresentato da T' , T'' , T , si ha:

$$Q = Q' + Q''.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1930.

In ciò consiste il principio che ci occorre considerare. Facciamone una semplice applicazione. S'immagini il tubo cilindrico come avente un piano di simmetria passante per l'asse del tubo. Supponiamo che la metà della parete del tubo che si trova da una parete del piano di simmetria sia stata portata a temperatura T'_p costante, mentre l'altra si trovi alla temperatura costante T_e di entrata del fluido. Mettendoci nel caso di regime considerato nella Nota precedente, e in modo analogo a quello seguito in tale Nota ⁽¹⁾ si può dimostrare che la quantità di calore Q' ceduta dal solido nell'unità di tempo al fluido è proporzionale alla differenza di temperatura $T'_p - T_e$, cioè:

$$Q' = \alpha' (T'_p - T_e).$$

Ora consideriamo un altro stato in cui la parete dell'altra parte del piano sia a temperatura T''_p mentre la parte prima considerata sia a temperatura T_e . Allora la corrispondente quantità di calore Q'' ceduta dal solido al fluido sarà:

$$Q'' = \alpha'' (T''_p - T_e).$$

Ma per simmetria (poichè si trascura l'influenza delle distribuzioni delle velocità alle superfici di entrata e uscita sul valore di α' e α''), si ha:

$$\alpha' = \alpha''.$$

Allora per il principio di sovrapposizione degli effetti la quantità di calore Q ceduta dal tubo al fluido, quando una sua metà si trova a temperatura T'_p e l'altra a temperatura T''_p , è data da

$$Q = \alpha' (T'_p - T_e) + \alpha' (T''_p - T_e).$$

Ora per trovare α' basta notare che se è $T'_p = T''_p = T_p$ si ritorna nel caso considerato nella Nota precedente, in cui si supponeva che la temperatura del tubo fosse uniforme. Confrontando questi due stati risulta subito:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2}.$$

Dunque si può calcolare la quantità di calore trasmesso quando il tubo si trova a temperatura non uniforme, ma con un piano di simmetria, da misure fatte quando il tubo si trova a temperatura uniforme. Evidentemente la formula trovata si può estendere facilmente al caso in cui il

(1) L'unica differenza di procedimento fra questo caso e quello della Nota precedente consiste nel cercare una $\Phi(P, t)$ nulla all'inizio dei tempi in tutto S , per ogni $t \geq 0$ su σ_e e sulla metà del tubo a temperatura T_e pure nulla e per ogni $t \geq 0$ e uguale a 1 sull'altra metà del tubo stesso.

tubo sia circolare e abbia perciò diversi piani di simmetria tali da dividerlo in parti uguali, e tali che la temperatura sia costante nella parte della parete compresa fra due di questi piani. Si trova allora con manifesto significato dei simboli:

$$Q = \frac{\alpha}{n} \sum (T_p^{(n)} - T_r).$$

Bisogna notare che queste formule ottenute ora per via rigorosa si possono ottenere con una ipotesi che si fa spesso nella tecnica, ipotesi che consiste nell'ammettere il coefficiente α proporzionale alla superficie del solido che cede calore. Tale supposizione conduce di solito a risultati abbastanza approssimati. Però è noto che in qualche caso esso conduce a divergenze coll'esperienza. E del resto è sempre utile dedurre le formule senza ipotesi arbitrarie.

5. Veniamo ora ad esporre un *teorema di reciprocità*, che si può mettere in relazione con quelli della teoria delle equazioni del tipo ellittico, ma che non ci risulta ancora applicato a questioni sulla propagazione del calore per convezione.

Consideriamo dunque una trasmissione stazionaria di calore retta dall'equazione:

$$(11) \quad \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} T) - C_p \rho \operatorname{grad} T \times \mathbf{v} = 0,$$

e supponiamo che questa equazione sia valida nello spazio S limitato dalla superficie σ . Supponiamo poi che in questo spazio si possa invertire il senso di \mathbf{v} , e sia T' un'altra distribuzione di temperatura con la \mathbf{v} invertita. Allora si ha:

$$(12) \quad \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} T') + C_p \rho \operatorname{grad} T' \times \mathbf{v} = 0.$$

Moltiplichiamo la (11) per T' , la (12) per T e sottraggiamole membro a membro. Si ottiene così:

$$T' \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} T) - T \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} T') - C_p \rho \mathbf{v} \times (T' \operatorname{grad} T + T \operatorname{grad} T') = 0.$$

Questa equazione, ricordando che $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, diventa

$$\operatorname{div}(T' \alpha \operatorname{grad} T - T \alpha \operatorname{grad} T') - C_p \rho \operatorname{div} T T' \mathbf{v} = 0.$$

Integrando questa equazione su tutto S , e applicando il teorema della divergenza, si ottiene infine

$$(13) \quad \int_{\sigma} T' \alpha \operatorname{grad} T \times \mathbf{n} d\sigma = \int_{\sigma} T \alpha \operatorname{grad} T' \times \mathbf{n} d\sigma - C_p \rho \int_{\sigma} T T' \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma,$$

che esprime il cercato *teorema di reciprocità*. Applichiamo questo teorema al caso del tubo già considerato⁽¹⁾, la (13) in questa ipotesi si semplifica. Infatti la nostra superficie σ si spezza in tre superfici: quella della parete del tubo σ_p e quella σ_e e σ_u di entrata e di uscita del fluido. Prendiamo poi per T' una temperatura costante uguale a T'_p su σ_p e nulla su σ_u , e per T una temperatura variabile su σ_p ma nulla su σ_e ⁽²⁾. Allora l'ultimo integrale del secondo membro della (13) è nullo perchè è $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ nullo su σ_p e T o T' nulli su σ_e e σ_u . Gli altri due integrali sono nulli su σ_e e σ_u perchè su di esse è nullo per ipotesi $\alpha \text{ grad } T \times \mathbf{n}$. Rimane perciò:

$$(14) \quad T'_p \int_{\sigma_p} \alpha \text{ grad } T \times \mathbf{n} d\sigma = \int_{\sigma_p} T \alpha \text{ grad } T' \times \mathbf{n} d\sigma.$$

Ora la quantità Q di calore ceduta nell'unità di tempo dal tubo al fluido nel primo stato vale appunto⁽³⁾,

$$(15) \quad Q = - \int_{\sigma_p} \alpha \text{ grad } T \times \mathbf{n} d\sigma.$$

Perciò si ha la formula:

$$(16) \quad Q = - \frac{1}{T'_p} \int_{\sigma_p} T \alpha \text{ grad } T' \times \mathbf{n} d\sigma.$$

Mediante questa espressione dal caso in cui la temperatura T sia costante sulla parete del tubo, si può calcolare la quantità di calore trasmessa dal tubo al fluido nel caso in cui la temperatura del tubo sia variabile.

Però questo teorema è subordinato all'ipotesi che la trasmissione sia stazionaria. Ora ciò è possibile quando il fluido si muove con moto di Pouiseuille; ma nel caso che il fluido si muova di moto turbolento non è più ammissibile che sia stazionaria la trasmissione del calore. Difatti, se fosse T indipendente dal tempo, si potrebbe scrivere la (2) nella forma:

$$\text{div} (\alpha \text{ grad } T) - C_p \rho \text{ grad } T \times \mathbf{v} = 0;$$

dalla quale equazione, poichè \mathbf{v} dipende dal tempo (per la turbolenza del

(1) È da notare che nel caso del tubo si può fisicamente invertire il segno della \mathbf{v} e quindi è applicabile la (13).

(2) L'ipotesi che su σ_e sia nulla la T_e non costituisce alcuna restrizione, perchè possiamo scegliere lo zero del termometro in modo arbitrario. Si noti poi che la σ_u rappresenta la sezione di entrata per lo stato rappresentato dalla T' che perciò può avere un valore arbitrario su σ_u .

(3) Si ricordi che $\alpha \text{ grad } T \times \mathbf{n}$ vale $k \text{ grad } T \times \mathbf{n}$, perchè \mathbf{n} è normale all'asse χ .

moto), deve necessariamente dipenderlo anche T ; cioè la trasmissione non può essere stazionaria. In questa ipotesi la (16) non sarebbe più valida e in essa si dovrebbe aggiungere un altro termine uguale a

$$C_p S \frac{1}{T'} \int \left(T \frac{\partial T}{\partial t} - T' \frac{\partial T}{\partial t} \right) dS,$$

il quale però deve essere almeno per i gas molto piccolo. Ciò, si può giustificare osservando che Latzko ha trattato il problema della trasmissione del calore in un fluido in moto turbolento con risultato in buon accordo con l'esperienza partendo appunto dalla (12) (e ponendo per α un valore opportuno) di cui la (16) è conseguenza. Si può perciò ammettere la (16) valida almeno per i gas nel caso del moto turbolento. Con essa si può dunque trovare teoricamente il valore di Q ponendo per la T' la soluzione di Latzko.

Ma in qualche caso si può applicare la (2) usando solo dati sperimentali. Si supponga che diviso il tubo in n pezzi mediante piani normali a suo asse e su questi pezzi la T_p sia costante è uguale a $T_p^{(r)}$. Allora la (16) dà:

$$(17) \quad Q = - \frac{\sum_1^n T_p^{(r)} \int_{\sigma_{pr}} \alpha \operatorname{grad} T' \times n d\sigma}{T_p'} = \frac{\sum T_p^{(r)} Q'^{(r)}}{T_p'},$$

essendo $Q'^{(r)}$ la quantità di calore ceduta dal tubo al fluido nel tratto resimo quando la temperatura del tubo è $T_p^{(r)}$. Ora le esperienze nel caso che la temperatura alla parete sia costante ci permettono di calcolare le $Q'^{(r)}$ e la formula (17) ci dà il modo di trovare così la quantità calore ceduta dal tubo al fluido nel caso più generale ora considerato ⁽²⁾.

In queste Note abbiamo considerato particolarmente il caso del tubo, data anche la sua importanza tecnica; ma evidentemente questi risultati si possono trasportare in altre questioni sulla convezione del calore, specialmente al caso di un corpo raffreddato da una corrente fluida.

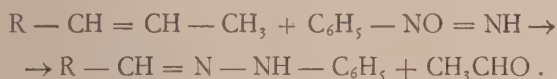
(1) Si ricordi però a corrente invertita.

(2) Si noti che il teorema di reciprocità potrebbe applicarsi anche al caso che la temperatura del fluido sia variabile nella sezione di entrata, e si otterrebbe facilmente la espressione della quantità di calore ceduta dal tubo a fluido.

Chimica. — *Sull'ossidazione dei derivati propenilici con i diazo-composti*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di A. QUILICO, presentata dal Socio G. Bruni.

Uno degli esempi più tipici dell'azione ossidante dei diazoidrati normali, è senza dubbio l'ossidazione dei composti propenilici, da me constatata in collaborazione con M. Freri sin dal 1928⁽³⁾, per gli eteri fenolici del tipo dell'anetolo, ed estesa in seguito ai fenoli⁽⁴⁾ ed alle ammine propeniliche⁽⁵⁾.

Come fu allora accennato, tra sali di diazonio (o meglio, tra i diazoidrati normali che da essi si originano per alcoolisi e successiva trasposizione dell'idrato di diazonio) ed i composti propenilici, in ambiente alcoolico od acetico glaciale, ha luogo un processo che ha per conseguenza la rottura della catena laterale in corrispondenza del doppio legame, e porta alla formazione del fenilidrazone dell'aldeide aromatica, secondo lo schema:



La reazione è in realtà più complessa, poichè si nota quasi sempre la formazione di un prodotto secondario azotato che appare in quantità variabili a seconda del derivato propenilico impiegato e delle condizioni d'esperienza.

Mi sono allora astenuto dal dare una teoria della reazione, in attesa di essere in possesso di nuovi dati sperimentali e di chiarire la struttura del prodotto secondario, limitandomi ad osservare come la reazione apparisse come una ossidazione del composto propenilico, con conseguente riduzione del diazo.

L'illustre prof. Angeli ha recentemente dato una elegante interpretazione di questo processo⁽⁶⁾, basata sull'analogia che esso presenta con l'ossidazione che conduce alle aldeidi:



(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1930.

(3) A. QUILICO e M. FRERI, «Gazz. Chim. It.», 58, 1°, 380 (1928).

(4) A. QUILICO e E. FLEISCHNER, «Gazz. Chim. It.», 59, 1°, p. 39 (1929); A. QUILICO e M. FRERI, *ibid.*, 2°, p. 600 (1929).

(5) A. QUILICO e M. FRERI, «Gazz. Chim. It.», 60, 2°, p. 606 (1930).

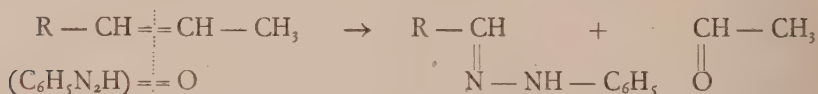
(6) A. ANGELI e A. POLVERINI, «R. A. L.», serie 6°, XI, 1° sem., p. 542 (1930).

con la reazione provocata in particolari condizioni dall'acido nitroso ⁽¹⁾:



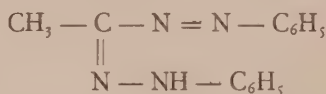
alle quali possiamo anche aggiungere l'ossidazione ad aldeidi aromatiche per opera del nitrosobenzolo, osservata in qualche caso da L. Alessandri ⁽²⁾.

Secondo questo modo di vedere, la formazione del fenilidrazone avverrebbe secondo lo schema:

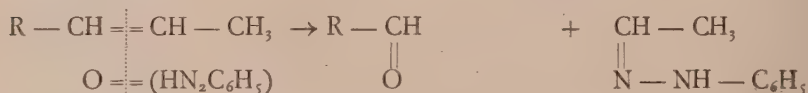
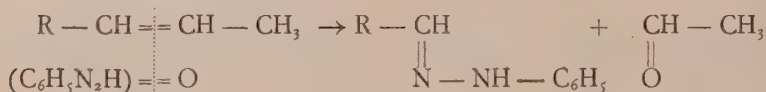


in tutto paragonabile a quello delle precedenti reazioni.

Avendo ripreso lo studio di questa interessante reazione, sono lieto di riconoscere che tale interpretazione è, non solo perfettamente verosimile, ma permette altresì di spiegare elegantemente altri fatti sperimentali di cui sono venuto recentemente in possesso. Questi sono: la formazione del prodotto secondario, per il quale ho dimostrato la provenienza dalla catena laterale del composto propenilico e la struttura di derivato formazilico ⁽³⁾:



e la presenza, nel liquido di reazione, di notevoli quantità di aldeide aromatica *libera*. Se, conservando lo schema di Angeli, ammettiamo che la reazione possa procedere nei due modi paralleli:



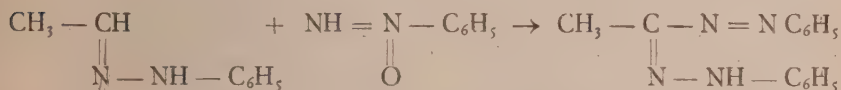
appare evidente che accanto al fenilidrazone dell'aldeide aromatica ed all'al-

(1) R. FABINY, « Zeitschr. Physik. Chem. », 12, p. 5 (1893).

(2) « Gazz. Chim. It. », 51, 2°, p. 129 (1921).

(3) « Gazz. Chim. It. », 60, 2°, p. 606 (1930). In realtà, avendo impiegato nelle esperienze il diazo di p-nitroanilina, il composto secondario p. f. 228° è il p-nitrometilformazile, ciò che non cambia nulla a quanto è qui riferito.

deide acetica⁽¹⁾ si potranno trovare l'aldeide aromatica e il fenilidrazone dell'acetaldeide. Quest'ultimo non appare in realtà tra i prodotti finali, ed in sua vece si ritrova il derivato formazilico, formatosi evidentemente in seguito ad un processo di copulazione con il diazo ancora presente:



modo di formazione che è il normale per queste sostanze, e che mi ha anzi permesso di prepararlo per sintesi⁽²⁾.

Questo comportamento era in parte a prevedersi, per le analogie che frequentemente si notano nelle reazioni dei composti contenenti gli aggrupamenti:



Come nell'ossidazione degli azocomposti col classico metodo di Angeli, i derivati asimmetrici conducono quasi sempre ad una miscela dei due isomeri⁽³⁾.



così, nell'ossidazione dei composti propenilici, l'ossigeno può portarsi sull'uno o sull'altro dei carboni uniti dal doppio legame.

Il preponderare dell'uno o dell'altro dei due processi paralleli, può dipendere (come nel caso dell'ossidazione degli azocomposti) dalla natura e dalla posizione dei sostituenti esistenti nel composto propenilico, oltre che dalle condizioni di esperienza, e ciò può spiegare come ad es. l'anetolo dia delle rese di oltre l'80% in fenilidrazone dell'aldeide anisica e quantità relativamente piccole di derivato formazilico, mentre l'ocanolo dia solo il 25% di fenilidrazone, e la p-propenildimetilanilina non dia tracce di derivato formazilico.

Da ragioni steriche può poi dipendere il fatto da me constatato, che gli acidi cinnamico, p-metossicinnamico, piperico ed i loro eteri, lo stilbene ed il p-metossistilbene, l'alcool cinnamico, ecc., non vengano attaccati dai diazodirati, almeno nelle condizioni da me sperimentate.

(1) Faccio presente che l'identificazione dell'aldeide acetica tra i prodotti di reazione non fu mai da me nemmeno tentata, data la volatilità di questa sostanza, e per il fatto che, operando in ambiente alcoolico, essa non avrebbe avuto alcun valore probativo.

(2) E. BAMBERGER, «Ber.», 36, p. 87 (1903).

(3) A. ANGELI, «Gazz. Chim. It.», 46, 2°, p. 76 (1916).

PARTE SPERIMENTALE.

Identificazione dell'aldeide anisica libera tra i prodotti di reazione tra anetolo e diazo di p-nitroanilina. — Ad una sospensione alcoolica (100 cm³) del solfato di p-nitrobenzendiazonio cristallizzato, ottenuto nel modo più volte descritto da gr. 3.0 (poco più di 2/100 di gr.mol.) di p-nitroanilina, mantenuta in continua agitazione e raffreddata con ghiaccio, si aggiungono gr. 3.3 (2/100 di gr.mol.) di anetolo sciolto in poco alcool. Si ha subito colorazione rossa e formazione del fenilidrazone dell'aldeide anisica. Il giorno dopo si filtra alla pompa la polvere rossa formatasi, che è una miscela di p-nitrofenilidrazone dell'aldeide anisica e p-nitrometilformazile; allo stato secco, pesava grammi 4.0. Il liquido alcoolico rosso filtrato, che misurava circa 100 cm³, venne diviso in tre porzioni eguali.

La prima porzione, lasciata spontaneamente evaporare all'aria, diede solo tracce di fenilidrazone, e lasciò un residuo acquoso contenente gocce oleose colorate in rossastro e odoranti di aldeide anisica e nitrobenzolo. Neuttralizzato esattamente con Na₂CO₃ e sottoposto a distillazione in vapore fornì un distillato contenente gocce oleose di aldeide anisica, identificata come p-nitrofenilidrazone p. f. 161°.

La seconda porzione, venne addizionata di gr. 0.8 di p-nitrofenilidrazina sciolta in poco acido acetico; dopo qualche minuto il liquido si intorbido e si iniziò la separazione di un abbondante precipitato rosso cristallino del p-nitrofenilidrazone dell'aldeide anisica; allo stato secco pesava gr. 0.35, e ricristallizzato dall'alcool fondeva a 161° anche in miscela.

La terza porzione, viene addizionata di gr. 0.8 di o-p-dinitrofenilidrazina, sciolta a caldo nel minimo di acido acetico glaciale: si ebbe subito abbondante precipitazione del caratteristico dinitrofenilidrazone rosso minio dell'aldeide anisica, che allo stato grezzo pesava gr. 0.4. Ricristallizzato da benzolo si ottenne in aghetti rosso sangue, p. f. 243°, identici a quelli da me altre volte ottenuti ⁽¹⁾. Le stesse prove, eseguite sul liquido filtrato della reazione tra isosafrolo e diazo di p-nitroanilina, diedero risultati positivi per la presenza di piperonalio.

(1) « Gazz. Chim. It. », 58, 2°, p. 388 (1928).

Fisiologia. — *Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia. Escisione totale o parziale e funzioni sessuali* ⁽¹⁾. Nota II ⁽²⁾ di CLARA FORTI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Per stabilire le conseguenze della escisione del fascio vascolo nervoso ovarico e di quello uterino e della escisione limitata al primo sulle funzioni sessuali ho seguito il ciclo estrale di animali sottoposti all'uno o all'altro intervento (ratti e cani), e di animali tenuti per controllo nelle stesse condizioni di temperatura ed alimentati nello stesso modo. Per i ratti ho studiato pure se dopo l'intervento si potesse avere ancora l'accoppiamento e la fecondazione.

Heape (3) ha indicato col nome di ciclo estrale la serie delle modificazioni che si producono negli organi genitali delle femmine dei mammiferi. Tanto nel ratto come nel cane si distinguono quattro periodi: il diestro, o periodo di riposo caratterizzato dall'assenza di corpi lutei attivi e di follicoli maturi; il proestro o fase di proliferazione, durante il quale i follicoli finiscono il loro accrescimento, la tuba e l'utero si congestionano, si attivano i processi di proliferazione cellulare della vagina; l'estro o periodo del calore durante il quale i follicoli sono maturi e si rompono, la mucosa uterina presenta congestione intensa e ghiandole in intensa attività secretoria (i prodotti della secrezione sarebbero destinati, secondo Gerlinger (4), (5) a servire alla nutrizione degli elementi seminali mentre percorrono il tratto genitale); il metaestro che rappresenta la fase di regresso dei fenomeni estrali, nel cane durante questa fase o fase luteinica di Gerlinger si distinguerebbero, secondo questo autore, un periodo anabolico o di formazione, ed uno catabolico o di distruzione; durante il primo i corpi gialli si sviluppano, le ghiandole uterine si allungano, si ipertrofizzano, l'epitelio uterino subisce una trasformazione lipoidea, si forma una specie di embriotrofo grassoso, che nel secondo periodo durante la regressione dei corpi gialli, si elimina sotto forma di un flusso biancastro, la mucosa in parte eliminata si ripara a spese delle ghiandole uterine. Questi quattro periodi fondamentali in cui si suddivide il ciclo sessuale si possono facilmente seguire esaminando al microscopio le cellule di sfaldamento e le cellule migranti del secreto che si può raccogliere dalla vagina, facendo scorrere leggermente sulla parete di questa una piccola spatola. Nel ratto e nella cavia nel periodo di riposo predominano i leucociti, tuttavia si suole riscontrare anche qualche cellula epiteliale; il proestro è caratterizzato dalla presenza di numerose cellule epiteliali e di qualche cellula cornea; i leucociti durante questo periodo possono trovarsi, ma per lo più non sono molto numerosi; durante l'estro prevalgono le cellule cornee che formano veri conglomerati, i leucociti per lo più in questo periodo mancano; nel metaestro le cellule cornee diminuiscono e in tutti i campi microscopici prevalgono i leucociti. Nel ratto tutto il ciclo avrebbe, secondo

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1930.

(3) HEAPE, cit. in GERLINGER, *Le cycle œstrien de l'utérus*, ecc.

(4) GERLINGER, *Le cycle œstrien de l'utérus chez la chienne*, ecc., « Compt. Rend. d. S. de la Soc. de Biol. », 89, 1923, p. 193.

(5) ID., *Le cycle sexuel chez la femelle des mammifères*, ecc. Éditions du Strasbourg méd., 1925.

Long ed Evans (1), una durata di poco più di cinque giorni, l'estro durerebbe dalle ventisette alle trentatre ore; secondo Loewe il ciclo estrale si svolgerebbe in modo assai vario e varierebbe perfino nello stesso soggetto da una volta all'altra; anche Carminati (2) ritiene che non abbia il carattere netto di periodicità osservato da Long ed Evans.

Guttmacher (1926) (3) ha osservato che i corpuscoli bianchi che si trovano nel secreto vaginale del ratto durante il proestro sono mobili, ma solo in piccola parte hanno movimenti attivi come i leucociti del sangue, per lo più i loro movimenti sono lenti e limitati, talvolta hanno solo movimenti molecolari. Secondo l'A. il grado di mobilità sarebbe in diretto rapporto col ciclo, coll'avanzare di questo aumenterebbe il numero dei leucociti morti. Nei ratti castrati invece il comportamento dei leucociti è costante in tutti i periodi, quelli vivi rappresenterebbero sempre dal 14 al 56 % di tutte le cellule, quelli morti dal 42 all'85 %. Anche io (1929) (4) ho potuto osservare di tanto in tanto in qualche preparato di secreto vaginale la presenza di leucociti che conservavano lenti movimenti ameboidi.

Nel cane secondo Evans, Herbert, e Harold Cole (5) il proestro durerebbe otto-dieci giorni e sarebbe caratterizzato dalla presenza negli strisci del secreto vaginale di grandi cellule epiteliali; nei primi tre giorni accanto ad esse si troverebbero anche leucociti, negli altri tre o quattro solo le cellule. Durante l'estro (7-10 giorni) si trovano cellule cornee ed eritrociti, durante il metaestro (30-40 giorni) grande quantità di leucociti e piccole cellule epiteliali. Il periodo di riposo ha nel cane una durata assai lunga, sicchè si avrebbero solo uno o due periodi di estro all'anno (Gerlinger).

La tecnica operatoria fu la seguente: nel ratto incidevo la parete dell'addome subito al di sopra delle due mammelle addominali anteriori, con un taglio trasversale lungo circa tre centimetri, spostavo in alto le anse intestinali, e identificate le corna dell'utero le seguivo fino alle tube e all'ovaia; prendendo delicatamente fra le pinze la tuba e allontanando le anse intestinali è facile vedere il fascio vascolare ovarico, nello spessore del legamento infundibolo pelvico, e poichè è noto che insieme coi vasi decorrono i nervi per interrompere in modo presumibilmente durevole la continuità degli uni e degli altri sezionavo il fascio vascolo nervoso quanto più potevo vicino alla parete posteriore dell'addome e all'aorta, presi poi tra le pinze il legamento infundibolo pelvico ed il tratto del meso uterino immediatamente vicino ad esso così recisi in alto, li asportavo quasi completamente, separandoli dalla parte del mesenterio uterino più vicina al corpo dell'utero, e sezionandoli distalmente in prossimità dell'ilo dell'ovaia; in un solo ratto la escisione fu limitata solo ad un breve tratto dei vasi e dei nervi

(1) LONG ed EVANS, *Characteristic effects upon growth, oestrus a. ovulation induced by the intraperitoneal adminisr. of fresh anterior hypoph. substance*, «Proc. of the nat. Acad. of Sciences», vol. VIII, p. 38, 1922 e «Anat. Record», vol. XXIII, p. 19, 1922.

(2) CARMINATI, *Osservazioni sull'azione degli ormoni sessuali nei ratti, ecc.*, «Endocrinologia e Patol. Constituz.», vol. II, fasc. IV, 1927.

(3) GUTTMACHER, *Studies on supra-vitally stained living a. dead leucocytes and epithelial cells in the vagina of the rat, ecc* «Bull. of the Johns Hopkins Hosp.», 38, 1926.

(4) FORTI, *Sull'innervazione dell'ovario*. «Boll. della Soc. Ital. di Biol. Speriment.», vol. IV, 1929, p. 256.

(5) EVANS, HERBERT, HAROLD COLE, *The oestrous cycle in the dog. - I. The vaginal smear*. «Cornell Veterinarian», 18, 1928, p. 352.

in vicinanza dell'ilo. Nei ratti che volevo sottoporre all'asportazione totale del fascio vascolo nervoso ovarico e di quello uterino, dopo aver asportato il legamento infundibolo pelvico, toglievo con cura tutto il tessuto connettivo ed adiposo che circonda l'ovaia e la tuba, e praticavo la escissione anche del mesenterio delle corna dell'utero, asportando per circa un centimetro di lunghezza il tessuto connettivo ed il fascio nerveo vascolare immediatamente addossati alla estremità tubarica delle corna ed al primo tratto della tuba.

Nel cane raggiunsi le ovaia praticando due tagli longitudinali lunghi circa otto centimetri sulle pareti laterali dell'addome, immediatamente al di sotto dell'arcata costale. Per facilitare la ricerca dell'ovaia è opportuno disporre l'animale sul tavolo operatorio in posizione supina con gli arti del lato opposto a quello su cui si deve intervenire leggermente flessi, sì che il corpo dell'animale rimanga inclinato da tale lato; il pacchetto addominale tende così a spostarsi verso la parte opposta a quella su cui si opera. Anche nel cane è facile riconoscere il fascio nerveo-vascolare utero-ovarico che decorre nello spessore del legamento infundibolo pelvico, e quello uterino immediatamente a ridosso delle corna dell'utero, legarli ed esciderli; più difficile è negli animali provvisti di abbondante panicolo adiposo identificare l'ovaia; la plica del legamento largo che la racchiude contiene infatti talvolta tanto tessuto adiposo che la presenza dell'organo nel suo spessore si può accertare soltanto colla palpazione. Nei cani operati di escisione completa di tutti i vasi e nervi che si portano all'ovaia, asportai pure il tessuto connettivo ed adiposo che circonda l'organo, lasciando integro solo il legamento tubo-ovarico.

Gli animali che meglio si sono prestati per le ricerche sono stati i ratti. Molto resistenti all'operazione, hanno un ciclo sessuale breve che si può facilmente seguire con l'esame microscopico dei preparati del secreto vaginale, esame che dà reperti molto netti; si adattano bene a vivere in laboratorio per cui le ricerche sulle loro funzioni sessuali e sul loro ricambio materiale si eseguono con la certezza di adoprare animali che si trovano in buone condizioni. Nei cani invece il ciclo ha una durata assai lunga, ed il riconoscimento dei vari periodi mediante l'esame microscopico del secreto vaginale non è così facile come per i roditori. Ho già indicato in una Nota precedente ⁽¹⁾ come anche le cavie non si prestino così bene come i ratti per questo genere di ricerche, sia perchè hanno un ciclo sessuale più lungo, sia perchè sono meno resistenti all'atto operatorio ed alle condizioni sfavorevoli di ambiente che possono trovare in laboratorio.

Il ciclo sessuale fu seguito nei ratti prima e dopo l'intervento; anzi di un gruppo di ratti apparentemente normali dei quali avevo eseguito per un certo tempo l'esame del secreto vaginale, scelsi quelli con ciclo più regolare per sottoporli all'operazione o per tenerli come controllo.

(1) Loc. cit.

È nota l'importanza che hanno l'alimentazione (Evans e Bishop, 1922-23) ⁽¹⁾ e la temperatura dell'ambiente per l'attività sessuale del ratto; si ha in genere una interruzione della riproduzione dal novembre al gennaio, se non si ha la precauzione di tenere gli animali in camere piuttosto fredde durante l'autunno ed opportunamente riscaldate durante l'inverno (Przibram, 1923) ⁽²⁾. I ratti su cui eseguii le ricerche furono alimentati sempre con pane e cavolo a volontà, nei mesi più freddi aggiunti alla dieta un po' di formaggio; su alcuni di essi iniziai gli esperimenti appunto in novembre-dicembre; erano stati nell'autunno in una delle stanze più fredde del laboratorio, alla fine di novembre furono portati in una camera tenuta a circa 18° C; in queste condizioni anche in dicembre e gennaio su nove posti in osservazione cinque avevano un ciclo sessuale sufficientemente regolare, della durata cioè di cinque-sette giorni, e con un estro caratterizzato dalla presenza di sole e numerose cellule cornee. Negli altri quattro ratti il reperto degli strisci del secreto vaginale si allontanava notevolmente dal normale, e precisamente in due di essi i singoli cicli avevano durata variabile e nei periodi di estro non di rado si vedevano accanto alle cellule cornee, cellule epiteliali, che in uno erano perfino più numerose delle prime; in un terzo i singoli cicli erano normali per durata, ma i leucociti nel secreto vaginale mancavano del tutto o erano scarsissimi in tutti i periodi, anche in questo animale talvolta durante l'estro le cellule epiteliali erano più numerose delle cornee. Nell'ultimo infine il ciclo completamente irregolare nei mesi di dicembre e gennaio, durante i quali si osservarono tuttavia oscillazioni periodiche sebbene a periodi di diversa durata dei rapporti fra i leucociti e le cellule epiteliali e cornee insieme considerate (quest'ultime furono sempre assai scarse e non rappresentarono mai gli elementi cellulari esclusivi dei preparati), il ciclo si regolarizzò nel mese di marzo, tanto che il ratto fu sottoposto all'operazione. Tale regolarizzazione potrebbe dipendere dall'essere l'animale divenuto più adulto (il suo peso era in dicembre di gr. 160, in marzo di gr. 170), ma ritengo che se ne debba piuttosto ricercare la causa nell'aumento della temperatura ambiente; infatti durante l'estate, a 25-28° C, di cinque ratti normali tenuti in osservazione, quattro pur essendo giovanissimi (del peso di 130 a 138 gr.) avevano un ciclo perfettamente regolare della durata di quattro giorni; anche in uno degli animali operati il cui ciclo si era mantenuto normale, si osservò un riavvicinamento dei periodi di estro in piena estate. A temperature più elevate si avrebbe dunque non solo una maggiore regolarità del ciclo, ma anche un aumento dell'attività sessuale.

Dall'esame degli strisci del secreto vaginale dei ratti operati risultò che la escisione dei vasi e nervi ovarici non disturba notevolmente né in

(1) EVANS e BISHOP, *On the existence of a hitherto unrecognized dietary factor essential for reproduction*, «Science N. S.» vol. 56, no. 1458, december 1922.

(2) PRZIBRAM, *Temperatur u. Temperaturen in Tierriche*, «Beiträg. z. einer quantitativen Biol.», XXI-XXX, Leipzig u. Wien 1923.

primo tempo, nè qualche mese dopo che è stata praticata il ciclo sessuale. Specialmente a distanza dall'operazione osservai però un aumento del numero dei leucociti e della frequenza con cui essi si trovavano nei preparati. In uno dei ratti operato di escissione solo di un breve tratto dei vasi e nervi ovarici undici mesi dopo l'intervento i periodi di estro erano distanziati di circa nove giorni; all'autopsia eseguita due mesi dopo trovai in corrispondenza della tuba immediatamente al di sotto dell'ovaia sinistra una vecchia raccolta purulenta di grandi dimensioni, che verosimilmente ostacolava l'affluire del sangue (portato probabilmente all'organo, dopo l'operazione, soprattutto dall'arteria uterina), sopprimendo o limitando assai le funzioni dell'ovaia sinistra che appariva infatti palida, più piccola e di minore peso della destra.

La escissione dei vasi e nervi ovarici ed uterini provocò invece gravi alterazioni delle funzioni sessuali. Già pochi giorni dopo l'intervento il ciclo scomparve completamente: in primo tempo aumentarono ancora di tanto in tanto nei preparati le cellule cornee, ma qualche mese dopo l'operazione non comparvero più affatto o solo eccezionalmente. Anche le cellule epiteliali man mano che ci si allontanò dall'epoca dell'operazione andarono diminuendo, fino ad essere sempre scarsissime e perfino a mancare completamente nella maggior parte dei preparati qualche mese dopo l'intervento, come accadde appunto in uno degli animali.

I ratti operati furono ripetutamente posti nella stessa gabbia con maschi validi provati ogni volta con ratti normali. Negli animali operati di escissione dei soli vasi e nervi ovarici sia pochi giorni dopo l'atto operatorio, sia a distanza di mesi, osservai tutte le volte la caratteristica formazione del tampone vaginale, che, come è noto, sta ad indicare l'avvenuto accoppiamento; la presenza del tampone si aveva sempre nel giorno corrispondente all'estro anche se il ratto era stato posto col maschio nei giorni precedenti. In uno di essi si ebbe anche 5 mesi dopo l'operazione una gravidanza che terminò col parto di un feto a termine, ma nato morto. I ratti operati di escissione totale dei vasi e nervi ovarici e di quelli uterini, posti ripetutamente con maschi validi da 35 giorni dopo l'intervento in poi, non mostrarono mai tampone vaginale; dato che l'accoppiamento avviene nel periodo dell'estro nessuna meraviglia che non avvenisse in questi animali, in cui tale periodo mancava completamente.

Nel cane è molto più difficile seguire il ciclo sessuale, sia per la maggiore difficoltà di interpretazione dei preparati eseguiti col secreto vaginale, sia per il lungo protrarsi del periodo di riposo. Le cagne sottoposte all'esperimento furono tre e più precisamente due nate in laboratorio nello stesso giorno e la madre. In quest'ultima osservai, prima dell'intervento, un periodo tipico di attività sessuale che s'iniziò alla fine di marzo, con un proestro caratterizzato dalla presenza di numerose cellule epiteliali, e leucociti scarsi, ed in alcuni giorni completamente assenti, ed un estro caratterizzato dalla

presenza di emazie e di cellule cornee, vi erano però anche cellule epiteliali e qualche leucocita. In un'altra delle cagne seguendo il ciclo sessuale prima dell'operazione dalla fine di dicembre alla fine di marzo non si rinvenne mai all'esame dei preparati del secreto vaginale il reperto caratteristico dei periodi di attività sessuale. Nell'altra che era stata operata a tre mesi e mezzo di età di escisione del fascio vascolo-nervoso ovarico, guarita per prima intenzione, si ebbe ancora otto mesi dopo l'intervento un periodo di attività sessuale; nei preparati del pro-estro e dell'estro però oltre alle cellule caratteristiche per questi periodi vi era qualche leucocita, e durante l'estro oltre ad emazie, a numerose cellule cornee, e a qualche leucocita, si vedevano numerose cellule epiteliali. Inoltre nei periodi di riposo comparivano non di rado saltuariamente per un giorno o due, emazie, senza che gli elementi presenti nei giorni precedenti e successivi, ed anche le altre cellule dello stesso preparato permettessero di stabilire l'esistenza di un periodo di attività sessuale.

Da tutto quello che abbiamo esposto risulta che la escisione dei vasi e nervi ovarici non disturba il succedersi dei vari periodi del ciclo anche molti mesi dopo l'atto operatorio; continuano infatti a presentarsi periodi di estro durante i quali l'animale accetta l'accoppiamento, in un ratto si ebbe anche gravidanza; forse se si giungesse ad eseguire l'operazione in modo da non disturbare i rapporti tra l'ovario e la tuba e da non alterare troppo i mezzi di fissità degli organi sessuali si potrebbe ottenere qualche gravidanza normale. La escisione del fascio vascolo nervoso ovarico e di quello uterino, fa risentire invece immediatamente e gravemente i suoi effetti sulle funzioni sessuali; l'ovaia abbandonata nella cavità addominale non trova facilmente il modo di essere alimentata da vasi neoformati. Degno di nota è l'aumento dei leucociti che si ha per deficienza della funzione ovarica, fino ad arrivare alla presenza esclusiva di queste cellule nel secreto vaginale per la mancanza di tale funzione, ed il fatto che l'animale più non accetta l'accoppiamento quando vengono a mancare i tipici periodi di estro.

CONCLUSIONI: I. — La escisione dei vasi ovarici e dei nervi non disturba notevolmente, anche molti mesi dopo l'intervento, il ciclo sessuale; nei ratti operati può aversi ancora accoppiamento, che però in un solo caso fu seguito da gravidanza terminata con aborto.

II. — La escisione del fascio vascolo-nervoso ovarico e di quello uterino provoca alterazioni gravi e persistenti delle funzioni sessuali. Il ciclo scompare già pochi giorni dopo l'intervento; negli strisci del secreto vaginale del ratto vanno gradualmente diminuendo prima le cellule cornee, poi anche quelle epiteliali, ed infine si ha lo stesso reperto osservato dagli AA. negli animali castrati. I ratti sottoposti da più di un mese ad un intervento così radicale non accettano più accoppiamento.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 novembre 1930 (Anno IX)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Osservazioni complementari sulla mia Nota ⁽¹⁾: « Metodo generale per l'analisi delle periodicità nei diagrammi statistici e sperimentali ».* Nota ⁽²⁾ del Corrisp. F. VERCELLI.

Il metodo descritto nella precedente Nota mira a selezionare un elemento, o un ristretto gruppo di elementi aventi periodi prossimi, eliminando i componenti periodici con periodi maggiori o minori. La via seguita per giungere a tale risultato consiste nel sostituire alla successione dei valori numerici delle ordinate una nuova successione, dedotta dalla prima mediante opportune operazioni. Sotto tale punto di vista il metodo ha piena analogia coi procedimenti descritti in precedenti lavori e con quelli usati da altri autori, ricordati nella Nota stessa. Il criterio speciale di adottare combinazioni lineari e simmetriche è identico nella sostanza, se non nella forma, con quello a cui mi ero attenuto nel lavoro del 1928: *Cimanalisi e applicazioni*.

La parte nuova del metodo consiste essenzialmente nel modo diverso con cui sono determinati i coefficienti della combinazione lineare che si vuole adottare. Invece di giungere a tali coefficienti scegliendo le operazioni da compiere sulle ordinate e sulle residuazioni successive col criterio ristretto seguito nel 1928, si pone direttamente il gruppo di operazioni da compiere

(1) Pubblicata in questi « Rendiconti », vol. XI, serie 6, pp. 638-641.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1930.

sotto forma di combinazione lineare e si determinano i coefficienti imponendo la condizione che il fattore di amplificazione assuma dati valori, per esempio si annulli, in corrispondenza di un certo numero di elementi periodici.

Nella nota in esame, p. 640, è esplicitamente riconosciuta la priorità del sig. H. Labrouste nell'aver fatto passaggio dalla considerazione di particolari gruppi di combinazioni fra le ordinate, quali sono proposti dagli autori precedenti, allo sviluppo di una teoria elegante e del tutto generale, nella quale sono esaminate tutte le possibili forme di combinazioni semplici, o complesse, o ripetute, e sono anche esaminati gli aspetti tipici dei corrispondenti fattori di amplificazione.

Un più accurato esame del contributo importante recato dal sig. Labrouste in questo campo di ricerche porta a riconoscere che già nel 1927 egli aveva dato le prime notizie sulle direttive sviluppate poi diffusamente nella Memoria del 1929 ⁽¹⁾ e che tutti questi lavori preludono alla pubblicazione di tavole numeriche estese, nelle quali saranno dati i fattori numerici corrispondenti a svariati sistemi di combinazioni, per rendere agevole e rapida l'esecuzione delle analisi.

Il metodo sviluppato dal Labrouste nella Memoria del 1929, di cui è fatto cenno alla fine della mia Nota, non è che uno dei procedimenti speciali a cui la teoria generale può dare origine. Tale metodo ha il grande vantaggio di portare alla selezione di un elemento, separandolo, con un solo gruppo di operazioni, dai componenti di periodo più breve, compresi quelli molto prossimi. Da un saggio di applicazioni, illustrato in una recente Nota ⁽²⁾, risulterebbe che anche nel caso di elementi componenti ad ampiezza variabile le operazioni possono essere stabilite in modo da selezionare, senza soverchie perturbazioni, tali elementi.

A p. 194 della Memoria del Labrouste si trova poi la seguente frase: « On peut réaliser des formules du type ΣKY ($Y = y_m + y'_m$) en se donnant à l'avance des combinaisons simples à utiliser et en disposant des coefficients K pour que α (fattore di amplificazione) jouisse de propriétés données, par exemple s'annule ou prenne une valeur déterminée pour certaines périodes particulières ».

Con queste parole il sig. Labrouste ha chiaramente indicato un procedimento per la determinazione dei coefficienti sostanzialmente identico a quello seguito nella mia Nota. Ritengo quindi debito di correttezza dichiarare che la priorità dell'idea generale che ha consentito il passaggio dai procedimenti limitati, prima proposti, a quelli più generali sviluppati in seguito, spetta al sig. Labrouste.

(1) H. LABROUSTE, « Comptes-rendus de l'Acad. des Sciences », Paris, t. 184, p. 259; « Public. du Bureau Central séismologique intern., Série A », fasc. 6, pp. 63-70; « Annales de l'Institut de Physique du globe », Paris, t. VII, pp. 190-207.

(2) H. LABROUSTE, *Relation entre certaines composantes périodiques de l'activité solaire et de l'amplitude diurne de la déclinaison magnétique*. « Comptes-rendus », Paris, 1930.

Meccanica. — *Les transformations canoniques de glissement et leur application à l'optique géométrique.* Nota⁽¹⁾ del Socio Straniero C. CARATHÉODORY.

1. La simple inspection des formules classiques des transformations canoniques de la mécanique permet d'en faire l'étude géométrique sous une forme différente de celle dont on se sert d'ordinaire. Les résultats auxquels on parvient de cette manière, présentent un certain intérêt pour l'optique géométrique et le calcul des instruments, et je me permets d'y attirer l'attention malgré le caractère élémentaire des raisonnements.

Les coordonnées dans un espace à $(n + 1)$ dimensions étant désignées par (t, x_1, \dots, x_n) nous y considérerons des problèmes du calcul des variations de la forme

$$(1.1) \quad \int L(t, x_i, \dot{x}_i) dt \quad \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \right).$$

On sait que dans le cas où l'inégalité

$$(1.2) \quad |L_{\dot{x}_i \dot{x}_j}| \neq 0$$

est vérifiée il y a avantage à introduire à la place des \dot{x}_i et de la fonction $L(t, x_i, \dot{x}_i)$ les variables canoniques y_i et la fonction de Hamilton $H(t, x_i, y_i)$ au moyen des formules

$$(1.3) \quad y_i = L_{\dot{x}_i}, \quad H = -L + y_i \dot{x}_i.$$

La relation (1.2) entraîne la suivante

$$(1.4) \quad |H_{y_i y_j}| \neq 0,$$

mais cette dernière n'est nullement invariante pour les transformations canoniques que nous aurons à considérer. Nous nous donnerons donc H à priori sans faire attention au rang du déterminant (1.4); il est toutefois bon de se rappeler que lorsque le rang de ce déterminant est égal à $(n - p)$ on a affaire non plus à un problème ordinaire du calcul des variations mais à un problème de Lagrange comprenant p équations différentielles auxiliaires⁽²⁾.

(1) Presentata nella seduta del 2 novembre 1930.

(2) V. à ce sujet HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des Variations* (Paris, Hermann, 1910), Chap. VI et C. CARATHÉODORY, *Die Methode der geodätischen Aequidistanten und das Problem von Lagrange*, « Acta Mathem. », 47, p. 223.

2. Nos considérations ultérieures sont basées sur une formule classique⁽¹⁾ concernant les intégrales des équations différentielles canoniques

$$(2.1) \quad \dot{x}_i = H_{y_i} \quad , \quad \dot{y}_i = -H_{x_i}.$$

Considérons une famille d'intégrales de (2.1) dépendant d'un nombre quelconque de constantes d'intégration c_k . Nous avons les formules

$$(2.2) \quad x_i = \xi_i(t, c_k) \quad , \quad y_i = \eta_i(t, c_k),$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = H_{y_i}(t, \xi_j, \eta_j) \quad , \quad \frac{\partial \eta_i}{\partial t} = -H_{x_i}(t, \xi_j, \eta_j)$$

et nous en tirons, après avoir introduit la notation

$$(2.4) \quad \Lambda(t, c_k) = -H(t, \xi_j, \eta_j) + \eta_i \frac{\partial \xi_i}{\partial t},$$

les identités suivantes

$$(2.5) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial c_k} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\eta_i \frac{\partial \xi_i}{\partial c_k} \right).$$

Posons encore, t^0 étant un paramètre arbitraire,

$$(2.6) \quad \Omega(t, t^0, c_k) = \int_{t^0}^t \Lambda(s, c_k) ds,$$

$$(2.7) \quad \xi_i^0 = \xi_i(t^0, c_k) \quad , \quad \eta_i^0 = \eta_i(t^0, c_k) \quad , \quad H^0 = H(t^0, \xi_j^0, \eta_j^0);$$

nous aurons en nous servant de (2.5) et en considérant t , t^0 et les c_k comme variables indépendantes

$$(2.8) \quad d\Omega = (-H dt + \eta_i d\xi_i) - (-H^0 dt^0 + \eta_i^0 d\xi_i^0).$$

C'est là le résultat auquel nous avons fait allusion.

La dernière formule se simplifie un peu, si l'on donne à t^0 une valeur fixe et si l'on prend pour constantes d'intégration c_k les valeurs initiales x_i^0 et y_i^0 des x_i et y_i pour cette valeur de t . On pourra alors écrire à la place de (2.2) et de (2.8)

$$(2.9) \quad x_i = \xi_i(t, x_j^0, y_j^0) \quad , \quad y_i = \eta_i(t, x_j^0, y_j^0),$$

$$(2.10) \quad -H dt + y_i dx_i = d\Omega + y_i^0 dx_i^0.$$

(1) H. POINCARÉ, *Leçons de Mécanique Céleste*, vol. I (Paris, Gauthier Villars, 1905), Chap. I.

3. Faisons encore une remarque qui nous sera fort utile dans la suite. Considérons les $(2n + 1)$ fonctions suivantes des variables (t, x_i, y_i)

$$(3.1) \quad x'_j = x'_j(t, x_i, y_i) \quad , \quad y'_j = y'_j(t, x_i, y_i)$$

$$(3.2) \quad S = S(t, x_i, y_i)$$

et supposons que pour ces fonctions la relation

$$(3.3) \quad y'_j dx'_j = y_i dx_i + dS$$

soit identiquement satisfaite.

Pour le cas où le Jacobien

$$(3.4) \quad \frac{\partial(x'_1, \dots, x'_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$$

aux environs du point que l'on considère, on pourra prendre pour variables indépendantes (t, x_i, x'_i) et en particulier écrire

$$S = \Phi(t, x_i, x'_i).$$

On tire alors de (3.3) les relations

$$(3.5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad , \quad y_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad , \quad y'_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x'_j},$$

desquelles on déduit que les fonctions (3.1) et (3.2) sont *indépendantes* de t .

Or on sait qu'on peut toujours ramener le cas général au cas particulier où l'inégalité (3.4) est vérifiée en permutant certains des x'_j avec les y_j correspondants et en modifiant convenablement la relation (3.3). Il s'ensuit que la relation (3.3) entraîne *toujours sans exception aucune* les suivantes

$$(3.6) \quad \frac{\partial x'_j}{\partial t} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial y'_j}{\partial t} \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial t} \equiv 0,$$

et que par conséquent les relations (3.1) représentent simplement une transformation canonique de l'espace des (x_i, y_i) dans celui des (x'_i, y'_i) .

4. Les considérations précédentes permettent de faire presque sans nouveaux calculs l'étude géométrique des transformations canoniques les plus générales qu'on ait à considérer en mécanique et dans le calcul des variations et qui sont définies par les formules suivantes:

$$(4.1) \quad t' = t'(t, x_j, y_j) \quad , \quad x'_i = x'_i(t, x_j, y_j) \quad , \quad y'_i = y'_i(t, x_j, y_j)$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial(t', x'_i, y'_i)}{\partial(t, x_j, y_j)} \neq 0$$

$$(4.3) \quad -H' dt' + y'_i dx'_i = -H dt + y_i dx_i + d\Psi.$$

Dans ces relations la fonction $\Psi(t, x_j, y_j)$ est une fonction quelconque des variables (t, x_j, y_j) et les fonctions $H(t, x_j, y_j)$ et $H'(t', x'_j, y'_j)$ sont les fonctions de Hamilton de deux problèmes donnés du calcul des variations qui seront dits à *liaison canonique* lorsque les relations précédentes sont satisfaites.

Introduisons dans nos calculs à la place des variables (t, x_i, y_i) les variables (t, x_i^o, y_i^o) qui entrent dans les relations (2.9) et à la place de (t', x'_i, y'_i) des nouvelles variables $(t', x_i'^o, y_i'^o)$ définies par des formules analogues

$$(4.4) \quad x_i' = \xi_i(t', x_i'^o, y_i'^o) \quad , \quad y_i' = \eta_i(t', x_i'^o, y_i'^o) ,$$

telles qu'on ait d'ailleurs

$$(4.5) \quad -H' dt' + y_i' dx_i' = d\Omega' + y_i'^o dx_i'^o .$$

On peut, en partant de (4.4), culquer les $(x_i'^o, y_i'^o)$ en fonction des (t', x'_i, y'_i) , car on verra en se rapportant au § 2 que le Jacobien des fonctions (4.4) par rapport aux $(x_i'^o, y_i'^o)$ n'est pas nul dans le domaine que l'on considère. Ensuite on calculera en se servant de (4.1) les valeurs de ces mêmes grandeurs en fonction de (t, x_i, y_i) et en utilisant (2.9) on arrivera en fin de compte à des formules de la forme

$$(4.6) \quad x_i'^o = \alpha_i(t, x_i^o, y_i^o) \quad y_i'^o = \beta_i(t, x_i^o, y_i^o) .$$

D'autre part on a, en combinant (4.5) et (2.10) avec (4.3) et en posant

$$(4.7) \quad S = \Psi + \Omega - \Omega' ,$$

l'identité

$$(4.8) \quad y_i'^o dx_i'^o = y_i^o dx_i^o + dS .$$

Le théorème prouvé au § 3 nous montre donc que les fonctions α_i et β_i sont indépendantes de t ce qui exprime la propriété bien connue des liaisons canoniques de transformer les extrémales entr'elles.

5. Donnons nous réciproquement deux fonctions quelconques H et H' et calculons les fonctions (2.9) et (4.4) comme il a été expliqué auparavant : Choisissons une transformation canonique quelconque de la forme (4.8) entre les paramètres (x_i^o, y_i^o) et $(x_i'^o, y_i'^o)$ et posons en outre

$$(5.1) \quad t' = \varphi(t, x_i, y_i)$$

la fonction φ étant choisie à volonté. Ces diverses formules permettent de déterminer les (t', x'_j, y'_j) en fonction des (t, x_i, y_i) et l'on voit aisément

que la relation (4.3) est toujours vérifiée. Les transformations qu'on calcule de cette manière sont donc canoniques dès que l'inégalité (4.2) est vérifiée, ce qui est le cas général.

6. Les transformations canoniques les plus simples qu'on obtient par la méthode précédente sont celles où $H \equiv H'$ et pour lesquelles en outre chaque extrémale est transformée en elle-même, c'est à dire pour lesquelles on a $x_j^{\prime 0} = x_j^0$ et $y_j^{\prime 0} = y_j^0$.

Comme la fonction $\varphi(t, x_i, y_i)$ qui sert à calculer t' lorsque l'élément linéaire (t, x_i, y_i) est donné est parfaitement arbitraire, nous voyons que nos transformations canoniques peuvent être engendrées en faisant glisser les éléments linéaires (t, x_i, y_i) de l'espace des (t, x_i) d'une façon absolument quelconque le long de l'extrémale qui contient chacun d'eux.

Les transformations canoniques de cette espèce seront appelées *transformations canoniques de glissement*. L'expression analytique de toutes les transformations canoniques de glissement possibles qui correspondent à une fonction H donnée s'obtient immédiatement lorsqu'on connaît l'intégrale générale des équations différentielles (2.1). On peut alors déterminer en effet des relations

$$(6.1) \quad x_i' = \xi_i(t'; t, x_j, y_j) \quad , \quad y_i' = \eta_i(t'; t, x_j, y_j)$$

qui expriment que les deux points (t, x_j, y_j) et (t', x_i', y_i') se trouvent sur la même extrémale et les formules en question s'obtiennent simplement en combinant (6.1) avec (5.1). Les calculs du § 2. nous apprennent en outre qu'ici la valeur de Ψ est donnée par la formule

$$\Psi = \int_t^{t'} \Lambda ds.$$

Comme en général $\Lambda \neq 0$ on en conclut qu'on peut choisir $t' = \varphi(t, x_j, y_j)$ de façon que $\Psi(t, x_j, y_j)$ soit égale à une fonction donnée à l'avance.

7. Nous voyons donc en particulier qu'une transformation canonique quelconque de la forme (4.5) peut être réalisée en faisant suivre à une transformation de glissement convenable qui conserve la forme de H , une autre pour laquelle Ψ est une constante.

Or ces dernières transformations sont équivalentes aux transformations de contact de l'espace des (t, x_i) qui sont comme on sait données par les formules

$$(7.1) \quad t' = t'(t, x_j, p_i) \quad , \quad x_i' = x_i'(t, x_j, p_i) \quad , \quad p_i' = p_i'(t, x_j, p_i)$$

$$(7.2) \quad \frac{\partial(t', x_i', p_i')}{\partial(t, x_j, p_i)} \Big|_{t'} = 0$$

$$(7.3) \quad dt' - p_i' dx_i' = p(dt - p_i dx_i).$$

Si l'on compare en effet ces dernières relations avec les formules du § 4 après y avoir posé $d\Psi = 0$, on trouve

$$(7.4) \quad p = \frac{H}{H'}, \quad p'_i = \frac{y'_i}{H}, \quad p_i = \frac{y_i}{H}.$$

On vérifiera aisément que les formules (7.4) suffisent en général pour déterminer la transformation de contact (7.1) lorsque la transformation (4.1) et les fonctions H et H' sont connues et que réciproquement on peut calculer (4.1) ainsi que H' lorsqu'on se donne (7.1) et la fonction H .

Les seules transformations de glissement qui engendrent une transformation de contact de l'espace des (t, x_i) sont celles pour lesquelles Ψ est égale à une constante; ce sont d'ailleurs également les seules qui semblent avoir été utilisées jusqu'à présent.

8. Résumons nos résultats: les raisonnements des §§ 5 et 6 prouvent qu'on peut déterminer une infinité de transformations canoniques de la forme (4.3) pour lesquelles H, H' et Ψ sont données à l'avance. Si l'on considère seulement celles de ces transformations pour lesquelles Ψ est constant, on voit qu'il existe également une infinité de transformations de contact de l'espace des (t, x_i) qui transforment H en H' , lorsque ces deux dernières fonctions sont données.

9. Chacun de ces résultats peut être interprété comme un théorème d'optique géométrique car les transformations que subissent les rayons lumineux à leur passage par un instrument quelconque peuvent être représentées (à cause du principe d'Huyghens) par une transformation canonique généralisée de la forme (4.3).

En particulier la façon dont nous avons établi la formule (4.8) est certainement la méthode la plus simple pour définir la fonction iconale de Bruns.

Mais il est une autre catégorie de transformations canoniques qui semble n'avoir pas encore été remarquée quoiqu'elle soit la plus naturelle qu'on puisse imaginer pour l'étude des instruments d'optique; on peut facilement l'obtenir au moyen des transformations de glissement et nous appellerons les transformations de cette espèce « transformations canoniques tangentielles ».

À chaque extrémale e de l'espace des (t, x_i) correspond au moyen d'une transformation canonique généralisée de la forme (4.3) une extrémale e' de l'espace des (t', x'_i) . Au faisceau d'extrémales e passant par un point fixe (t, x_i) correspond alors une famille d'extrémales e' qui enveloppent une surface focale F' . On peut donc en superposant à notre transformation canonique une transformation de glissement faire en sorte qu'à l'élément linéaire (t, x_i, y_i) qui appartient à une extrémale e de notre faisceau, corresponde précisément l'un des éléments (t', x'_i, y'_i) qui appartiennent en

même temps à e' et à F' . La transformation canonique sera appelée *transformation canonique tangentielle* lorsque cette dernière condition est satisfaite pour tous les éléments (t, x_i, y_i) que l'on considère.

On voit tout de suite l'importance des transformations tangentielles pour l'optique géométrique. En effet on obtiendra dans ce cas la surface focale image d'un point (t, x_i) en considérant simplement dans les équations

$$(9.1) \quad t' = t'(t, x_j, y_j) \quad , \quad x'_i = x'_i(t, x_j, y_j)$$

les y_j comme des paramètres variables. D'autre part la relation (4.3) fournira toutes les formules nécessaires pour l'étude de la déformation de ces caustiques lorsque le point (t, x_i) est considéré comme variable.

10. La propriété d'une transformation canonique d'être tangentielle est *symétrique*. J'entends par là que si (4.1) est une transformation canonique tangentielle la transformation inverse qu'on obtient en résolvant ces équations par rapport à (t, x_j, y_j) l'est également.

Écrivons en effet que la surface définie par (9.1) lorsqu'on fait varier les y_j contient l'élément linéaire dont les coordonnées canoniques sont (t', x'_i, y'_i) ; cet élément linéaire ayant pour direction un vecteur dont les composantes sont $(1, H'_{y'_i})$ on obtient ainsi la condition

$$(10.1) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial t'}{\partial y_j} & , & 1 \\ \frac{\partial x'_i}{\partial y_j} & , & H'_{y'_i} \end{vmatrix} = 0 .$$

Or cette dernière relation exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'il passe par chaque élément linéaire (t, x_i, y_i) une multiplicité qui n'est pas une extrémale et qui est pourtant transformée en multiplicité d'éléments linéaires par notre transformation canonique⁽¹⁾. Cette dernière propriété étant symétrique, l'équation (10.1) entraîne cette autre

$$(10.2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial y'_i} & , & 1 \\ \frac{\partial x_j}{\partial y'_i} & , & H_{y'_j} \end{vmatrix} = 0$$

qui exprime à son tour la symétrie de nos transformations tangentielles.

(1) Voir le résumé du calcul des variations que j'ai publié dans FRANK-MISES, *Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, 2. Aufl. (Braunschweig, Vieweg, (1930), vol. I, p. 265.

II. On peut se servir des transformations canoniques tangentielles pour démontrer bien simplement le théorème de *Bruns-Klein* sur les instruments optiques parfaits ainsi que la généralisation que j'en ai donnée il y a quelques années ⁽¹⁾.

Supposons que la liaison entre nos deux problèmes soit non seulement canonique mais de plus telle qu'au faisceau d'extrémales passant par un point fixe A corresponde dans le second problème également un faisceau d'extrémales passant par un point A'.

Dans ce cas la transformation canonique tangentielle qu'on obtient en combinant la transformation donnée avec une transformation de glissement est une transformation *ponctuelle* pour laquelle A et A' sont des points correspondants.

Les fonctions t' et α'_i qui entrent dans (4.1) sont donc ici indépendantes des y_j et il en est par conséquent forcément de même pour la fonction Ψ dans (4.3). En désignant par Υ et Υ' deux courbes correspondantes de l'espace initial et de l'espace transformé on tire donc de (4.3)

$$\int_{\Upsilon'} L' dt' = \int_{\Upsilon} L dt + \int_{\Upsilon} d\Psi;$$

c'est précisément la formule dont je m'étais servi autrefois pour démontrer la généralisation du théorème de *Bruns-Klein* dans le mémoire précité.

La démonstration actuelle a en outre l'avantage de pouvoir s'appliquer (en utilisant la remarque à la fin du § 1) non seulement aux problèmes ordinaires du calcul des variations mais aussi aux problèmes de Lagrange. C'est ce que j'avais énoncé à la fin de mon Mémoire précédent sans parvenir alors à le vérifier.

(1) C. CARATHÉODORY, *Ueber den Zusammenhang der Theorie der absoluten optischen Instrumente mit einem Satze der Variationsrechnung*. « München. Sitzungsber. Mathem.-naturwissensch. Abt. », 1926, p. 1.

Chimica. — *Scoperta dell'acido borico nella vernice dei vasi sigillati aretini.* Nota ⁽¹⁾ del Socio R. NASINI.

Ho l'onore di comunicare all'Accademia una scoperta da me fatta, insieme col dr. R. Grassini, la quale credo che abbia molto interesse dal punto di vista della ceramica antica e degli scambi commerciali e della industria dei Romani nel I secolo avanti e nel I secolo dopo Cristo.

Messo sull'avviso dalle investigazioni da me eseguite riguardo alla antichità dei lagoni e soffioni boraciferi della Toscana, volli esaminare la vernice dei celebri vasi aretini — vasi sigillati Aretini — di quei vasi che furono una delle più importanti e belle manifestazioni artistiche dei romani nel I secolo avanti e nel I secolo dopo Cristo. Era sempre stata un mistero la composizione di quella magnifica vernice corallina così lucida, così sottile e per la quale tante e tante ipotesi si erano fatte e tante esperienze si erano tentate per riprodurla. Fu un tedesco il Dr. F. Keller ⁽²⁾ il quale suppose che in quella vernice entrasse l'acido borico, e ciò perchè nei molti tentativi fatti per riprodurla non ebbe risultati buoni — eccellenti anzi secondo la sua affermazione — che adoperando il borace. Questa sua convinzione non fu divisa da tutti, e anche quelli che videro i saggi da lui eseguiti, non ritennero che avesse raggiunto quella perfezione degli antichi esemplari e quindi non si persuasero delle sue conclusioni. Nondimeno l'opinione che nella vernice dei vasi aretini entrasse l'acido borico si diffuse, e così anche nella bella « Storia della Ceramica Greca » del nostro illustre Collega Pericle Ducati, si dice, *nelle fabbriche di Arezzo si avverte inoltre l'applicazione di un lucido trasparente, incolore, composto di silicati, di ossido di ferro e forse di borace.* Ma nessuna prova vi era, gli storici della chimica affermando anzi che il borace era sconosciuto dai greci e dai romani, ed io mi proposi un *experimentum crucis* esaminando chimicamente la vernice dei vasi sigillati aretini. L'impresa non era troppo facile perchè bisognava procurarsi una quantità notevole di rottami, che non avessero importanza artistica, quantità notevole dico perchè lo strato di vernice è sottilissimo e non facile riesce il distaccarla. Il Dr. Alessandro del Vita, dotto archeologo che insieme col fratello ha tentato con tanto successo di far risorgere in Arezzo la gloriosa ceramica romana, venne in mio aiuto fornendomi una buona quantità di rottami provenienti dalle offi-

(1) Presentata nella seduta del 2 novembre 1930.

(2) *Die rothe römische Töpferwaare mit besonderer Rücksicht auf ihre Glasur.* Eine Kunstgewerbliche Skizze von Dr. Franz KELLER, Rektor der Gewerbeschule in Speyer. Heidelberg, Buchhandlung von Carl Gross, 1876 (Opuscolo di 27 pagine).

cine di L. (ucius?) Titi e di Thirsus e che furono trovati durante alcuni assaggi, fatti eseguire a scopo di studi dal dr. Del Vita, in una zona situata sotto le mura della città di Arezzo dalla parte Nord. Mi associai allora col dr. Riccardo Grassini, ed insieme eseguiammo, nel suo laboratorio privato a Firenze, le analisi necessarie. L'esame accurato della vernice ci ha autorizzati a potere affermare in modo sicuro che l'acido borico entra a far parte della vernice e che non si trova in tracce accidentali, ma realmente è uno dei componenti della vernice stessa. È, crediamo, questa la prima volta che con sicurezza è stato trovato acido borico in prodotti di quell'epoca; notisi poi d'altra parte che acido borico non abbiamo trovato nella vernice di rottami di vasi etrusco-campani. Sulla conoscenza dell'acido borico per parte dei greci non abbiamo che due affermazioni del Landerer professore tedesco che insegnò nell'Università e nel Politecnico di Atene⁽¹⁾: ma non ritengo che le sue affermazioni si basino sopra vere analisi, o che almeno sieno da queste documentate. Se i Romani traessero il borace, confondendolo con altri prodotti, dall'Asia Minore o da altri luoghi dell'Oriente, o utilizzassero, senza conoscerne la natura, prodotti degli attuali lagoni è difficile di stabilirlo. Nella lunga memoria che stiamo preparando, tutti questi argomenti verranno ampiamente discussi. Per ora ci limitiamo a riferire i risultati di questa scoperta, grati a coloro che ci vorranno aiutare e illuminare in questo difficile campo, non senza affermare la necessità di studi estesi chimici e chimico-fisici sopra i vari prodotti ceramici, metallurgici e simili dell'antichità, studi che sin qui sono stati fatti in modo molto incompleto e frammentario e che potrebbero illuminarci su tante e tante vitali quistioni.

(1) Xaver LANDERER, nato nel 1809 a München, morto nel 1883 ad Atene.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Algebra). — *Sulle matrici che soddisfano una data equazione algebrica.* Nota ⁽¹⁾ di S. AMANTE, presentata dal Socio F. SEVERI.

1. — In una Nota precedente ⁽²⁾ ho risolto il problema della determinazione di tutte le matrici quadrate X di ordine assegnato m (m qualunque) che verificano una data equazione analitica $f(X) = 0$.

Vogliamo ora dedurne alcune interessanti conseguenze.

2. — Supponiamo, in particolare, che la funzione analitica $f(x)$ sia un polinomio di grado n nella variabile complessa x .

Siano $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ tutte le radici distinte dell'equazione $f(x) = 0$ e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, rispettivamente, i loro ordini di molteplicità:

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = n$$

Il teorema enunciato nella precedente Nota e riguardante una qualunque funzione analitica si riduce, in questo caso, al seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perché una matrice X , di ordine m (del resto qualunque), verifichi l'equazione $f(X) = 0$ è che le radici caratteristiche di X siano zeri dell'equazione algebrica $f(x) = 0$ e che l'ordine di ogni catena propria, relativa ad una radice ρ_i , nella forma tipica di X , non superi l'ordine di molteplicità di ρ_i come zero di $f(x)$.

Ricordando la definizione data di sistema completo di matrici non equivalenti, di dato ordine m (qualunque), si ha che il numero di tali sistemi, relativi ad h ($\leq k$) radici distinte di $f(x)$, è $\binom{k}{h}$, e quindi, il numero totale di detti sistemi è

$$(1) \quad \sum_{h=1}^m \binom{k}{h}$$

e se ne deduce (essendo finito il numero delle matrici di un sistema completo) che è finito il numero delle matrici non equivalenti di dato ordine m , che verificano la data equazione algebrica.

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1930.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XII, 1930, fasc. 7-8, p. 290.

È così dimostrato che il problema della risoluzione, nel campo delle matrici di ordine m , ad elementi complessi, di un'equazione algebrica qualunque ammette un numero finito $N(m)$ di soluzioni.

3. - Ci proponiamo ora di assegnare un limite inferiore del numero $N(m)$.

Essendo, come abbiamo trovato nella Nota precedente, $\binom{m-1}{h-1}$ il numero di moltiplicazioni di ordine m , non equivalenti, appartenenti ad un sistema completo di soluzioni d'ordine m , relativo ad h zeri distinti, comunque assegnati di $f(x)$, sarà:

$$\sum_{i=1}^m \binom{k}{h} \binom{m-1}{h-1}$$

ossia

$$\binom{m+k-1}{k-1}$$

il numero di tutte le moltiplicazioni di ordine m , non equivalenti, che verificano la data equazione algebrica.

Se ne deduce che $\binom{m+k-1}{k-1}$ è il limite inferiore del numero $N(m)$ delle soluzioni di ordine m , non equivalenti, della equazione $f(X) = 0$.

In particolare si ha il teorema:

Se $f(x) = 0$ è un'equazione di grado n , a radici tutte distinte, condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice X , di ordine m , verifichi l'equazione $f(X) = 0$ è ch'essa sia riducibile a una moltiplicazione e che le sue radici caratteristiche distinte siano comprese fra gli zeri di $f(x)$. In tal caso:

$$\binom{m+n-1}{n-1}$$

è il numero di tutte le matrici di ordine m , non equivalenti, che verificano la $f(X) = 0$.

È facile vedere che questo numero è sempre $\geq n$ ed è uguale ad n solo se $m = 1$, nel qual caso il teorema è nient'altro che il teorema fondamentale dell'algebra.

Nel caso in cui l'equazione $f(x) = 0$ ha radici multiple, la determinazione del numero delle matrici che verificano la $f(X) = 0$ è meno facile perchè, come abbiamo osservato nella precedente Nota, è legato ad un problema di partizione. Si potrebbe, ad esempio, verificare che:

Il numero delle matrici di ordine 2 che verificano un'equazione con k radici distinte di cui p sono almeno doppie è

$$\binom{k+1}{2} + p.$$

Il numero delle matrici di ordine 3 che verificano un'equazione con k radici distinte, di cui p sono doppie e q almeno triple, è

$$\binom{k+2}{3} + kp + q(k+1).$$

4. - Sia data un'equazione di grado n ,

$$(2) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

e una matrice quadrata A di ordine n .

Supponiamo che ciascun coefficiente a_r ($0 \leq r \leq n$) sia eguale alla somma dei minori principali di ordine r della matrice A moltiplicata per $(-1)^r$. Allora l'equazione (2) non è altro che l'equazione caratteristica relativa alla matrice A e si ha quindi, in base al teorema enunciato nel paragrafo 2, il seguente corollario:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice M di ordine m verifichi l'equazione caratteristica relativa ad una matrice A è che le radici caratteristiche di M siano radici caratteristiche di A e che l'ordine di ogni catena propria, relativa ad una radice ρ_i , nella forma tipica di M , non superi l'ordine di molteplicità di ρ_i come radice caratteristica di A .

Abbiamo così risolto il problema della ricerca di tutte le matrici di ordine m (qualunque) che verificano l'equazione caratteristica di una data matrice A . Fra queste vi è la matrice A stessa, com'è noto (teorema di Cayley).

5. - L'equazione caratteristica di una matrice non è, in generale, l'equazione di grado minimo cui soddisfa la matrice data, ma la costruzione di una tale equazione è immediata in base ai risultati ora trovati.

Chiamato, infatti, con n_i il massimo ordine delle catene proprie (se esistono) che intervengono nella forma tipica della matrice data, relativo alla radice ρ_i ($i = 1, 2, \dots, h$), e posto $n = 1$, se in corrispondenza alla radice ρ_i non si hanno catene proprie, la matrice data soddisfa anche l'equazione

$$(3) \quad (x - \rho_1)^{n_1} (x - \rho_2)^{n_2} \dots (x - \rho_h)^{n_h} = 0$$

perchè gli ordini delle catene corrispondenti alla radice ρ_i , nella forma tipica della matrice data, non superano l'ordine di questa radice nell'equazione (3).

D'altra parte è evidente anche che la (3) è l'equazione di grado minimo cui soddisfa la matrice data.

6. — Come conseguenze immediate del teorema enunciato al n. 2 si ottengono diversi risultati noti:

1°. Risolvendo l'equazione

$$X^n = I,$$

nel campo delle matrici, si ha:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice A sia periodica⁽¹⁾ di grado n è che essa sia riducibile ad una moltiplicazione e che le sue radici caratteristiche siano radici n esime dell'unità.

Il numero delle matrici (non equivalenti) di ordine m , periodiche di grado n , è dunque:

$$\binom{m+n-1}{n-1}.$$

2°. Risolvendo l'equazione

$$X^p = -I$$

si ottengono delle matrici periodiche di grado $2p$. Le sostituzioni lineari di ordine m rappresentate da queste matrici sono tali che una loro potenza p esima equivale ad una simmetria rispetto a un punto (origine di un sistema di riferimento in uno spazio ad m dimensioni).

3°. Considerando l'equazione

$$X^n = 0$$

si ha il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una potenza di A sia una matrice nulla è che tutte le radici caratteristiche di A siano uguali a zero.

È noto che una tale matrice, se non è nulla, dicesi anche *pseudo-nulla*.

(1) Una matrice A si dice periodica se esiste un intero positivo n tale che $A^n = I$. Se poi n è il minimo numero per cui $A^n = I$ si dice che A è periodica di grado n .

Matematica (Calcolo delle probabilità). — *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità*. Nota di B. DE FINETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

L'applicazione del calcolo delle probabilità a problemi, anche pratici, sempre più delicati, ha spontaneamente condotto a trattarne facendo uso di sempre più delicati strumenti analitici; nel giudicare della legittimità di tale uso ci si è però quasi sempre limitati ad ammettere, quasi fosse lecito farlo convenzionalmente, che ci si possa fidare delle ragioni d'analogia che li suggeriscono. Ho avuto occasione più volte di rilevare quanto in tal campo sia necessario procedere con rigore e con diffidenza se non si vuole incorrere in errori anche gravi, e ho sottoposto a un esame critico parecchi punti particolari fra i più notevoli ⁽²⁾. Delle difficoltà pregiudiziali molto sconcertanti che incontrai volendo proseguire i miei studi sulle funzioni a incremento aleatorio ⁽³⁾ mi persuasero però della necessità di una ricerca più generale, di cui espongo qui succintamente il risultato, che mi sembra notevole perchè molto semplice e significativo.

1. Il punto essenziale è di basarsi su un'impostazione rispondente al problema: è questo che, a mio modo di vedere, non si è mai fatto, ed è questo che mi propongo di fare. Ritengo necessario anzitutto separare nettamente ciò che riguarda le proposizioni del calcolo delle probabilità — e che ha un preciso valore logico, — da tutto ciò che si riferisce alla valutazione di una probabilità, e il cui valore non può che essere empirico.

Se ad es., ammesso che le probabilità p_f, p_c, p_r di estrarre da un mazzo di carte un fante, o un cavallo, o un re, siano $p_f = p_c = p_r = 1/10$, ne concludo che la probabilità p di estrarre una figura è $p = p_f + p_c + p_r = 3/10$, io eseguisco un ragionamento puramente logico: il fatto che i tre eventi considerati siano incompatibili è infatti logicamente vero, e, sotto tale condizione, la validità del teorema delle probabilità totali è logicamente sicura. Ma ha invece un valore indubbiamente empirico la valutazione delle probabilità dalla quale sono partito: se valuto $= 1/10$ la probabilità di estrarre un fante, questo che faccio non potrà essere che un giudizio empirico. La distinzione è nettissima e ha un'importanza fondamentale su cui è necessario insistere, perchè il senso di ciò che è logico, tanto affinato ormai in tutti i campi della geometria e dell'analisi, sembra ancora mancare totalmente in ciò che riguarda il calcolo delle probabilità. Nel primo caso si ha un ragionamento logico perchè varrebbe inalterato se si trattasse di tre eventi incompatibili qualunque E_f, E_c, E_r e della loro somma E anzichè dell'estrazione di un fante, un cavallo, un re,

(1) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(2) Cfr. parecchie Note nei « Rendiconti dell' Istituto Lombardo » (una del 1928 e quattro del 1930).

(3) Cfr. tre Note in questi « Rendiconti », 1929, 2° sem.

una figura, da un mazzo di carte: il ragionamento dipende dunque soltanto dallo schema logico degli eventi in questione e non dal loro particolare significato. Non ha invece un significato logico il giudizio del secondo caso, in quanto non basta sapere che E_f, E_c, E_r sono incompatibili per concludere che sono ugualmente probabili e la loro probabilità è $\approx 1/10$; tale giudizio dipende da nozioni e considerazioni particolari suggerite dalla particolare precisazione degli eventi del nostro schema.

Non parleremo quindi della *probabilità* $P(E)$ dell'evento E come di qualcosa di obbiettivamente determinato; considereremo invece tutte le funzioni P non contraddicenti i teoremi del calcolo delle probabilità come espressioni di leggi formalmente ammissibili, lasciando alla pratica e all'opinione di ciascun individuo la scelta di *una* di tali funzioni come appropriata, caso per caso, a un concreto problema.

Riferendoci all'esempio precedente, considereremo come teoricamente accettabili tutte le ∞^3 leggi P per cui $P(E_f) = x, P(E_c) = y, P(E_r) = z, P(E) = x + y + z$ ove $x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1$; la legge in cui $x = y = z = 1/10$ non è che un caso particolarissimo, e la sua scelta, benchè suggerita da considerazioni spontanee e universalmente approvate, non è affatto imposta da ragioni logiche di cui la matematica debba o possa interessarsi.

Una tale completa separazione potrebbe a prima vista sembrare innaturale ed inutile; si vedrà invece che essa chiarisce i problemi in modo così lucido da dover apparire pienamente giustificata anche a chi non condivida la concezione filosofica della probabilità cui essa, per me, s'ispira ⁽¹⁾. Anche cioè se, non volendola intendere come rispondente a una precisa, effettiva, essenziale, ragione di principio, ci si limiti a considerarne il mero aspetto formale di utile accorgimento d'impostazione. Basta infatti che il problema in esame non sia tanto semplice come nel precedente esempio, e il riconoscere se certe premesse sono o non sono sufficienti per implicare una certa conseguenza diviene questione delicatissima e mai sino ad oggi risolta, appunto perchè mancava la netta distinzione che ho trovato necessario introdurre.

2. Si osservi poi che la nostra impostazione ⁽²⁾ conduce a operare sempre e direttamente sugli eventi E (di quella certa classe d'eventi \mathcal{E} della cui probabilità ci interessa occuparci) considerati come entità logiche (proposizioni categoriche). Mentre che ordinariamente si ritiene di doversi basare sulla considerazione dei *casi possibili*, di dover trattare gli eventi come aggregati di casi possibili, e ciò conduce a prospettare il problema in modo falso e privo d'ogni significato intrinseco. Si concepisce e si studia allora

(1) Cfr. il mio saggio *Probabilismo*, che si pubblicherà in « Logos ». V. anche « Boll. U. M. I. », dic. 1930.

(2) Conforme in ciò a quella di BOOLE; cfr. MEDOLAGHI, *La logica matematica e il calcolo delle probabilità* in « Boll. Ass. It. Attuari », n. 18, 1907 e bibliografia ivi.

la probabilità coi concetti della teoria della misura, e si finisce invariabilmente col lasciarsi trascinare da illusorie esteriori analogie. Dato un evento come aggregato di casi possibili, si pretende allora calcolarne (o peggio, come taluni direbbero, *definirne*) la probabilità escogitando qualche più o meno felice metodo di « misura ».

Nulla di tutto ciò sussiste secondo il mio punto di vista. Io ritengo che si possa e si debba, basandoci sui principii del calcolo delle probabilità (eventualmente precisati con rigore ove non lo fossero), determinare qual'è la classe più generale degli eventi la cui probabilità risulta determinata conoscendo le probabilità, assegnate per ipotesi, di una certa classe d'eventi \mathcal{E} , e quale la classe più generale degli eventi per cui tale conoscenza può fornire una limitazione (superiore o inferiore o bilaterale) alla corrispondente probabilità, mentre pei rimanenti nulla si potrà dire ⁽¹⁾. Dato un evento A , si potrà allora, senza sentire alcun dubbio e senza tentare alcun artificio, rispondere sempre *a priori* e sicuramente se le condizioni poste determinano la probabilità $P(A)$, la assoggettano a qualche limitazione, la lasciano completamente indeterminata. Si tratta semplicemente di riconoscere per quali valori x la funzione $P(E)$, che rappresenta le già assegnate probabilità degli eventi E di \mathcal{E} , costituisce una legge di probabilità formalmente ammissibile nel campo $\mathcal{E} + (A)$ quando si ponga $P(A) = x$. Se x è univocamente determinato, il problema di probabilità è determinato; altrimenti esistono infinite soluzioni x , e precisamente tutti gli x di un intervallo chiuso $x' \leq x \leq x''$, e in tal caso ogni criterio per determinare la probabilità è illusorio, l'indeterminatezza della soluzione essendo insita nella natura stessa del problema.

3. Diciamo subito poi che non parleremo qui delle probabilità subordinate. La probabilità « dell'evento E subordinatamente all'evento H » è concetto assai più delicato di quel che ordinariamente lo si consideri, e merita d'essere introdotto, e con ogni cura, solo in un secondo tempo. Non meraviglia dunque la mancanza di un qualunque accenno alla nozione di eventi indipendenti, al teorema delle probabilità composte, e a quant'altro dipende dalla nozione di probabilità subordinata.

Da notarsi ancora che per « evento » intenderemo sempre un fatto unico ben determinato. Spesso la parola si usa promiscuamente, e si parla di un « evento » che può *ripetersi*, dar luogo a più o infinite « prove »; in questo senso, ad evitare equivoci, è più opportuno usare la parola *fenomeno*, e ogni « prova » del fenomeno sarà un *evento*. Ad es., l'« estrazione del 24 al lotto » è un fenomeno, l'« estrazione del 24 alla ruota di Roma il 25 ottobre 1930 » è un evento.

4. Passiamo ora al punto capitale del nostro problema: caratterizzare la classe delle funzioni $P(E)$ da ritenersi *formalmente ammissibili* come *leggi di probabilità*. Senza approfondire l'analisi concettuale del problema, ampia-

(1) Cfr. la mia conferenza su *Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo* (Sem. Mat. Roma, 1930).

mente svolta altrove⁽¹⁾, prenderemo qui senz'altro come punto di partenza il risultato seguente, che assumeremo come definizione di « legge di probabilità ».

Consideriamo, in relazione a una qualunque funzione $\mathbf{P}(E)$ degli eventi E di una classe \mathcal{E} , i numeri aleatori del tipo

$$G = (\lambda_1 - p_1) S_1 + (\lambda_2 - p_2) S_2 + \dots + (\lambda_n - p_n) S_n$$

dove $S_1 \dots S_n$ sono numeri reali qualunque, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sono i numeri aleatori che assumono il valore 1 o 0 a seconda che certi n eventi $E_1 \dots E_n$ di \mathcal{E} si verificano o non si verificano, e $p_1 \dots p_n$ sono i corrispondenti valori $\mathbf{P}(E_1) \dots \mathbf{P}(E_n)$. Detto, per definizione, *scommessa unitaria sull'evento* E , *equa relativamente alla funzione* \mathbf{P} , il numero aleatorio $\lambda - p$ ($\lambda = 1$ o 0 a seconda che E si verifica o non si verifica, e $\mathbf{P}(E) = p$), le G relative alla funzione \mathbf{P} sono le combinazioni lineari di scommesse unitarie, eque rispetto alla \mathbf{P} , su un numero finito di eventi di \mathcal{E} .

Ciò posto, diremo che la funzione \mathbf{P} costituisce una legge di probabilità (una legge di probabilità formalmente ammissibile) SE E SOLTANTO SE PER NESSUN NUMERO ALEATORIO G AD ESSA RELATIVO SONO POSITIVI TUTTI I VALORI POSSIBILI⁽²⁾.

Osserviamo, per dare una sommaria giustificazione di questa proprietà, che $(\lambda_1 - p_1) S_1$ è il guadagno (positivo o negativo) di chi puntasse una somma S_1 sul verificarsi dell'evento E_1 in base alla valutazione di probabilità $\mathbf{P}(E_1) = p_1$: è precisamente il numero aleatorio che assume i due valori $(1 - p_1) S_1$ e $-p_1 S_1$ a seconda che E_1 si verifica o no. Il numero aleatorio G precedentemente considerato rappresenta il guadagno di un certo insieme di scommesse fatte in base alla valutazione di probabilità $\mathbf{P}(E_1) = p_1, \dots, \mathbf{P}(E_n) = p_n$; se la valutazione di probabilità è tale che conduce a considerare equa una scommessa in cui l'esito risulti in ogni caso favorevole a uno dei due competitori (sia certamente $G > 0$), la valutazione è ovviamente incoerente, inammissibile. È coerente, ammissibile, se in nessun modo dà luogo a una simile incongruenza.

Si osservi poi che la definizione implica immediatamente che per la probabilità p di un evento certo, impossibile, nè certo nè impossibile, si ha $p = 1, p = 0, 0 \leq p \leq 1$.

5. Esaminiamo ora la portata di questa definizione, partendo dal caso più semplice e passando mano mano a quelli più complessi.

Sia \mathcal{E} una classe finita e completa di eventi incompatibili, costituita cioè di n eventi $E_1 \dots E_n$ di cui debba necessariamente verificarsene uno e uno solo. Allora condizione necessaria e sufficiente perchè \mathbf{P} sia legge di probabilità in \mathcal{E} è che valga il teorema delle probabilità totali

$$\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \dots + \mathbf{P}(E_n) = 1.$$

(1) V. una Memoria di prossima pubblicazione nel « Giorn. Ass. It. Attuari ».

(2) La definizione non mostra immediatamente che le funzioni considerate esistano, e si possano riconoscere senza infiniti tentativi (per tutte le *n*-uple di parametri S_1, \dots, S_n per ogni *n*-pla d'eventi E_1, \dots, E_n); ciò apparirà dalle condizioni, ad essa equivalenti, che tosto vedremo.

Allora infatti nell'espressione di G una e una sola delle λ è $= 1$, e le altre tutte nulle; se in particolare $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S \neq 0$, si avrà G uguale al numero certo (non più aleatorio) $[1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_n)] S$, il che è assurdo a meno che $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, così che $G = 0$. La condizione è quindi necessaria, ed è facile mostrare che è anche sufficiente ⁽¹⁾. Il precedente enunciato implica poi senz'altro che il teorema delle probabilità totali vale in ogni caso.

Dato allora un evento A , è facile vedere che la sua probabilità è determinata se A è la somma logica di alcuni degli eventi E_i ; altrimenti possiamo soltanto affermare che la probabilità di A è non minore della somma delle probabilità degli eventi E_i che implicano A e non maggiore della somma analoga per gli eventi E_i compatibili con A .

6. Sia \mathcal{G} una classe finita di eventi $E_1 \dots E_n$ qualunque. Consideriamo i 2^n costituenti $C_1 \dots C_s$, e cioè gli eventi che si ottengono dal prodotto logico $E_1 E_2 \dots E_n$ sostituendovi un numero qualunque degli eventi E_i coi loro contrari (negazioni): essi formano una classe finita e completa di eventi incompatibili, e ogni evento E_i è la somma logica di 2^{n-1} tra essi. Va notato che in generale non tutti i 2^n prodotti considerati saranno eventi possibili, e i costituenti si ridurranno allora in effetto a un numero minore ($s \leq 2^n$); computare, come facemmo, anche i costituenti impossibili è però indifferente, purchè non si dimentichi che la loro probabilità è necessariamente nulla. La più generale legge di probabilità per i costituenti è, per quanto visto, quella che attribuisce come probabilità ai costituenti possibili $C_1 \dots C_s$ dei valori non negativi $q_1 \dots q_s$ qualunque di somma $= 1$; si dimostra inversamente che ogni legge di probabilità definita in \mathcal{G} si può prolungare in una legge di probabilità definita per i costituenti C_i , e si conclude quindi che la valutazione di probabilità $P(E_1) = p_1, \dots, P(E_n) = p_n$ è ammissibile se e soltanto se esistono s numeri $q_1 \dots q_s$ non negativi soddisfacenti il sistema di $n + 1$ equazioni lineari in s incognite

$$\sum_i^{(1)} q_i = p_1, \dots, \sum_i^{(n)} q_i = p_n, \sum_i q_i = 1, \quad \text{ove } \sum_i^{(b)}$$

indica la somma estesa a quegli indici i per cui C_i è un costituente che appartiene ad E_b (un evento che implica E_b).

Dato ora un evento A , in quali casi la sua probabilità x è determinata? Supponiamo dapprima che A sia la somma di alcuni fra i costi-

(1) Gli n valori $G_1 \dots G_n$ possibili per G (corrispondenti all'avverarsi di $E_1 \dots E_n$) non possono essere tutti > 0 , altrimenti sarebbe anche $\sum_1^n p_i G_i > 0$, mentre, essendo $G_i = S_i - \sum_j p_j S_j$, $\sum_j p_j S_j = 1$, si ha sempre (per $S_1 \dots S_n$ qualunque) $\sum_1^n p_i G_i = 0$.

tuenti $C_1 \dots C_s$; la probabilità di A sarà allora la somma delle q_i corrispondenti: $x = \sum_i^{(A)} q_i$. Se tale equazione è linearmente dipendente dalle precedenti la soluzione è unica; se non lo è, esistono in generale infinite soluzioni, e cioè, per una proprietà generalissima che accenneremo in seguito, tutti i valori x di un certo intervallo chiuso $x' \leq x \leq x''$. Il fatto che l'equazione sia linearmente dipendente dalle precedenti non dipende che dall'evento A e dalla classe \mathcal{G} ; è quindi una proprietà logica, e non una proprietà dipendente dalla funzione \mathbf{P} . Diremo allora in tal caso che l'evento A è *linearmente dipendente* da $E_1 \dots E_n$, o anche, essendo la proprietà simmetrica, che A, E_1, \dots, E_n sono *eventi linearmente dipendenti*. Ciò equivale a dire che fra i numeri aleatori $\lambda_A, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ uguali a 1 o 0 a seconda che A, E_1, \dots, E_n si verifica o no, esiste una combinazione lineare costante (uguale a un numero certo, non aleatorio), ossia che è nulla la matrice $\|a_{ik}\|$ ($i = 0, 1, \dots, n, n+1$; $k = 1, 2, \dots, s$) ove a_{ik} , per $i = 0, 1, \dots, n$, è = 1 o 0 a seconda che C_k implica o non implica E_i (posto $E_0 = A$), e $a_{ik} = 1$ per $i = n+1$.

Se A non è una somma di costituenti, siano A' e A'' la massima e la minima rispettivamente fra tali somme che vi sono contenute e che lo contengono; si potrà dire allora che è $x' \leq x \leq x''$ ove x' sia la minima probabilità ammissibile per A' ed x'' la massima probabilità ammissibile per A'' , e che tutti questi valori di x sono ammissibili.

7. Il caso in cui \mathcal{G} è classe infinita non presenta nessuna nuova difficoltà: la condizione di definizione mette infatti in evidenza che \mathbf{P} è una legge di probabilità ammissibile in \mathcal{G} se (e ovviamente solo se) rappresenta una legge ammissibile di probabilità in qualunque sottoclasse finita di \mathcal{G} . Detti *eventi linearmente dipendenti* da \mathcal{G} quelli che sono linearmente dipendenti da almeno una sottoclasse finita di \mathcal{G} , avremo che sono essi tutti e soli gli eventi la cui probabilità risulta univocamente determinata assegnando comunque una legge di probabilità in \mathcal{G} . Per gli altri eventi, ogni sottoclasse finita di \mathcal{G} dà una limitazione; i valori che soddisfano tutte le infinite limitazioni così ottenute sono i valori ammissibili della corrispondente probabilità. I valori ammissibili costituiscono un intervallo chiuso, come scende immediatamente dalla seguente proposizione generalissima e per sé stessa importante, facile conseguenza della posta definizione:

Le leggi di probabilità costituiscono un insieme convesso chiuso. E cioè: se $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ sono leggi di probabilità in una classe d'eventi \mathcal{G} , lo è anche $\mathbf{P} = \mu_1 \mathbf{P}_1 + \mu_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \mu_n \mathbf{P}_n$ con $\mu_1 \dots \mu_n$ coefficienti non negativi di somma = 1. Se $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_n \dots$ è una successione di leggi di probabilità per una classe d'eventi \mathcal{G} , e per ogni evento E di \mathcal{G} esiste il limite di $\mathbf{P}_n(E)$ per $n \rightarrow \infty$; la funzione $\mathbf{P}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n(E)$ è una legge di probabilità in \mathcal{G} .

Un caso particolare notevole e abbastanza frequente in pratica è quello in cui la negazione di un evento \mathcal{E} è il prodotto di due eventi \mathcal{E} è ancora sempre un evento \mathcal{E} , o almeno una somma di eventi \mathcal{E} incompatibili in numero finito. Allora gli eventi linearmente dipendenti da \mathcal{E} non sono che le somme di un numero finito di eventi \mathcal{E} incompatibili; per un altro evento A il minimo e il massimo valore ammissibile della probabilità è rispettivamente il limite superiore delle probabilità degli eventi A' , somme di \mathcal{E} incompatibili in numero finito contenute in A , e il limite inferiore delle probabilità degli eventi A'' , somme analoghe contenenti A .

8. Ci siamo finora occupati di distinzioni puramente logiche. Data una classe di eventi \mathcal{E} , in base a pure operazioni logiche si può riconoscere se per un evento A la probabilità rimane univocamente determinata, o superiormente o inferiormente o bilateralmente limitata, oppure è del tutto indeterminata, quando si assegni *comunque* la legge di probabilità in \mathcal{E} . Non è escluso però che, *per una particolare* legge di probabilità P , un evento per la cui probabilità si dovrebbe avere una limitazione risulti in effetto avere una probabilità o univocamente determinata o completamente indeterminata: può darsi infatti che gli estremi trovati vengano a coincidere o si riducano a zero ed uno.

9. Consideriamo un esempio importante e comunissimo: quello che serve di base allo studio dei numeri aleatori, e che si suole sempre prendere a tipo dei problemi che andrebbero impostati servendosi della teoria della misura. Si abbia cioè da «scegliere a caso» un punto di un dato segmento (ossia un numero dell'intervallo $0,1$), e supponiamo assegnata la probabilità di ogni segmento. Il prodotto logico (parte comune) di due segmenti è ancora un segmento, e l'aggregato complementare di un segmento è costituito di uno o due segmenti; siamo dunque nell'ultimo caso del n. 7. I soli aggregati per cui la probabilità debba allora sempre risultare determinata sono le somme di segmenti in numero finito; per gli altri la probabilità è compresa fra quelle corrispondenti alle somme di segmenti in numero finito che rispettivamente vi sono contenute o li contengono. In particolare, per un insieme ovunque denso il cui complementare sia pure ovunque denso la probabilità è completamente indeterminata: nulla si può concludere ad es. in nessun caso sulla probabilità dei punti ad ascissa razionale.

Per una legge di probabilità particolare, la probabilità può risultare determinata anche per altri aggregati che le somme di segmenti in numero finito. Se ad esempio la probabilità di ogni intervallo è proporzionale alla lunghezza, allora la probabilità risulta determinata anche per gli aggregati la cui frontiera può essere racchiusa in numero finito di segmenti di lunghezza complessiva piccola quanto si vuole; nel caso più generale la probabilità può assumere qualunque valore compreso fra il «longore infero» e il «longore supero» nel senso di PEANO (*Form. Math.*). Per una qualunque legge di probabilità vale un criterio analogo: che la frontiera sia racchiudibile in un numero finito di segmenti di probabilità complessiva comunque piccola.

Tutti i criteri basati sulla teoria della misura, sull'estensione alle classi numerabili del teorema delle probabilità totali, su altri simili metodi di passaggio al limite, sono totalmente illusori ogni qual volta conducono a precisare la conclusione più di quanto non avvenga in forza delle proprietà ora enunciate, e cioè più di quanto il problema stesso lo consenta.

Matematica. — *Sui tensori isotropi: relazione fra le componenti.*
Nota di MARIA PASTORI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

In alcune Note recenti il prof. Cisotti ⁽²⁾ definisce *tensori isotropi* di un S_3 euclideo, quei tensori che, per un cambiamento qualsiasi di coordinate cartesiane ortogonali, conservano immutate le loro componenti, tali cioè che se:

$$(1) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_m} \quad (i_1, i_2 \dots i_m = 1, 2, 3)$$

ne sono le componenti cartesiane ortogonali, esse verificano le relazioni:

$$(2) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_m} = T_{j_1 j_2 \dots j_m} \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} \dots \alpha_{j_m i_m}$$

per qualunque sistema di valori delle α , purchè esse sieno i coefficienti di una sostituzione ortogonale, e quindi $\|\alpha_{ik}\| = \pm 1$.

Stabilito, in base a tale definizione, che m deve essere necessariamente pari, determina la rappresentazione del più generale tensore isotropo doppio e quadruplo.

Mi propongo di mettere in evidenza che le considerazioni del prof. Cisotti sono applicabili ai tensori di un S_n euclideo, con n qualunque, e si estendono facilmente al caso di m qualunque, suggerendo una rappresentazione del più generale tensore isotropo di una varietà euclidea.

Le considerazioni svolte sono pure valide se ai sistemi cartesiani ortogonali dell' S_n si sostituiscono le ennuple di congruenze ortogonali di una varietà riemanniana ad n dimensioni, cosicchè esse permettono di estendere la definizione e la rappresentazione dei tensori isotropi anche a varietà riemanniane.

Mi limito in questa Nota a rilevare le proprietà delle componenti di un tensore isotropo, riservando per una successiva la loro rappresentazione in varietà euclidee e riemanniane.

I. — PRIMA PROPRIETÀ.

Siano le (1) componenti di un tensore m^{plo} isotropo di un S_n euclideo ($i_1, i_2 \dots i_m = 1, 2 \dots n$).

Con un'ovvia estensione della dimostrazione data dal prof. Cisotti per i tensori quadrupli di S_3 ⁽³⁾, si constata che:

(1) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(2) *Tensori isotropi*. Questi « Rendiconti », vol. XI, serie 6^a, I sem. 1930, pp. 727-731; *Tensori isotropi e tensori emisotropi*. Ibidem. pp. 917-920; *Tensori quadrupli isotropi*. Ibidem, pp. 1055-1058.

(3) Terza nota citata, N. I.

Sono nulle le componenti che contengono un numero dispari di volte uno stesso indice.

Da questa proprietà discende immediatamente che:

Non esistono tensori dispari isotropi ⁽¹⁾.

Si conclude quindi che nelle componenti non nulle gli indici si distribuiscono in gruppi di 2, 4 ... ecc. elementi tutti eguali, essendo gli elementi di uno stesso gruppo indici consecutivi o no. In particolare per un tensore doppio le componenti non nulle sono solo del tipo T_{hk} ⁽²⁾.

2. — SECONDA PROPRIETÀ.

Le componenti non nulle di un tensore isotropo non sono tutte distinte.

Consideriamo ad esempio un tensore quadruplo e scegliamo, per fissare le idee, la componente T_{1122} . Per essa la (2) diviene:

$$(2') \quad T_{1122} = T_{ijhk} \alpha_{i1} \alpha_{j1} \alpha_{h2} \alpha_{k2}.$$

Nel secondo membro della (2') non entrano che gli elementi delle prime due colonne del determinante delle α . Consideriamo allora una sostituzione ortogonale per cui sono nulle tutte le α delle prime due colonne ad eccezione delle seguenti:

$$(3) \quad \alpha_{p1} = \alpha_{q2} = 1 \quad (3).$$

Per essa il secondo membro della (2') si riduce a un unico termine e dà:

$$(4) \quad T_{1122} = T_{ppqq}.$$

Osservazione I. — Esistono sostituzioni ortogonali che soddisfano alle condizioni (3) per n qualunque.

Infatti per $n = 2$ si ha la sostituzione:

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} = 1, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = 0.$$

Per $n = 3$ basterà che siano nulli gli altri elementi delle prime due colonne e delle righe *pesima* e *qesima* e che, nella terza colonna, sia eguale ad 1 l'elemento che appartiene alla riga non ancora considerata, e gli altri siano nulli.

(1) Seconda Nota citata, N. 7. A quest'ultima conclusione si può giungere anche direttamente considerando la seguente sostituzione ortogonale: $\alpha_{ii} = -1$, $\alpha_{ik} = 0$ ($i \neq k$; $i, k = 1, 2, \dots, n$).

(2) Seconda Nota citata, N. 2.

(3) Dovrà essere necessariamente $p \neq q$ perchè altrimenti una riga del determinante delle α avrebbe due elementi eguali ad 1 e non si tratterebbe più di una sostituzione ortogonale. Potrà però essere $p = 1$ o $q = 2$. Se queste due ultime condizioni si verificassero contemporaneamente, la (4) non porterebbe a nessuna conclusione.

Osserviamo che nelle sostituzioni considerate in questo N, gli elementi che poniamo = 1 potrebbero anche essere posti, tutti o in parte, = -1.

Per $n > 3$ basterà che siano nulli gli altri elementi delle prime due colonne e delle righe *posima* e *qesima*, e che gli elementi del minore di ordine $n - 2$, complementare di quello comune alle due righe e alle due colonne considerate, siano elementi di una sostituzione ortogonale; in particolare si potranno scegliere eguali ad 1 gli elementi di una diagonale di tale minore, e gli altri tutti nulli.

Osservazione II. — La dimostrazione fatta sull'esempio considerato si può ripetere per qualunque componente di tensore m^{plo} quando gli indici di essa si distribuiscono in due soli gruppi di indici tutti eguali, qualunque sia la posizione degli indici che formano uno stesso gruppo. Ad esempio si potrà ripetere per $T_{11\ 11\ 22}, T_{12\ 12\ 11\ 22}$, ecc. e porterà alla conclusione che esse sono rispettivamente eguali a $T_{pp\ pp\ qq}, T_{pq\ pq\ pp\ qq}$, ecc.

È facile trovare le condizioni che dovranno sostituire le (3) per giungere ad una conclusione analoga alla (4) nel caso in cui il numero dei gruppi di indici tutti eguali sia $\neq 2$. Se esso è 1, se cioè la componente che si considera ha indici tutti eguali, le (3) saranno sostituite da un'unica condizione; in generale, il numero delle condizioni analoghe alle (3) eguaglierà il numero dei gruppi di indici tutti eguali.

Ora, poichè il numero delle condizioni analoghe alle (3) eguaglia il numero delle righe e delle colonne del determinante delle α , delle quali vengono fissati gli elementi nel modo esposto, così tale numero dovrà essere $\leq n$.

Questa condizione è evidentemente soddisfatta, perchè in nessun caso il numero dei gruppi di indici tutti eguali delle componenti di un tensore può superare n . Possiamo quindi concludere:

Sono eguali le componenti che si deducono l'una dall'altra mutando, in uno o più gruppi, il valore comune degli indici in modo che rimanga inalterato il numero degli indici che formano uno stesso gruppo e la posizione degli indici di ogni gruppo.

In particolare per un tensore doppio le componenti non nulle saranno tutte eguali⁽¹⁾. Per un tensore quadruplo esse saranno dei quattro tipi: $T_{pp\ pp}, T_{pp\ qq}, T_{pq\ pq}, T_{pq\ qp}$.

3. — TERZA PROPRIETÀ.

Le componenti distinte di un tensore isotropo sono legate da semplici relazioni lineari.

Incominciamo a considerare una componente che contenga un gruppo di quattro indici tutti eguali. Sia ad esempio un tensore sestuplo e scegliamo, per fissare le idee, la componente $T_{11\ 11\ 22}$. Per essa la (2) diviene:

$$(2'') \quad T_{11\ 11\ 22} = T_{ij\ bk\ rl} \alpha_{i1} \alpha_{j1} \alpha_{b1} \alpha_{k1} \alpha_{r2} \alpha_{l2}.$$

(1) Seconda Nota citata. Nn. 1 e 2.

Nel secondo membro della (2'') non entrano che elementi delle prime due colonne del determinante delle α . Consideriamo allora una sostituzione ortogonale per cui sono nulli tutti gli elementi delle prime due colonne ad eccezione dei seguenti:

$$(5) \quad \alpha_{p1} = \alpha_{q1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{22} = 1$$

con $p \neq q$ ed entrambi diversi da 2 (non è escluso che l'uno o l'altro possa essere uguale ad 1). Per essa il secondo membro della (2'') si riduce alla somma di quei termini in cui gli indici r ed l hanno entrambi il valore 2, e gli indici i, j, h, k hanno tutti e quattro il valore p , o tutti e quattro il valore q , o due (scelti in tutti i modi possibili) il valore p e gli altri due il valore q ; in ogni termine il prodotto delle α è uguale a $\frac{1}{4}$.

Ricordando la proprietà del N. 2 e sommando i termini eguali si ottiene:

$$T_{111122} = \frac{1}{2} (T_{pppp22} + T_{ppqq22} + T_{pqpq22} + T_{qqqq22})$$

da cui:

$$(6) \quad T_{111122} = T_{ppqq22} + T_{pqpq22} + T_{pqqp22}.$$

Osservazione I. — Esistono sostituzioni ortogonali che soddisfano alle condizioni (5) per n qualunque (purchè > 2 ⁽¹⁾).

Per $n = 3$ basta infatti che uno degli elementi α_{p3}, α_{q3} sia $\frac{1}{\sqrt{2}}$, l'altro $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e gli altri elementi siano nulli.

Per $n > 3$ basterà che nella colonna *resima* ($r > 2$ del resto qualunque) siano tutti nulli gli elementi ad eccezione di α_{pr}, α_{qr} , uno di questi sia $\frac{1}{\sqrt{2}}$, e l'altro $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, siano nulli i rimanenti elementi delle prime due colonne e delle tre righe considerate, e gli elementi del minore di ordine $n - 3$, complementare di quello comune alle righe e alle colonne considerate, siano elementi di una sostituzione ortogonale.

Osservazione II. — È facile trovare le condizioni che debbono sostituire le (5) per m qualunque, e che permettono di arrivare a una conclusione analoga alla (6) per una componente che contiene un gruppo di quattro indici

(1) Nel caso di $n = 2$ non esistono, del resto, componenti del tipo di quelle che figurano nel secondo membro della (6).

tutti eguali. In particolare per $m = 4$ basterà tener conto delle prime due (5), che potranno essere soddisfatte anche dagli elementi di una sostituzione ortogonale con $n = 2$.

Le relazioni analoghe alle (6) per $m = 4$ sono:

$$(6') \quad T_{rrrr} = T_{ppqq} + T_{pqpq} + T_{pqqp}$$

($p \neq q$, l'uno o l'altro potendo essere eguale ad r),

ed esprimono, per i tensori quadrupli isotropi, il legame tra le componenti a quattro indici tutti eguali e le componenti degli altri tre tipi ⁽¹⁾.

Passiamo ora a considerare le componenti che contengono un gruppo di 6 indici tutti eguali. Sia ad esempio un tensore sestuplo e scegliamo, per fissare le idee, la componente T_{iiiiii} . Per essa la (2) diviene:

$$(2''') \quad T_{iiiiii} = T_{ijhkr l} \alpha_{i i} \alpha_{j i} \alpha_{h i} \alpha_{k i} \alpha_{r i} \alpha_{l i}$$

Nel secondo membro della (2''') non entrano che elementi della prima colonna del determinante delle α . Consideriamo allora una sostituzione ortogonale che soddisfi alle prime due condizioni (5) (e abbia quindi nulli tutti gli altri elementi della prima colonna). Per essa il secondo membro della (2''') si riduce alla somma di quei termini in cui tutti gli indici $ijhkr l$ sono eguali a p , o tutti eguali a q , o due di essi (scelti in tutti i modi possibili) sono eguali a p e gli altri quattro eguali a q , o due di essi (scelti in tutti i modi possibili) sono eguali a q e gli altri quattro eguali a p ; in ogni termine il prodotto delle α è eguale a $\frac{1}{8}$.

Ma per la seconda proprietà i termini del secondo membro si distribuiranno in coppie di termini eguali, ogni termine di una coppia deducendosi dall'altro con lo scambio di p con q . Ne viene, eseguendo la somma dei termini eguali:

$$T_{iiiiii} = \frac{1}{4} T_{pppppp} + \frac{1}{4} S T_{ppqqqq}$$

la sommatoria del secondo membro contenendo i $\frac{6!}{2!4!} = 15$ termini che si ottengono da quello scritto permutandone gli indici in tutti i modi possibili. Da cui:

$$(7) \quad 3 T_{iiiiii} = S T_{ppqqqq}$$

Applicando ad ogni termine del secondo membro la formola corrispondente alla (6), ed osservando che in tal modo i 45 termini che vengono

(1) Terza Nota citata, N. 5. Questa proprietà, per quanto non esplicitamente enunciata dall'Autore, è contenuta nelle sue formole.

così a figurarvi, si distribuiscono in gruppi di tre termini eguali ⁽¹⁾, si ha in fine:

$$(8) \quad T_{i_1 i_1 i_1} = S T_{pp qq rr}$$

la sommatoria del secondo membro essendo ancora formata da 15 termini, le componenti distinte che si ottengono da quella scritta permutandone gli indici in tutti i modi possibili ⁽²⁾.

Con un procedimento ricorrente, simile a quello seguito negli esempi considerati, si giunge alla seguente conclusione:

Ogni componente che contiene un gruppo di 2s indici (s > 1) eguaglia la somma delle componenti distinte che si ottengono da essa sostituendo, in tutti i modi possibili, al gruppo considerato s gruppi di 2 indici ciascuno, in modo che non venga portata nessuna modificazione al numero e alla posizione degli indici che formano i rimanenti gruppi.

È facile determinare il numero delle componenti distinte che figureranno nella sommatoria del secondo membro della formola analoga alla (8).

Infatti, permutando i 2s indici $i_1 i_1 i_2 i_2 \dots i_s i_s$ in tutti i modi possibili si avranno $\frac{2s!}{2^s}$ componenti. Esse però non sono tutte distinte; fissatane infatti una, sono eguali ad essa, per la seconda proprietà, tutte quelle che si ottengono eseguendo una qualunque delle $s!$ permutazioni sui gruppi di indici. Le componenti distinte saranno dunque:

$$\frac{2s}{2^s s!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2s-1) \cdot 2s}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2s-2) \cdot 2s} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2s-1)$$

Evidentemente se una componente contiene diversi gruppi con più di due indici eguali, la proprietà analoga alla (8) si potrà applicare più volte. Così ad esempio si avrà:

$$\begin{aligned} T_{pp pp qq qq} &= T_{pp rr qq qq} + T_{pr pr qq qq} + T_{pr rp qq qq} \\ &= T_{pp rr qq ss} + T_{pp rr qs qs} + T_{pp rr qs sq} + T_{pr rp qq ss} + T_{pr pr qs qs} + \\ &\quad + T_{pr pr qs sq} + T_{pr rp qq ss} + T_{pr rp qs qs} + T_{pr rp qs sq} \end{aligned}$$

(1) Basta pensare ad esempio che una componente del tipo $T_{pp qq rr}$ proverrà sia dalla $T_{pp qq qq}$ che dalla $T_{qq pp qq}$ che dalla $T_{qq qq pp}$.

(2) Che il numero delle componenti distinte sia 15 risulta dal fatto che, scritte le $\frac{6!}{2! 2! 2!} = 90$ componenti che si otterrebbero permutando in tutti i modi possibili gli indici $pp qq rr$, esse si distribuiranno in gruppi di $3! = 6$ termini eguali, che si ottengono l'uno dall'altro permutando in tutti i modi possibili i 3 gruppi di indici che vi figurano. Così sarebbero eguali ad esempio $T_{pp qq rr}$, $T_{pp rr qq}$, $T_{qq pp rr}$, $T_{qq rr pp}$, $T_{rr pp qq}$, $T_{rr qq pp}$.

Matematica (Geometria). — *Sui multilateri sghembi connessi.*
Nota I⁽¹⁾ di MARGHERITA PIAZZOLLA-BELOCH, presentata dal
Socio G. CASTELNUOVO.

1. Data l'importanza dei multilateri sghembi connessi per il problema della classificazione delle curve algebriche sghembe che ancora attende la sua soluzione definitiva, è interessante studiare i diversi tipi distinti di multilateri sghembi d'ordine n e genere p , studio che, a quanto io sappia, non è ancora stato fatto.

2. Ricordiamo che si dice n -latero di genere effettivo p , un sistema connesso di n rette (*lati*) con $v = n + p - 1$ ($p \geq 0$) intersezioni semplici (*vertici*), tali cioè che da una retta qualunque del sistema si possa giungere attraversando questi punti ad ogni altra retta del sistema. I punti di intersezione vengono cioè considerati non come punti doppi, ma come punti di collegamento.

Accanto al genere effettivo di un n -latero connesso, si considera anche il genere virtuale, quando non tutti i vertici dello n -latero vengono considerati come punti di collegamento, ma soltanto un numero sufficiente per mantenere la connessione. Se $n + q - 1$ è tale numero ($q < p$), q si dice genere virtuale dello n -latero⁽²⁾.

Due n -lateri si dicono isomorfi⁽³⁾, se si possa porre tra i loro lati una corrispondenza biunivoca tale che a due lati incidenti dell'uno corrispondano due lati incidenti dell'altro e viceversa.

Indicando con a_1, a_2, \dots, a_n i lati di un n -latero, si potranno indicare con la notazione $(a_i a_j)$ i suoi vertici di collegamento. Lo n -latero sarà allora pienamente determinato enumerando questi vertici. Così p. es. lo schema $(a_1 a_2), (a_2 a_3), \dots, (a_{n-1} a_n)$ indica un n -latero di genere virtuale (od effettivo) zero.

Un n -latero connesso è sghembo, se non tutti i suoi lati (e vertici) giacciono in uno stesso piano.

Dal punto di vista della classificazione delle curve algebriche sghembe ha speciale importanza lo studio degli n -lateri connessi, in cui tutti i vertici siano punti di collegamento.

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 novembre 1930.

(2) V. F. SEVERI, *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema di esistenza di Riemann* (« Rend. R. Acc. Lincei », 1915), e F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Teubner, 1921, Anhang G.).

(3) V. loc. cit. (2).

3. Sia M un n -latero con v vertici, di cui $s (\leq v)$ siano punti di collegamento. Esso avrà quindi il genere virtuale (o effettivo)

$$p = s - (n - 1).$$

Indicando con a_1, a_2, \dots, a_n i lati e con x_1, x_2, \dots, x_n rispettivamente il numero dei vertici di collegamento, giacenti sopra ognuno di essi, dovrà evidentemente essere $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2s$ (poichè nella somma del primo membro ogni vertice viene contato due volte) ossia

$$(I) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2p + 2n - 2.$$

Per determinare tutti i possibili n -lateri connessi, non isomorfi, con $s = p + n - 1$ vertici di collegamento, si tratterà, assegnati n e p , di determinare le soluzioni di questa equazione, in numeri interi e positivi, e scrivere lo schema dei vertici corrispondente.

4. *Ordine di connessione di un n -latero.* Dato un n -latero M , di genere effettivo (o virtuale) p , se si impone un suo vertice, ossia non si considera come punto di collegamento, ma come punto doppio vero e proprio, e si staccano ivi l'una dall'altra le due rette che vi passano, due casi si possono presentare: o si rompe la connessione dello n -latero, oppure no.

Se per almeno un vertice dello n -latero si presenta il primo caso, chiamo lo n -latero *semplicemente connesso*; (se si presenta per tutti i vertici, lo chiamo *semplicemente connesso in modo assoluto*). Se per tutti i vertici si verifica il secondo caso dico lo n -latero *più volte connesso*.

In generale dico che un n -latero ha l'**ordine di connessione** i , se $i - 1$ vertici (o meno) comunque scelti, imposti, non ne spezzano mai la connessione, ma esiste almeno un gruppo di i vertici che, imposti, spezzino la connessione. Chiamo un n -latero i volte connesso in modo assoluto, se tutti i gruppi di i vertici, comunque scelti, imposti, ne spezzano la connessione, ma $i - 1$ vertici (o meno), imposti, non la spezzino mai.

È evidente che, se l'ordine di connessione è i , sopra ogni lato vi saranno almeno i vertici, $x_r \geq i$ ($r = 1, 2, \dots, n$).

Ne segue facilmente, servendosi della (I) del numero precedente, il teorema:

Se un n -latero ha ordine di connessione $i (\geq 2)$, esso è di genere p non inferiore a $\frac{(i-2)n}{2} + 1$. (Se l'ordine di connessione è 1, p può essere qualunque).

Segue che se l'ordine di connessione è 2, dev'essere $p \geq 1$, se l'ordine di connessione è 3, p non è inferiore a $\frac{n}{2} + 1$, se l'ordine di connessione è 4, deve essere $p \geq n + 1$, ecc.

Segue ancora che se $p < \frac{n}{2} + 1, i \leq 2$; se $p < n + 1, i \leq 3$, ecc. — ma non viceversa. Dunque per $p \leq n - 3$ ($n \geq 4$) deve essere $i \leq 3$ (se $n \geq 8$), $i \leq 2$ (se $n \leq 7$), ma non viceversa. (Se $n = 3$ è evidentemente $i \leq 2$).

Per analogia con la teoria delle curve algebriche, dirò *n-latero non speciale* un *n-latero* di genere effettivo (o virtuale) p , per cui $p \leq n - 3$, e *n-latero speciale* un *n-latero* per cui $p > n - 3$.

La proprietà precedente può allora enunciarsi così:

Un n-latero connesso non speciale ha ordine di connessione $i \leq 3$ (se $n \geq 8$), e $i \leq 2$ (se $n < 8$).

5. È noto⁽¹⁾ che se ogni vertice (di collegamento), imposto, rompe la connessione, ossia, secondo le definizioni precedenti, se lo *n-latero* è semplicemente connesso in modo assoluto, esso è di genere effettivo (o virtuale) zero.

Viceversa è facile dimostrare che se un *n-latero* è di genere effettivo (o virtuale) zero, ogni vertice (di collegamento), imposto, ne spezza la connessione, in altre parole lo *n-latero* è semplicemente connesso in modo assoluto.

Intanto dal teorema del numero precedente segue che se nessun vertice (di collegamento), imposto, spezza la connessione di un *n-latero*, lo *n-latero* è di genere effettivo (o virtuale) $p > 0$.

Ciò posto, si supponga, dato un *n-latero* di genere effettivo (o virtuale) p , con v vertici di collegamento, che vi sia un certo numero di vertici, di cui ognuno, imposto, non rompa la connessione, mentre ognuno degli altri, imposto, la spezzi. Sia $t < v$, il numero di questi ultimi. Imponendo questi punti, lo *n-latero* si spezzerà in $t + 1$ pezzi M_1, M_2, \dots, M_{t+1} , di cui non tutti si possono comporre di singole rette, perchè altrimenti ogni vertice dello *n-latero* primitivo spezzerebbe la connessione, contro l'ipotesi.

Diciamo rispettivamente v_1, v_2, \dots, v_{t+1} il numero dei vertici (di collegamento) di ognuno di essi ($v_r = 0$ per le singole rette M_r) e n_1, n_2, \dots, n_{t+1} rispettivamente il numero dei lati appartenenti ad ognuno ($n_r = 1$ per le singole rette M_r).

Siccome t è il numero dei vertici dello *n-latero* primitivo già considerati e che non appartengono ai singoli pezzi in cui lo *n-latero* si è spezzato, e per le ipotesi fatte non vi sono lati ulteriori, si avrà

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_{t+1} + t$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_{t+1}$$

Quindi

$$\begin{aligned} p &= v - (n - 1) = v_1 + v_2 + \dots + v_{t+1} + t - (n_1 + n_2 + \dots + n_{t+1} - 1) \\ &= v_1 - n_1 + 1 + v_2 - n_2 + 1 + \dots + v_{t+1} - n_{t+1} + 1 = \\ &= p_1 + p_2 + \dots + p_{t+1} \end{aligned}$$

(1) V. F. SEVERI, loc. cit.

dove p_1, p_2, \dots, p_{l+1} sono rispettivamente i generi di M_1, M_2, \dots, M_{l+1} ($p_r = 0$, se M_r si compone di una singola retta).

Ora, per quel che sopra si è detto, tra M_1, M_2, \dots, M_{l+1} vi deve essere almeno un multilatero propriamente detto, sia p. es. M_1 , di cui, per le ipotesi fatte, nessun vertice (di collegamento), imposto, spezza la connessione. Sarà quindi, per una proprietà già dimostrata, $p_1 > 0$, e per conseguenza $p > 0$.

Segue (c. d. d.) che per un n -latero di genere effettivo (o virtuale) $p = 0$, ogni vertice rompe la connessione, perchè se ciò non fosse, sarebbe, per quel che precede, $p > 0$.

Riassumendo possiamo dire:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un n -latero sia di genere effettivo (o virtuale) zero, è che esso sia semplicemente connesso in modo assoluto.

6. I risultati precedenti, per $p > 0$, si possono anche enunciare così:

Un n -latero di genere effettivo (o virtuale) $p > 0$ o è più volte connesso, oppure si può spezzare in multilateri parziali più volte connessi, più (eventualmente) qualche singola retta.

L'esempio più semplice di n -latero di genere effettivo p più volte connesso (sghebo per $n > 3$) è la *catena chiusa di rette*, composta di n rette di cui ognuna sega la precedente ($p = 1$), di cui cioè lo schema dei vertici è $(a_1 a_2), (a_2 a_3), \dots, (a_{n-1} a_n), (a_n a_1)$.

Un altro esempio semplice viene offerto da ciò che chiamo *reticolato sghebo*, n -latero composto di $n = l + m$ rette appartenenti l a un sistema e m all'altro sistema di generatrici di una quadrica.

Lo indicherò con $[l, m]$. Esso ha $v = lm$ vertici effettivi e ordine $n = l + m$, e perciò genere effettivo $p = lm - l - m - 1$.

8. *Multilateri di genere effettivo p .* — In ciò che segue mi limito per semplicità ai multilateri di ordine n e genere effettivo p , di cui cioè tutti i vertici siano punti di collegamento.

Riprendiamo nel caso in esame la (1) del n. 3

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n + 2p - 2$$

adoperando le stesse notazioni di allora, soltanto che ora tutti i vertici sono di *collegamento*.

Un n -latero semplicemente connesso, di genere (sottinteso effettivo, come in tutto ciò che segue) $p > 0$, se ha qualche lato a_r su cui giace un sol vertice, si può spezzare in due pezzi, il primo composto della singola retta a_r , il secondo di un multilatero di ordine $n - 1$ e dello stesso genere, come si vede subito. Dallo n -latero si potranno così staccare tutti i lati, su ognuno dei quali giace un solo vertice. Se essi sono in numero di r , resterà un multilatero (connesso) di ordine $n - r$ e dello stesso genere p dello n -latero di partenza, su cui si potrà eventualmente operare nello stesso modo;

e così si potrà continuare fino a giungere ad un multilatero (connesso) che non abbia alcun lato con un solo vertice.

Lo studio degli n -lateri di genere $p > 0$ semplicemente connessi si può dunque ricondurre allo studio di multilateri dello stesso genere p e di un numero minore di lati, contenenti ognuno almeno due vertici.

Per questi n -lateri si ha

$$x \leq 2p.$$

Infatti dalla (1) segue, poichè per ipotesi $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_n \geq 2$

$$2n + 2p - 2 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1 + 2(n-1)$$

da cui segue la proprietà che si trattava di dimostrare.

9. *Multilateri d'ordine n e di genere $p = 0, 1, 2, 3, \dots$.*

Per $p = 0$ la (1) del n. 3 diventa

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n - 2 \quad (x_1 \leq n - 1)$$

le cui soluzioni in numeri interi e positivi sono

- a) $x_1 = n - 1, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$
- b) $x_1 = n - 2, x_2 = 2, x_3 = \dots = x_n = 1$
- c) $x_1 = n - 3, x_2 = 3, x_3 = \dots = x_n = 1$
- d) $x_1 = n - 3, x_2 = x_3 = 2, x_4 = \dots = x_n = 1$
- e) $x_1 = n - 4, x_2 = 4, x_3 = x_4 = \dots = x_n = 1$
- f) $x_1 = n - 4, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = \dots = x_n = 1$
- g) $x_1 = n - 4, x_2 = x_3 = x_4 = 2, x_5 = \dots = x_n = 1$
-
-
- l) $x_1 = 2, x_2 = x_3 = \dots = x_{n-2} = 2, x_{n-1} = x_n = 1.$

Lo schema dei vertici per ognuno di questi tipi di n -lateri di genere zero si determina subito; ed è rispettivamente

- a) $(a_1 a_2), (a_1 a_3), \dots, (a_1 a_n)$
- b) $(a_1 a_2), (a_1 a_3), \dots, (a_1 a_{n-1}), (a_2 a_n)$
- c) $(a_1 a_2), (a_1 a_3), \dots, (a_1 a_{n-2}), (a_2 a_{n-1}), (a_2 a_n)$
- d) $(a_1 a_2), (a_1 a_3), \dots, (a_1 a_{n-2}), (a_2 a_{n-1}), (a_3 a_n)$
- e) $(a_1 a_2), (a_1 a_3), \dots, (a_1 a_{n-3}), (a_2 a_{n-2}), (a_2 a_{n-1}), (a_2 a_n)$
- f) $(a_1 a_2), (a_1 a_3), \dots, (a_1 a_{n-3}), (a_2 a_{n-2}), (a_2 a_{n-1}), (a_3 a_n)$
- g) $(a_1 a_2), (a_1 a_3), \dots, (a_1 a_{n-3}), (a_2 a_{n-2}), (a_3 a_{n-1}), (a_4 a_n)$
-
-
- l) $(a_1 a_2), (a_2 a_3), (a_3 a_4), \dots, (a_{n-2} a_{n-1}), (a_1 a_n).$

Per $p = 1$, per l'osservazione del n. 8, basta studiare n -lateri tali che sopra ogni lato siano situati almeno due vertici ($x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_n \geq 2$).

Per questi n -lateri si ha (v. n. 8)

$$x_1 \leq 2.$$

La (1) del n. 3, per $p = 1$ diventa

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n$$

la cui unica soluzione in numeri interi e positivi è

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 2$$

che corrisponde alla *catena chiusa di rette*.

Ogni n -latero di genere effettivo $p = 1$ si può dunque ricondurre (col procedimento del n. 8) ad una *catena chiusa di rette*

$$(a_1 a_2), (a_2 a_3), \dots, (a_{n-1} a_n), (a_n a_1).$$

Per $p = 2$, per l'osservazione del n. 8, basta studiare n -lateri su ogni lato dei quali siano situati almeno due vertici ($x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_n \geq 2$). Siccome per questi n -lateri si ha $x_1 \leq 4$ (v. n. 8), le soluzioni della (1) del n. 3 per $p = 2$, (in numeri interi e positivi) sono

$$x_1 = 4, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 2$$

$$x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = x_4 = \dots = x_n = 2$$

a cui corrispondono due tipi non isomorfi di n -lateri di genere $p = 2$, che hanno per schema dei vertici rispettivamente

$$1) (a_1 a_2), (a_1 a_3), (a_1 a_4), (a_1 a_5), (a_2 a_6), (a_6 a_7), \dots, (a_h a_3), (a_4 a_{h+1}), \\ (a_{h+1} a_{h+2}), \dots, (a_n a_5)$$

$$2) (a_1 a_2), (a_1 a_3), (a_1 a_4), (a_2 a_5), (a_2 a_6), (a_3 a_7), (a_7 a_8), \dots, (a_k a_4), \\ (a_5 a_{k+1}), (a_{k+1} a_{k+2}), \dots, (a_n a_6).$$

Nel caso 2) per $n = 5$ si ha lo schema

$$(a_1 a_2), (a_1 a_3), (a_1 a_4), (a_2 a_5), (a_3 a_5), (a_4 a_5).$$

Per $p = 3$, analogamente ai casi precedenti, ci possiamo limitare a n -lateri per cui $x_1 \geq 2, \dots, x_n \geq 2$.

Per questi n -lateri (v. n. 8) si ha

$$x_1 \leq 6.$$

Le soluzioni della (1) del n. 3, per $p = 3$ (in numeri interi e positivi) sono quindi

$$x_1 = 6, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 2$$

$$x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = x_4 = \dots = x_n = 2$$

$$x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = x_4 = \dots = x_n = 2$$

$$x_1 = 4, x_2 = x_3 = 3, x_4 = \dots = x_n = 2$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 3, x_5 = x_6 = \dots = x_n = 2$$

che corrispondono ad altrettanti tipi non isomorfi di n -lateri di genere (effettivo) $p = 3$, di ognuno dei quali facilmente si scrive lo schema dei vertici.

Matematica. — *Une démonstration du théorème de Jordan.*
Nota ⁽¹⁾ di E. ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

NOTATIONS. — R désigne le plan euclidien contenant tous nos ensembles. AB désigne la partie commune aux ensembles A et B . Un *arc simple* (une *courbe simple*) est l'image biunivoque et bicontinue d'un segment (d'une circonférence). C étant un arc simple, C^* s'en obtient en omettant les deux extrémités. B étant un ensemble ouvert, $F(B)$ en désigne la frontière.

LEMME 1. — Soit A un ensemble fermé et borné contenant un segment S . Supposons que l'ensemble $A - S$ soit situé à une distance > 0 de chaque point de S^* . Soit V une composante de $R - A$. Alors $S^* \cdot F(V) \neq \emptyset$ entraîne que S est contenu dans $F(V)$. Le nombre de telles composantes V est égal à *un* ou à *deux*. Le second cas a lieu si et seulement si les deux extrémités de S appartiennent à la même composante de $A - S^*$. Dans le second cas, en désignant par V_1, V_2 les deux composantes V , tous les points de $R - S$ suffisamment voisins à S^* appartiennent à $V_1 + V_2$ et chacun des deux ensembles V_1, V_2 est situé (au voisinage de S^*) entièrement d'un côté de S^* ⁽²⁾.

LEMME 2. — Soit Γ une courbe simple contenant un segment S . Il y a précisément deux composantes de $R - \Gamma$ telles que leur frontière coïncide avec Γ . *Démonstration.* L'ensemble $\Gamma - S^*$ étant connexe et à une distance > 0 de chaque point de S^* , d'après le lemme 1 il existe précisément deux

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1930.

(2) La démonstration se trouve essentiellement dans le § 2 de la Note de M. BROUWER *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes* (« Math. Ann. » 69, 1910, p. 171).

composantes V de $R - \Gamma$ dont la frontière *contient* S ; en outre, d'après le même lemme, les deux extrémités de S appartiennent à la même composante de $F(V) - S^*$ (contenu dans $\Gamma - S^*$), d'où il résulte que $F(V) = \Gamma$.

THÉORÈME 1. — Soit Γ une courbe simple; soit V une composante de $R - \Gamma$. Alors $F(V) = \Gamma$. *Démonstration.* Evidemment il existe une ligne brisée S sans point multiple dont les extrémités a, b appartiennent à Γ , S^* étant contenu dans V . Les points a, b divisent Γ en deux arcs simples C_1, C_2 . Posons $\Gamma_i = S + C_i$ ($i = 1, 2$). D'après le lemme 2, il y a deux composantes de $R - \Gamma_i$ dont la frontière coïncide avec Γ_i ; désignons les par V_i, W_i . La partie connexe C_2^* de $R - \Gamma_1$ appartenant entièrement à une composante de $R - \Gamma_1$, on peut supposer que $V_1 \cdot C_2^* = 0$ et pareillement $V_2 \cdot C_1^* = 0$. Si l'on avait $V_1 \cdot V_2 \neq 0$, on arriverait à la contradiction $V_1 = V_2$, car chacun des deux domaines connexes V_1, V_2 est disjoint à la frontière de l'autre. Donc $V_1 \cdot V_2 = 0$. D'après le lemme 1, on en déduit sans peine que l'ensemble $K = V_1 + V_2 + S^*$ est connexe et ouvert; donc K fait partie de V . Evidemment $F(K)$ fait partie de Γ . Or on a précisément $F(K) = \Gamma$. En effet, prouvons p. ex. qu'un point α appartenant à C_1^* est agrégé à $F(K)$. Evidemment, il existe un entourage O de α disjoint à $V_2 + S^*$; donc $O \cdot K = O \cdot V_1$. Or α appartient à $F(V_1)$; donc $O \cdot V_1 = O \cdot K$ rencontre V_1 et par suite K . L'entourage O pouvant être supposé arbitrairement petit, il en résulte bien que le point α appartient à $F(K)$. Il reste à prouver que $V = K$ (car $F(K) = \Gamma$). Dans le cas contraire, il existerait dans V une ligne brisée L joignant un point de K à un point de $V - K$; la ligne L rencontrerait $F(K) = \Gamma$, ce qui est absurde, car $V \cdot \Gamma = 0$.

THÉORÈME 2. — Soit Γ une courbe simple. Alors $R - \Gamma$ a au moins deux composantes. *Démonstration.* Dans le cas contraire on aurait, en gardant les notations précédentes, $V = K = R - \Gamma$, d'où $O \cdot V_1 = O \cdot K = O \cdot (R - \Gamma)$ et par suite $O \cdot W_1 = 0$. Or cela est absurde, car le point α appartient à $\Gamma = F(W_1)$.

THÉORÈME 3. — Soit Γ une courbe simple. Alors $R - \Gamma$ a au plus deux composantes. *Démonstration.* Soient V, V', V'' trois composantes différentes de $R - \Gamma$. Par rapport à V , gardons les notations de la démonstration du théorème 1. Donnons aux symboles $S', a', b', C'_1, C'_2, \Gamma'_1, V'_1$ par rapport à V' la même signification que $S, a, b, C_1, C_2, \Gamma_1, V_1$ ont par rapport à V . De la relation $F(V) = \Gamma$ il résulte sans peine⁽¹⁾ que l'on peut s'arranger de manière que C'_1 fasse partie de C_1^* . Soit O un entourage suffisamment petit d'un point α choisi sur C'_1 (donc sur C_1^*). D'après

(1) V. BROUWER, loc. cit., § 3.

la démonstration du théorème 1, on a $O \cdot V = O \cdot V_1$, $O \cdot V' = O \cdot V'_1$. Or si l'on répète la démonstration de la relation $O \cdot V = O \cdot V_1$ en y remplaçant Γ, V, S respectivement par Γ_1, W_1, S' ⁽¹⁾, on obtient la relation $O \cdot W_1 = O \cdot V'_1$. La courbe Γ_1 contenant un segment, d'après le lemme 2 et le théorème 1 V_1 et W_1 sont les *seules* composantes de $R - \Gamma_1$. Donc $O V_1 + O \cdot W_1 = O \cdot (R - \Gamma_1)$, d'où $O \cdot V + O \cdot V' = O \cdot (R - \Gamma)$, d'où $O \cdot V'' = 0$, ce qui contredit au théorème 1.

Matematica. — *Sur la notion de la moyenne.* Nota ⁽²⁾ di A. KOLMOGOROFF, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Tous les types de moyennes connus, comme ceux de moyennes arithmétique, quadratique, géométrique, harmonique etc., sont de la forme

$$(1) \quad M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi \left\{ \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)}{n} \right\},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction continue croissante et $\psi(\chi)$ la fonction inverse. Je me propose, dans cette Note, de démontrer que chaque type de moyenne, qui satisfait aux quelques conditions (*axiomes de la moyenne*) assez naturelles, est nécessairement de la forme (1).

Je suppose dans ce but qu'une fonction

$$M_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ou simplement $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, est définie pour chaque $n \geq 1$ et toutes les valeurs des x_1, x_2, \dots, x_n comprises dans un intervalle

$$a \leq x \leq b.$$

Le résultat suivant subsiste encore pour des moyennes définies dans des intervalles infinis $-\infty < x < +\infty$, $a \leq x < +\infty$, $-\infty < x \leq b$, comme cela a lieu pour la moyenne arithmétique ou géométrique; la démonstration doit être un peu modifiée dans ces cas.

La suite des fonctions M_n détermine *un type régulier* de la moyenne, si les conditions ci-dessous sont vérifiées:

I. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est continue et croissante par rapport a chaque variable x_i .

(1) Ceci est permis. En effet l'ensemble S^* fait partie de V' et est par suite disjoint à l'ensemble V_1 contenu dans V , ainsi qu'à l'ensemble Γ_1 contenu dans $\Gamma + V$. L'ensemble S^* étant connexe, il appartient donc à W_1 , car $R - \Gamma_1$ n'a aucune composante différente de V_1 et W_1 .

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1930.

II. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une fonction symétrique.

III. La moyenne de grandeurs égales entre elles est égale à leur valeur commune :

$$M(x, x, \dots, x) = x.$$

IV. On peut remplacer un groupe partiel de grandeurs par leur moyenne partielle sans changer la moyenne générale :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = M_{m+n}(x, x, \dots, x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

où

$$x = M(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

THÉORÈME. — *Sous les conditions I-IV, la moyenne $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est de la forme (I), où $\varphi(x)$ est une fonction continue croissante et $\psi(\zeta)$ sa fonction inverse.*

Démonstration. — Soit $M(m \cdot x, n \cdot y)$ la moyenne de m grandeurs égales à x et de n grandeurs égales à y :

$$(2) \quad M(m \cdot x, n \cdot y) = M(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ x_1 = x_2 = \dots = x_m = x, \quad y_1 = y_2 = \dots = y_n = y.$$

On a, d'après IV et III,

$$M(pm \cdot x, pn \cdot y) = M\{p \cdot M(m \cdot x, n \cdot y)\} = M(m \cdot x, n \cdot y).$$

Donc, si

$$mn' = nm'$$

on aura aussi

$$(3) \quad M(m \cdot x, n \cdot y) = M(mn' \cdot x, nn' \cdot y) = M(nm' \cdot x, nn' \cdot y) = M(m' \cdot x, n' \cdot y).$$

Nous pouvons définir maintenant pour chaque nombre rationnel ζ ,

$$0 \leq \zeta = \frac{p}{q} \leq 1,$$

la fonction $\psi(\zeta)$ comme

$$(4) \quad \psi(\zeta) = M\{p \cdot b, (q - p) \cdot a\}.$$

Cette définition est correcte, puisque on a pour deux représentations différentes

$$\zeta = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$$

du nombre ζ l'égalité

$$p(q' - p') = (q - p)p'$$

et l'on n'obtient ainsi, d'après (3), qu'une seule valeur pour $\psi(\zeta)$. La fonction $\psi(\zeta)$ ainsi définie pour des ζ rationnels est croissante. En effet, on a pour $\zeta' > \zeta$, en portant au dénominateur commun,

$$\zeta' = \frac{p'}{q} \quad , \quad \zeta = \frac{p}{q} \quad , \quad p' > p;$$

on obtient donc en vertu de la condition de monotonie de la moyenne (I) la relation

$$\psi(\zeta') = M\{p' \cdot b, (q - p') \cdot a\} > M\{p \cdot b, (q - p) \cdot a\} = \psi(\zeta).$$

Il en résulte que la fonction inverse $\varphi(x)$ est univoquement définie pour toutes les valeurs $x = \psi(\zeta)$ avec ζ rationnel, elle est d'ailleurs une fonction croissante continue.

On peut sans peine calculer la moyenne $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour des valeurs x_i de la forme $x_i = \psi(\zeta_i)$, où les ζ_i sont rationnels. On a, en effet, en portant les ζ_i au dénominateur commun,

$$\zeta_i = \frac{p_i}{q},$$

$$x_i = M\{p_i \cdot b, (q - p_i) \cdot a\},$$

$$\begin{aligned} (5) \quad M(x_1, x_2, \dots, x_n) &= M(q \cdot x_1, q \cdot x_2, \dots, q \cdot x_n) = \\ &= M\{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \cdot b, (nq - p_1 - p_2 - \dots - p_n) \cdot a\} = \\ &= \psi\left(\frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{nq}\right) = \psi\left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n}{n}\right) = \\ &= \psi\left\{\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)}{n}\right\}. \end{aligned}$$

La formule (I) se trouve ainsi démontrée pour des valeurs de variables de la forme spéciale indiquée.

Nous démontrerons maintenant que la fonction $\psi(\zeta)$ est continue en chaque point y , $0 \leq y \leq 1$, rationnel ou irrationnel. Supposons au contraire, qu'il y a un point y de discontinuité pour $\psi(\zeta)$. Il existe dans ce cas, si $y \neq 0$, $y \neq 1$, des valeurs limites

$$\psi(y - 0) = u \quad , \quad \psi(y + 0) = v \quad , \quad u < v.$$

On a, pour deux points rationnels ζ_1 et ζ_2 , en vertu de (5)

$$M\{\psi(\zeta_1), \psi(\zeta_2)\} = \psi\left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\right).$$

Si l'on fait \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 converger vers y , le premier point restant toujours à gauche, le second à droite de y , on a évidemment

$$\lim \psi\left(\frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2}\right) = M(u, v) > u.$$

On peut cependant faire cela d'une telle manière que $\frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2}$ soit toujours à gauche de y . On aura dans ce cas

$$\lim \psi\left(\frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2}\right) = u.$$

La contradiction obtenue démontre, que la supposition de la discontinuité dans le point y était impossible. La conclusion analogue subsiste aussi pour les points $y = 1$ et $y = 0$.

Nous voyons maintenant que les valeurs $x = \psi(\tilde{x})$ correspondant aux \tilde{x} rationnels forment un ensemble partout dense dans l'intervalle entre $a = \psi(0)$ et $b = \psi(1)$. On peut donc définir les fonctions $\psi(\tilde{x})$ et $\varphi(x)$ par continuité pour tous les points des intervalles respectifs $0 \leq \tilde{x} \leq 1$ et $a \leq x \leq b$. Du reste la formule (5), s'étend, par continuité, à toutes les valeurs des x , $a \leq x \leq b$, ce qui démontre notre théorème.

Matematica. — *Sur une généralisation de la sommation de Cesàro.* Nota ⁽¹⁾ di NIKOLA OBRECHKOFF, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Soit p_n des nombres positifs arbitraires. Si pour la série

$$(1) \quad a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

la suite $b_n = \frac{1}{p_n} \sum_{\mu=0}^n p_{n-\mu} a_\mu$ tend vers une limite S quand $n \rightarrow \infty$, nous disons que la série (1) est *sommable (p) avec la somme S*. D'après un théorème connu de Toeplitz ⁽²⁾ les conditions nécessaires et suffisantes pour que chaque série convergente soit sommable (p) avec la même somme sont

$$\alpha) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}}{p_n} = 1$$

$$\beta) \quad \sum_{n=1}^m |p_n - p_{n-1}| = O(p_m).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1930.

(2) O. TOEPLITZ, *Prace Matematyczno-Fizyczne*, 22, 1911, pp. 113-119.

Si $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$, la condition β) sera satisfaite d'elle même. Nous étudions les sommation (p) , en supposant que p_n satisfont seulement à la condition α) et la série Σp_n est divergente. La sommation classique de Césaro (C, γ) , $\gamma > -1$, est un cas particulier, parce qu'alors p_n est égal à $A_n^\gamma = \binom{n+\gamma}{n} > 0$ et $\frac{A_n^\gamma}{A_{n-1}^\gamma} \rightarrow 1$.

Dans cette Note nous démontrons que la sommation (p) satisfait à toutes les conditions d'un procédé général de sommation des séries divergentes, d'où découle son importance.

I. Si la série (1) est sommable (p) , la série

$$(2) \quad 0 + a_0 + a_1 + \dots$$

sera aussi sommable (p) avec la même somme et réciproquement.

Désignons par b_n les moyennes pour la série (1) et par b'_n pour la série (2) . Alors on a

$$b'_n = \frac{1}{p_n} (p_n \cdot 0 + p_{n-1} a_0 + \dots + p_0 a_{n-1}) = b_{n-1} \frac{p_{n-1}}{p_n}.$$

Il s'ensuit à cause de α)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

ce qui démontre le théorème.

II. Si la série (1) est sommable (p) avec la somme S_1 et si q_n sont des nombres positifs, tels que $\frac{q_{n-1}}{q_n} \rightarrow 1$, $\Sigma q_n = \infty$, la série (1) sera aussi sommable (r) avec la somme S , où

$$r_n = p_n q_0 + p_{n-1} q_1 + \dots + p_0 q_n.$$

Désignons par

$$s_n = \sum_{\mu=0}^n p_{n-\mu} a_\mu, \quad b_n = \frac{s_n}{p_n},$$

$$t_n = \sum_{\mu=0}^n r_{n-\mu} a_\mu, \quad \delta_n = \frac{t_n}{r_n}.$$

A cause de la relation $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} = 1$ les séries

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = p(x)q(x),$$

sont convergentes pour $|x| < 1$. On a

$$p(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

d'où l'on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n = r(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = q(x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

On en déduit la formule

$$(3) \quad t_n = s_n q_0 + s_{n-1} q_1 + \dots + s_0 q_n,$$

qu'on peut obtenir aussi directement. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = S$, il faut démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = S$.

D'abord nous démontrons que

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} = \infty.$$

En effet soit P un nombre positif arbitrairement grand. Soit m tel que $p_1 + p_2 + \dots + p_m > P$. Alors on a, si $n > m$,

$$\frac{r_n}{q_n} = p_0 + p_1 \frac{q_{n-1}}{q_n} + \dots + p_n \frac{q_0}{q_n} > p_0 + p_1 \frac{q_{n-1}}{q_n} + \dots + p_m \frac{q_{n-m}}{q_n},$$

d'où il suit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} \geq p_0 + p_1 + \dots + p_m > P,$$

ce qui démontre la vérité de (4). Posons alors

$$s_n = S p_n + u_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{p_n} = 0,$$

on aura à cause de (3)

$$\delta_n = S + \delta'_n, \quad \delta'_n = \frac{1}{r_n} \sum_{\mu=0}^n q_{n-\mu} u_\mu.$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire et soit N tel que pour $n > N$ on ait $|u_n| < \varepsilon p_n$. Nous aurons

$$|\delta'_n| < \frac{q_n}{r_n} |u_0| + \dots + \frac{q_{n-N}}{r_n} |u_N| + \varepsilon \frac{q_{n-N-1} p_{N+1} + \dots + q_0 p_n}{r_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\delta'_n| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

En particulier on a immédiatement le théorème connu que si une série est sommable (C, α) , $\alpha > -1$, elle est aussi sommable $(C, \alpha + \varepsilon)$, pour chaque $\varepsilon > 0$, parce que ici

$$p_n = A_n^\alpha, \quad q_n = A_n^{\varepsilon-1}, \quad r_n = \sum_{\mu=0}^n A_\mu^\alpha A_{n-\mu}^{\varepsilon-1} = A_n^{\alpha+\varepsilon}.$$

III. Si la série (1) est sommable (p) avec la somme s , la série

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

est sommable (q) avec la somme t , la série

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n,$$

sera sommable (r) avec la somme st , où

$$(7) \quad r_n = p_n q_0 + p_{n-1} q_1 + \dots + p_0 q_n.$$

D'après les conditions du théorème nous avons

$$p(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \quad q(x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n,$$

$$\lim \frac{s_n}{p_n} = s, \quad \lim \frac{t_n}{q_n} = t,$$

d'où l'on obtient par multiplication

$$p(x) q(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = r(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n,$$

ce qui nous montre que

$$(8) \quad v_n = s_n t_0 + s_{n-1} t_1 + \dots + s_0 t_n.$$

Posons $s_n = s p_n + s'_n$, $\frac{s'_n}{p_n} \rightarrow 0$, alors on a

$$\frac{v_n}{r_n} = s \frac{p_n t_0 + \dots + p_0 t_n}{r_n} + \frac{s'_n t_0 + \dots + s'_0 t_n}{r_n}.$$

D'après le théorème II le premier membre tend vers st . Il suffit donc à nous borner au cas $s = t = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et N ainsi choisi que $|s_n| < \varepsilon p_n$, $|t_n| < \varepsilon q_n$, si $n > N$.

Soit $n > 2N$ et soit $m = \left[\frac{n}{2} \right]$. Nous avons

$$\frac{v_n}{r_n} = \frac{s_n t_0 + \dots + s_{n-m} t_m}{r_n} + \frac{s_{n-m-1} t_{m+1} + \dots + s_0 t_n}{r_n} = i_n + k_n.$$

Comme les nombres $\frac{s_n}{p_n}, \frac{t_n}{q_n}$ sont bornés on aura $|s_n| < k p_n, |t_n| < k q_n$,

$$|i_n| < k \varepsilon \frac{p_n q_0 + \dots + p_{n-m} q_m}{r_n} < k \varepsilon, \quad |k_n| < k \varepsilon \frac{p_{n-m-1} q_{m+1} + \dots + p_0 q_n}{r_n} \dots k \varepsilon,$$

ce qui nous montre que $\lim i_n = \lim k_n = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Si l'on pose $p_n = A_n^\alpha, q_n = A_n^\beta, \alpha, \beta > -1$, on a $r_n = A_n^{\alpha+\beta+1}$. Du théorème II on obtient donc le résultat connu pour la sommation de Cesàro: si la série (1) est sommable (C, α) , la série (5) est sommable (C, β) , la série (6) sera sommable $(C, \alpha + \beta + 1)$.

Il est facile de généraliser le théorème classique de Mertens.

IV. Si la série (1) est sommable (p) avec la somme s , la série (5) est absolument convergente et a la somme t , la série (6) sera sommable (p) avec la somme st .

On peut aussi obtenir encore beaucoup de résultats valables pour la sommation de Cesàro.

Matematica. — *Sur quelques points de géométrie infinitésimale directe.* Nota ⁽¹⁾ di G. RABATÉ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. La présente Note résume en partie des recherches sur les notions de **contingent** et de **paratingent** dont M. Georges Bouligand a fait les instruments de sa **Géométrie infinitésimale directe** ⁽²⁾.

Soit O un point d'accumulation d'un ensemble ponctuel E de l'espace euclidien à trois dimensions. On appelle *contingent* au point O, l'ensemble des demi-droites (ou rayons) OT tels que tout cône circulaire droit de sommet O et d'axe OT contienne au moins un point de E distinct de O.

On appelle *paratingent* de E en O, l'ensemble des droites passant par O, qui sont limites de droites portant respectivement des segments $P_i Q_i$ non nuls dont les extrémités P_i et Q_i appartiennent à E et tendent vers O.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1930.

(2) G. BOULIGAND, *Sur quelques points de Méthodologie géométrique*, « Revue générale des Sciences », 31 Janvier, 30 Juin et 15 Novembre 1930.

Les notions précédentes se relient aisément à celles d'ensemble d'accumulation et d'ensemble limite données par Janiszewski dans sa thèse ⁽¹⁾.

Ces dernières étant admises, j'établis que le contingent et le paratingent sont respectivement l'ensemble limite ⁽²⁾ (ou indifféremment d'accumulation):

1° de la suite infinie d'ensembles de rayons joignant O à tous les points de E intérieurs aux sphères de centres O et de rayons:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \text{ tendant vers zéro;}$$

2° de la suite infinie d'ensembles de droites joignant deux à deux tous les points de E intérieurs aux sphères de centres O et de rayons

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \text{ tendant vers zéro.}$$

A ce titre, ces ensembles (de demi-droites ou de droites) sont fermés. En résumé, en Géométrie Infinitésimale Directe, on raisonne sur les continus, sans passer par l'intermédiaire de leur représentation analytique; et à la notion de dérivée, on substitue celle de l'ensemble limite de Janiszewski.

Comme exemple, j'indique comment on peut, au moyen du paratingent, définir une classe étendue de lignes sans point double: on considère les continus dont le paratingent en chaque point laisse échapper, dans un plan passant par ce point, toutes les droites qui s'y croisent.

J'ai montré qu'un tel continu est bien une courbe, sur laquelle les environs d'un point peuvent, par rapport à des axes convenables, se représenter sous la forme

$$y = f(x) \quad , \quad z = g(x) \quad (3).$$

II. Je vais maintenant m'occuper de la notion de contingent et de plusieurs notions connexes, donnant lieu à divers énoncés parallèles.

A côté du contingent ci-dessus défini (que j'appellerai, pour le distinguer, *contingent-linéaire*), M. Bouligand a encore défini le contingent d'osculation ⁽⁴⁾ (que j'appellerai *contingent planaire*).

O étant toujours un point d'accumulation de E, OT un rayon du contingent linéaire, le contingent d'osculation relatif à O et à OT sera l'en-

(1) JANISZEWSKI, *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Thèse Paris 1911, pages 12 à 20.

(2) Ce point a été brièvement signalé par M. BOULIGAND dans son article: *Sur quelques points de topologie restreinte au premier ordre*, «Bull. Soc. Math. France», 1928, p. 29. Je l'avais retrouvé, ignorant cette publication de M. BOULIGAND, qui m'a conseillé lui-même d'y revenir.

(3) M. BOULIGAND a donné simultanément et indépendamment une proposition plus générale sur la sélection des variétés à un nombre quelconque de dimensions (voir «Rev. gén. des Sciences», 15 nov. 1930).

(4) «Rev. gén. des Sciences», 15 Nov. 1930.

semble des demi-plans (ou feuilletts) limités à la droite support de OT et tels que tout dièdre ayant cette droite pour arête et pour bissecteur l'un quelconque de ces demi-plans comprenne un point de l'ensemble non situé sur le support de OT et à une distance arbitrairement petite de O.

Ce contingent d'osculation peut encore être défini comme l'ensemble limite (ou indifféremment d'accumulation) de la suite infinie d'ensembles de demi-plans issus du support de OT et passant par tous les points de E distincts de O et intérieurs aux sphères de centres O et de rayons

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \text{ tendant vers zéro.}$$

Dans le but de généraliser les notions de cercle osculateur et de sphère osculatrice en un point d'une courbe, à l'image de ce que M. Bouligand avait fait pour la tangente et le plan osculateur, j'ai défini le *contingent circulaire* et le *contingent sphérique*.

Les définitions du contingent linéaire et du contingent d'osculation données par M. Bouligand reviennent à dire: qu'un rayon appartient au contingent en O, s'il est limite d'une suite de rayons joignant O aux points d'une suite $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ extraite de E, tendant vers O, et dont tous les points sont distincts de O; qu'un demi-plan issu du support de OT appartient au contingent d'osculation relatif à O et à OT, s'il est limite d'une suite de demi-plans déterminés par le support de OT et les points $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ d'une suite extraite de E, tendant vers O, et dont aucun point n'est situé sur le support de OT.

Par analogie, je dirai qu'un cercle appartient au contingent circulaire relatif à O et à OT, s'il est limite d'une suite de cercles tangents en O à OT et passant respectivement par les points $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ d'une suite extraite de E, tendant vers O, et dont aucun point ne soit situé sur le support de OT. Le contingent circulaire est aussi l'ensemble limite (ou d'accumulation) de la suite infinie d'ensembles de cercles tangents en O à OT et passant par tous les points de E (non situés sur le support de OT) intérieurs aux sphères de centres O et de rayons

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \text{ tendant vers zéro }^{(1)}.$$

Soit maintenant Γ_{OT} un cercle du contingent circulaire relatif à O et à OT. Remarquant qu'un cercle, et un point non situé sur ce cercle

(1) Pour le parallélisme complet des raisonnements sur tous les contingents, il faut admettre, dans le contingent circulaire, des cercles de rayon nul ou infini, en précisant le demi-plan correspondant. Il est commode de se ramener à un ensemble de points: pour cela on associe, à chaque cercle tangent en O à OT, l'inverse μ de son centre ω par rapport à un point K de OT, puis la projection orthographique de μ sur un cylindre droit parallèle à OT. Les cercles de rayon nul ou infini auront leurs images sur les deux parallèles extrêmes du ruban cylindrique ainsi décrit.

déterminent sans ambiguïté une calotte sphérique, je dirai qu'une calotte sphérique appartient au contingent sphérique relatif à O, à OT et à Γ_{OT} si elle est limite d'une suite de calottes passant toutes par Γ_{OT} et respectivement par les points $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ d'une suite extraite de E, tendant vers O, et dont aucun point ne soit situé sur le cercle Γ_{OT} .

Le contingent sphérique est aussi l'ensemble limite (ou d'accumulation) de la suite infinie d'ensembles de calottes passant par Γ_{OT} et par tous les points de E (non situés sur Γ_{OT}) intérieurs aux sphères de centres O et de rayons

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \text{ tendant vers zéro.}$$

Pour abréger le langage, je désignerai les quatre contingents respectivement par les notations suivantes :

$C_\lambda(O)$: contingent linéaire relatif à O. C'est un ensemble de rayons.

$C_{\bar{o}}(O, OT)^{(1)}$: contingent planaire relatif à O et à OT. C'est un ensemble de demi-plans.

$C_\gamma(O, OT)$: contingent circulaire relatif à O et à OT. C'est un ensemble de cercles.

$C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})^{(2)}$: contingent sphérique relatif à O, OT et Γ_{OT} . C'est un ensemble de calottes.

Ces quatre contingents sont des ensembles *fermés*, ainsi qu'il résulte de leur définition comme ensembles limites.

Les conditions suffisantes de continuité données par M. Bouligand pour les deux premiers contingents peuvent s'unifier dans l'énoncé général suivant :

Pour chacun des quatre contingents, une condition suffisante de continuité est que tout couple M, N de points de E puisse se joindre par un sous-continu de E, de diamètre infiniment petit avec $AM + AN$ et ne contenant (hypothèse H) aucun point pour lequel l'élément géométrique (courbe ou surface astreinte à passer par ce point) dont est formé le contingent, deviendrait indéterminé.

Ne pas passer par O pour $C_\lambda(O)$; ne pas rencontrer la droite support de OT pour $C_{\bar{o}}(O, OT)$ ou pour $C_\gamma(O, OT)$; ne pas rencontrer Γ_{OT} pour $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$, telles sont en définitive, les formes prises dans les divers cas, par l'hypothèse H relative au sous-continu de E joignant le couple M, N. (Il est entendu que, de leur côté, les points M et N distincts sont : distincts de O dans le premier cas; non situés sur la droite support de OT dans le deuxième et le troisième cas; non situés sur Γ_{OT} dans le quatrième cas).

Pour l'ensemble particulier constitué par un demi-arc simple de Jordan, M. Bouligand a démontré, relativement à chacun des deux premiers con-

(1) OT est un rayon de $C_\lambda(O)$.

(2) Γ_{OT} est un cercle de $C_\gamma(O, OT)$.

tingents, un groupe de trois théorèmes que j'ai étendus aux contingents circulaire et sphérique⁽¹⁾.

Le premier de ces théorèmes précise les cas où, pour un demi-arc simple de Jordan, l'un de nos contingents est bien un continu. Si ce continu n'est pas réduit à un élément unique, il peut se faire qu'un plan (dans les deux premiers cas), une sphère (dans les deux derniers) le *traverse* et alors le second théorème affirme que le plan ou la sphère contient une infinité de points de la courbe. Il s'ensuit qu'en imposant au nombre des points d'intersection la condition d'être fini, on voit chacun des contingents se réduire à un élément unique, c'est le troisième théorème.

THÉOREME I. — Un demi-arc simple OL de Jordan:

- 1° satisfait toujours à la condition assurant la continuité de $C_\lambda(O)$
- 2° et 3° satisfait à la condition assurant la continuité de $C_\omega(O, OT)$ et de $C_\gamma(O, OT)$ quand O est point isolé de $OT \times OL$;
- 4° satisfait à la condition assurant la continuité de $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$ quand O est point isolé de $\Gamma_{OT} \times OL$.

THÉOREME II. — Soit un demi-arc simple OL de Jordan:

- 1° Tout plan mené par O de manière à traverser $C_\lambda(O)$;
 - 2° Tout plan mené par OT de manière à traverser $C_\omega(O, OT)$;
 - 3° Toute sphère (de rayon fini ou infini) tangente en O à OT et traversant $C_\gamma(O, OT)$;
 - 4° Toute sphère (de rayon fini ou infini) tangente en O à OT et traversant $C_\sigma(O, OT, \Gamma_{OT})$;
- coupe le demi-arc simple OL (arbitrairement réduit au voisinage de O) en une infinité de points admettant O pour point d'accumulation.

THÉOREME III. — Soit une courbe simple de Jordan. Si un plan la coupe en un nombre fini de points dans toute aire finie, elle admet à la fois en chaque point et de chaque côté une demi-tangente⁽²⁾ et un demi-plan osculateur.

Si l'on fait l'hypothèse plus restrictive qu'elle soit coupée en un nombre fini de points par toute surface *plane ou sphérique*, il en résulte de plus

(1) Sur l'existence des demi-tangentes à un arc simple de Jordan, « Fundamenta Mathematicae », tome XV, pages 215 à 218; Sur un caractère de plénitude d'un arc simple, « Bulletin des Sciences mathématiques », Mai 1930; « Revue gén. des Sciences », 15 Novembre 1930.

(2) Tout récemment (« C. R. Ac. Sc. », Paris, 25 Août 1930), M. GEORGES DURAND a donné une nouvelle preuve de l'importance offerte par la notation de contingent en y rattachant le fait que, pour toute courbe simple de Jordan ayant partout deux demi-tangentes, les points où elles ne sont pas en prolongement forment un ensemble dénombrable.

qu'en chaque point et de chaque côté, elle admet un cercle osculateur et une sphère osculatrice⁽¹⁾.

III. Je résume maintenant une autre série de recherches dont le but a été d'étudier les extensions, au moyen des contingents, du théorème classique sur la tangente à la projection horizontale d'une courbe algébrique en un point simple, mettant en jeu tantôt la projection de la tangente, tantôt la trace du plan osculateur.

Nous allons donc voir apparaître ici les deux premiers contingents. Toutefois, une étude approfondie de la question montre combien il serait imprudent de se contenter d'une généralisation de pure forme.

Tout d'abord, si e est la projection de E sur un plan horizontal passant par un point d'accumulation O de E , et si le $C_\lambda(O)$ de E ne contient aucun rayon vertical, il n'y a aucune difficulté à prouver que O est aussi point d'accumulation de e et qu'on peut isoler, sur l'ensemble E un voisinage de O pour lequel le contingent de la projection est bien la projection du contingent.

Mais, si le $C_\lambda(O)$ de E renferme un rayon vertical (ascendant ou descendant), O étant supposé de plus point d'accumulation de e , il n'est pas vrai que le contingent de la projection, pour E réduit à un certain voisinage de O , soit toujours identique à la trace du contingent d'osculation sur le plan de projection. On peut seulement dire qu'il englobe cette trace.

Pour qu'on puisse réaliser la coïncidence en réduisant E à un certain voisinage autour de O , il suffit que la différence entre le contingent de e en O et la trace sur le plan de projection du contingent d'osculation de E en O soit un ensemble fermé.

Matematica. — *Sulle coordinate geodetiche.* Nota di V. HLAVATÝ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur quelques problèmes aux limites de la théorie du potentiel logarithmique.* Nota di E. OKHLOPKOVA, presentata dal Corrispondente U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) On pourrait ici plus spécialement porter l'attention sur un demi-cercle osculateur et sur une calotte sphérique osculatrice.

Meccanica. — *Sulla estensione del teorema del Morera al moto dei sistemi a legami reversibili.* Nota⁽¹⁾ di E. GUGINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota pubblicata in questi « Rendiconti »⁽²⁾ il Morera dimostrò il suo classico teorema assai utile nella Scienza delle Costruzioni: « due quali si vogliono sistemi di forze attive Σ e Σ^* determinano su di un sistema S di punti materiali a vincoli indipendenti dal tempo, a partire dalla quiete, spostamenti (generabili in uno stesso intervallo infinitesimo di tempo) tali che il lavoro compiuto dalle forze Σ per gli spostamenti corrispondenti a Σ^* è uguale al lavoro compiuto dalle forze Σ^* per gli spostamenti corrispondenti a Σ ».

Tale importante teorema, che l'Autore dimostrò in maniera assai semplice ed espressiva, solo per i sistemi a legami indipendenti dal tempo, ci proponiamo di estendere al caso che il sistema materiale considerato sia a legami reversibili, cioè tali, che ad ogni istante, a partire da una qualsivoglia configurazione, insieme con ogni atto di moto v_i compatibile con detti legami, risulti pure conciliabile con essi l'atto di moto direttamente opposto.

In particolare i sistemi a legami indipendenti dal tempo, costituiscono una speciale categoria di quelli a legami reversibili; però questi ultimi più generalmente, possono anche dipendere esplicitamente dal tempo.

In una recente Nota⁽³⁾ abbiamo rilevata la circostanza notevole, che per tali sistemi più generali, l'atto di moto nullo (cioè a dire la quiete) è pur sempre compatibile con i legami, a partire da un generico istante e da una configurazione comunque prefissata. In un'altra Nota⁽⁴⁾ abbiamo anche dimostrato, che a partire dalla quiete, qualunque sia l'istante e la configurazione da cui si parte, ogni distribuzione di accelerazioni compatibile coi vincoli reversibili, dà luogo ad uno spostamento virtuale e viceversa.

Ciò premesso, sia S un sistema materiale di punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) di masse m_i a legami reversibili; possiamo sempre supporre, e le nostre ipotesi lo consentono, che il sistema parta dalla quiete e venga sollecitato separatamente da due quali si vogliono sistemi di forze attive F_i ed F_i^* ; si generano in conseguenza due moti distinti M ed M* con distribuzioni di accelerazioni (iniziali) a_i ed a_i^* rispettivamente, entrambe identificabili con due spostamenti virtuali.

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1930.

(2) Cfr. MORERA, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 5^a, vol. II, 1893, 2° sem., pp. 245-246.

(3) Cfr. E. GUGINO, *Sul moto incipiente dei sistemi ecc.*..., « Rend. R. Acc. Lincei », serie 6^a, vol. XI, 1° sem., pp. 284-289.

(4) Cfr. Id., *Sulla validità ed estensione ecc.*..., serie 6^a, vol. X, 2° sem., pp. 405-413.

Applicando al moto M , in corrispondenza allo istante iniziale, l'equazione generale della dinamica, scegliendo in luogo di un qualsivoglia spostamento virtuale δP_i (a partire dall'istante e dalla configurazione prefissata) la distribuzione di accelerazioni \mathbf{a}_i^* dei punti P_i nel moto M^* , possiamo scrivere la relazione:

$$\sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \mathbf{a}_i^* = 0.$$

Analogamente applicando al moto M^* la medesima equazione generale, scegliendo in luogo di un generico spostamento virtuale $\delta^* P_i$ la distribuzione di accelerazioni \mathbf{a}_i corrispondente al moto M , si ha pure:

$$\sum_i^N (\mathbf{F}_i^* - m_i \mathbf{a}_i^*) \times \mathbf{a}_i = 0.$$

Sottraendo membro a membro si deduce:

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{a}_i^* = \sum_i^N \mathbf{F}_i^* \times \mathbf{a}_i$$

la quale relazione, come direttamente si scorge, esprime un semplice corollario del teorema del Morera, valido per i sistemi a legami reversibili: « la somma dei prodotti scalari delle forze del primo sistema \mathbf{F}_i per le accelerazioni \mathbf{a}_i^* impresse ai punti P_i dal secondo sistema di forze è uguale alla analoga somma dei prodotti scalari delle forze del secondo sistema \mathbf{F}_i^* per le accelerazioni \mathbf{a}_i impresse dal primo ».

Denotiamo ora con ΔP_i e $\Delta^* P_i$ gli spostamenti dei punti P_i a partire dalla quiete, in uno stesso intervallo di tempo τ , per effetto dei due moti M ed M^* ; manifestamente può scriversi:

$$(2) \quad \Delta P_i = \frac{1}{2} \mathbf{a}_i \tau^2 + [\mathbf{3}] \quad \Delta^* P_i = \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^* \tau^2 + [\mathbf{3}^*]$$

ed i simboli $[\mathbf{3}]$ e $[\mathbf{3}^*]$ indicano in ciascuna formula, certi vettori i cui moduli sono del terzo ordine almeno rispetto a τ .

Moltiplicando entrambi i membri della (1) per $\frac{1}{2} \tau^2$ e tenendo conto delle (2) essa può mettersi sotto la forma:

$$(1) \quad \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \Delta^* P_i = \sum_i^N \mathbf{F}_i^* \times \Delta P_i + [\mathbf{3}]$$

ed il modulo del vettore $[\mathbf{3}]$ risulta ancora del terzo ordine almeno rispetto a τ .

Se infine consideriamo spostamenti dP_i e d^*P_i generabili in uno stesso intervallo infinitesimo di tempo, il vettore [3] è senz'altro trascurabile, rispetto ai sommatore che compaiono nella (I), entrambi del secondo ordine rispetto al tempuscolo considerato; la (1) può allora scriversi

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \times d^*P_i = \sum_i^N \mathbf{F}_i^* \times dP_i$$

e tale relazione traduce in forma analitica il teorema del Morera generalizzato, esteso cioè ai sistemi a legami reversibili.

Una applicazione notevole di siffatta generalizzazione, si ha considerando in particolare un sistema materiale continuo, ad esempio un solido oppure una massa fluida o pastosa; i legami molecolari, per la loro stessa natura, sono reversibili, poichè per ogni atto di moto compatibile con tali vincoli è pure conciliabile con essi l'atto di moto direttamente opposto.

Facendo quindi agire su di un sistema continuo, entro i limiti di elasticità, a partire dallo stato naturale, caratterizzato dall'assenza di qualsiasi sollecitazione esterna, (di massa e superficiale), due sistemi di forze Σ e Σ^* , a norma della (I) il lavoro eseguito dal primo sistema Σ per gli spostamenti prodotti dal sistema Σ^* , in uno stesso intervallo di tempo τ abbastanza piccolo, è uguale, a meno di quantità del terzo ordine rispetto a τ , all'analogo lavoro eseguito dal secondo sistema Σ^* per gli spostamenti prodotti dal primo, nel medesimo intervallo di tempo; ciò qualunque siano le sollecitazioni Σ e Σ^* e per spostamenti generati in uno stesso intervallo di tempo τ abbastanza piccolo ma non infinitesimo.

Se più particolarmente ancora si fa l'ipotesi che il mezzo sia solido e le deformazioni prodotte dai due sistemi di forze siano infinitesime, supponendo che tali deformazioni (elastiche) siano generabili in uno stesso intervallo infinitesimo di tempo, il teorema del Morera generalizzato, conduce agevolmente al classico teorema di reciprocità del Betti, che, come è noto, ha una funzione fondamentale nella teoria della elasticità (1).

(1) Cfr. P. APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle*, tome III, pp. 632-624.

Meccanica. — *Estensione del paradosso di D'Alembert e del teorema di Kutta-Joukowski ai profili ad arco di cerchio.* Nota ⁽¹⁾ di L. POGGI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La presente Nota si propone di mettere in evidenza come i metodi classici per lo studio dei moti fluidi piani intorno ai profili cuspidati possono essere applicati senza creare casi di eccezione al paradosso di D'Alembert ed al teorema di Kutta-Joukowski, evitando così l'assurdo di una variazione continua di energia all'infinito, in cui si cade negando la generalità del paradosso. In tesi generale basterebbe osservare che la trasformazione conforme, con la quale da un circolo nel piano t si deduce un profilo nel piano z , conduce a profili cuspidati se la funzione $z(t)$ ammette dei poli sulla circonferenza.

Ora, facendo variare con continuità la funzione $z(t)$ in modo tale che i poli si portino nell'interno della circonferenza (ciò che per esempio si può fare ponendo $z(t) = \bar{z}(kt)$, essendo $\bar{z}(t)$ una funzione comportante dei poli sulla circonferenza e regolare all'esterno della stessa; e k un numero tendente ad uno per eccesso) il profilo diventa regolare.

Nell'ipotesi ammesse, all'eseguirsi della detta operazione, la funzione $z(t)$ resta regolare all'esterno del cerchio dove pure la sua derivata rimane finita, ed ambedue variano con continuità.

Osservando ora che l'integrale $\int \left[\frac{dW}{dz} \right]^2 dz = \int \left[\frac{dW}{dt} \right]^2 \frac{dt}{d\bar{z}} dt$ comparante nella formola di Blasius può essere esteso a qualsiasi circuito comprendente il profilo nel suo interno (anche se nessun punto del profilo appartiene al circuito) e che variando tutti i termini sotto detto integrale con continuità e rimanendo tutti finiti all'eseguirsi della sopradetta operazione, anche il valore dell'integrale esteso a tutto il circuito deve variare con continuità, si deduce che la risultante delle azioni aerodinamiche deve variare con continuità quando da un profilo senza singolarità si passi in modo continuo ad un profilo cuspidato.

E poichè, per i profili regolari è certo valida la legge di Kutta-Joukowski (che comprende in sè stessa anche il paradosso di D'Alembert) si deduce essere tale legge valida anche per i profili cuspidati.

CASO PARTICOLARE DI UN PROFILO AD ARCO DI CERCHIO.

Allo scopo di dare una conferma indiretta di quanto sopra, ricercheremo la risultante delle azioni aerodinamiche attorno ad una lastra arcuata,

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1930.

sia nel caso del moto puramente transitorio sia in quello del modo translociratorio.

CASO DELLA CORRENTE PURAMENTE TRASLATÒRIA

CON DIREZIONE ASSINTOTICA ORTOGONALE ALLA CORDA DEL PROFILO CIRCOLARE.

È noto che una lastra arcuata posta nel piano ζ e con l'asse x del piano stesso può essere ottenuta da un cerchio di raggio $= 1$ posto in un piano ausiliario t , ed avente il centro nell'origine, mediante la trasformazione:

$$\zeta = R a \left(t + a - \frac{1 - a^2}{t + a} \right)$$

essendo R il raggio della lastra ed a un numero reale minor d'uno e dipendente dall'ampiezza dell'arco della lastra stessa (in particolare per la lastra piana è $R = \infty$; $a = 0$).

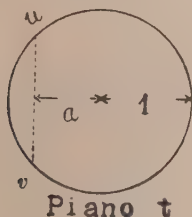


Fig. 1.

I piani t e ζ sono rappresentati nella fig. 1.

Ciò premesso è facile vedere che la funzione potenziale assume la forma:

$$W = aRV \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

Applicando la formola di Blasius avremo per la risultante delle azioni aerodinamiche sul contorno l'espressione:

$$iX + Y = -\frac{1}{2} \rho \int_c \left[\frac{dW}{d\zeta} \right]^2 d\zeta = -\frac{1}{2} \rho \int \left[\frac{dW}{dt} \right]^2 \frac{dt}{d\zeta} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \rho aRV_0^2 \int_c \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)^2 \frac{dt}{1 + \frac{1-a^2}{(t+a)^2}} = -\frac{1}{2} \rho aRV_0^2 \int_c \left(1 - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4} \right) \left(1 + \frac{a^2 - 1}{(t-u)(t-v)} \right) dt$$

essendo

$$u = -a + i\sqrt{1-a^2} \quad v = -a - i\sqrt{1-a^2}$$

punti della circonferenza di raggio uno e col centro nell'origine del piano t .

Avremo quindi, trascurando i termini che danno integrale nullo per qualsiasi circuito chiuso:

$$iX + Y = -\frac{1}{2}(a^2 - 1) a R \rho V_0^2 \int \frac{1}{u-v} \left\{ \frac{1}{t-u} - \frac{1}{t-v} - 2 \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{t-u} - \frac{1}{t} \right) + \frac{2}{v^2} \left(\frac{1}{t-v} - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{u^4} \left(\frac{1}{t-u} - \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{v^4} \left(\frac{1}{t-v} - \frac{1}{t} \right) \right\} dt.$$

È chiaro che l'integrale sopra scritto è nullo per ogni circuito chiuso che abbracci tutti o nessuno dei punti u, v, o , nel piano t , e quindi anche per ogni circuito chiuso tutto esterno alla sopravvista circonferenza di raggio uno; mentre per un circuito interno a detta circonferenza e abbracciante il punto $t = o$ esso acquista il valore:

$$-2 i \pi (u + v) (-2 + (u^2 + v^2)) = -16 \pi i a (a^2 - 1).$$

Si ottiene quindi per un tale circuito:

$$Y = 0 \quad ; \quad X = 8 \pi \rho V_0^2 a^2 (a^2 - 1)^2 R.$$

Osserviamo però che i punti del piano ζ hanno i loro corrispondenti nel piano t tutti esterni alla vista circonferenza di raggio uno; quindi per un qualsiasi circuito nel piano ζ il sopradetto integrale è sempre nullo; RISULTA PERCIÒ VERIFICATO IL PARADOSSO DI D'ALEMBERT.

Può essere interessante, specialmente allo scopo di chiarire le idee, considerare anche la parte del piano t interna alla detta circonferenza. La soprascritta rappresentazione conforme che trasforma nel piano ζ la parte del piano t esterna alla circonferenza trasformerà la parte interna in un altro piano ζ' , in cui alla circonferenza corrisponderà ancora un arco di cerchio, ma nel nuovo piano alla sopravvista funzione potenziale W non corrisponderà più una corrente traslatoria bensì una doppietta posta nel centro dell'arco stesso.

In questo caso, come abbiamo visto, si ha sull'arco di cerchio una forza assiale $X = 8 \pi \rho V_0^2 a^2 (a^2 - 1)^2 R$; ciò per altro è perfettamente conciliabile col paradosso di D'Alembert essendovi sulla doppietta una forza uguale e contraria.

Si può anzi osservare che l'azione sulla doppietta deriva dalla stessa applicazione della formula di Blasius. Infatti al circuito interno alla vista circonferenza del piano t ed abbracciante l'origine corrisponde nel piano t un circuito avvolgente l'arco di cerchio (profilo) o la doppietta, a seconda che nel piano t il primo circuito comprenda o no il punto $t = -a$ corrispondente nel piano ζ' al punto all'infinito.

Di più si può vedere che due circuiti trovantisi nel piano t nelle sopradette condizioni e percorsi nello stesso piano in ugual senso vengono percorsi nel piano ζ' in senso opposto. Ne segue l'asserto.

CASO DELLA CORRENTE TRANSOCIRCOLATORIA

ATTORNO AD UNA LASTRA ARCUATA.

In questo caso la funzione potenziale assume la forma:

$$W = aR \left[V_x \left(t + \frac{1}{t} \right) - i V_y \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log t.$$

Avremo quindi:

$$\begin{aligned} iX + Y = & -\frac{1}{2} \frac{\rho}{aR} \int \left\{ V_x^2 a^2 R^2 \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)^2 - a^2 R^2 V_y^2 \left(1 + \frac{1}{t^2} \right)^2 - a^2 R^2 V_x V_y 2 \left(1 - \frac{1}{t^4} \right) \right. \\ & \left. + 2 \frac{\Gamma}{2\pi i} aR \frac{1}{t} \left(V_x \left(1 - \frac{1}{t} \right) - i V_y \left(1 + \frac{1}{t} \right) \right) \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{a^2 - 1}{(t-u)(t-v)} \right\} dt^{(1)}. \end{aligned}$$

È subito visto, essendo gli altri termini del tipo già trovato nel caso precedente, che l'unico termine che non dia integrale nullo per un circuito abbracciante tutta la circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine del piano t , è il termine:

$$\Gamma \frac{2AR}{2\pi i} (V_x - iV_y) \frac{1}{t} dt.$$

Si ottiene quindi:

$$iX + Y = -\Gamma \rho (V_x - iV_y)$$

che è l'espressione del Teorema di Kutta-Joukowski.

I precedenti risultati sono in disaccordo con le deduzioni esposte dal prof. Cisotti nelle sue Note del 5 gennaio e 16 febbraio 1930, intorno alle quali si raggruppa un considerevole numero di studi sull'argomento promossi dalla autorità del chiaro Matematico. Ecco come allo scrivente appaiono le ragioni di tale divergenza, esposte qui limitatamente al caso della corrente traslatoria, con direzione ortogonale sull'asse del profilo.

Il prof. Cisotti nella citata Nota del febbraio 1930 (p. 340 di questi « Rendiconti ») scrive la formula di Blasius sotto la forma:

$$Rx + iRy = -2 V^2 \left[\frac{dZ}{dz} \right]^2 dz$$

avendo posto;

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dz} = & \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{a} - \frac{a}{z^2} \mp \frac{a}{z^2} \sqrt{(\bar{z}/a - e^{i\alpha})(\bar{z}/a - e^{-i\alpha})} \right. \\ & \left. \pm (1 + a/\bar{z}) \frac{\bar{z}/a - \cos \alpha}{a \sqrt{(\bar{z}/a - e^{i\alpha})(\bar{z}/a - e^{-i\alpha})}} \right] \end{aligned}$$

detto a il raggio della lastra arcuata ed α l'ampiezza del semiarco.

È facile rendersi conto che le formole sopra scritte concordano, in linea di massima con quelle qui stabilite.

Posto infatti:

$$\chi/a = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha (p - 1/p) + \cos \alpha$$

e quindi:

$$p = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} (\chi/a - \cos \alpha \pm \sqrt{(\chi/a - e^{i\alpha})(\chi/a - e^{-i\alpha})})$$

si ottiene:

$$\frac{dZ}{d\chi} = \frac{1}{4} \operatorname{sen} \alpha \frac{d}{d\chi} \left(p - l + \frac{1 + l^2}{p - l} \right)$$

essendo:

$$l = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)^{1/2}.$$

Essendo qui la funzione $\chi(p)$ sostanzialmente uguale alla funzione $\chi(t)$ da noi posta a p. 3 della presente trattazione e la funzione $dZ/d\chi$ sostanzialmente uguale alla nostra funzione $dW/d\chi$ segue l'asserto.

Osserviamo però che il prendere nell'espressione di p in funzione di χ un segno piuttosto che un altro dinanzi al radicale significa far corrispondere al piano χ la parte del piano p interna oppure quella esterna alla circonferenza in cui l'arco di cerchio del piano χ è trasformato nel piano p : significa cioè trovarsi nel caso della corrente traslatoria o in quello della doppietta nel centro dell'arco.

È quindi necessario definire quale dei segni debba esser assunto. A tal uopo bisogna però definire esattamente il valore del radicale indipendentemente dal segno che gli sta dinanzi (essendo in genere il radicale sopra visto un numero complesso potrà p. es. come caso particolare, essere un numero negativo anche quando gli sta dinanzi il segno $+$ e viceversa).

Supposto lungo il profilo nel piano χ un taglio di Riemann in modo che il radicale non possa avere in ogni punto che un solo valore converremo che tale valore sia un numero positivo per χ reale maggiore di a ; il valore del radicale è così in ogni punto perfettamente determinato.

Ciò posto è facile renderci conto che volendo considerare il caso della corrente traslatoria è necessario, nella formula che dà P in funzione di χ porre innanzi al radicale il segno $+$; ne seguono in modo evidente i segni da porre nella formula soprascritta per l'espressione $dZ/d\chi$.

Non è questa per altro l'unica ragione per cui dalle dette Note si ottiene il risultato diverso dal nostro; un'altra importante ragione sta nel fatto che in esse sono considerati a priori come nulli alcuni integrali derivanti dal quadrato dell'espressione $dZ/d\chi$; integrali che a nostro modo di vedere sono invece diversi da zero.

Ci basti considerare per esempio l'integrale:

$$\int \frac{1}{\zeta^2} \sqrt{(\zeta/a - e^{\alpha i})(\zeta/a - e^{-\alpha i})} d\zeta/a$$

nella sopravvista Nota considerato come nullo.

Osserviamo che il radicale assume in due punti infinitamente vicini ma posti da bande opposte del profilo del piano ζ due valori con modulo uguale ma ruotati di 180° ciò perchè passando da uno all'altro di tali punti, uno ed uno solo dei fattori comparenti sotto radice ha una rotazione di 360° .

Essendo d'altronde facile vedere che detto integrale esteso dal punto $e^{\alpha i}$ al punto $e^{-\alpha i}$ non è nullo, segue l'asserto.

Osservazioni analoghe si potrebbero fare per tutti gli altri termini comparenti nel quadrato dell'espressione $\frac{dZ}{d\zeta}$ e contenenti il sopravvisto radicale, termini che secondo le citate Note fornirebbero contributo nullo all'integrale della suddetta espressione esteso ad un circuito abbracciante il profilo.

Ci pare così di aver chiarito in questo caso speciale la questione della validità dei principi di D'Alembert e di Kutta-Joukowski, la quale validità del resto, come abbiamo detto, riteniamo affatto generale.

Meccanica. — *Le azioni dinamiche di una corrente circolatoria su profili cuspidati.* Nota ⁽¹⁾ di E. PISTOLESI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Le Note del prof. Cisotti cui si riferiscono le considerazioni svolte da L. Poggi nella Nota contenuta in questo stesso fascicolo di questi « Rendiconti », non sono, in sostanza, che una applicazione di una prima Nota dello stesso prof. Cisotti: *Tipi di profili rigidi isolati che subiscono un'azione dinamica da parte di una corrente fluida locale circolante intorno ad essi* ⁽²⁾, nella quale l'A. tende a dimostrare che una corrente circolatoria intorno ad un profilo che presenta una cuspide (angolo $\nu = 0$) produce su di esso un effetto dinamico dato dalla formula ⁽³⁾

$$R_y + iR_x = \frac{i\rho C^2}{8\pi\zeta_0^2} \Omega(\zeta_0)$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 ottobre 1930.

(2) « Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei », vol. X, fasc. 10, 17 novembre 1929.

(3) Notiamo, di passaggio, che questa altro non è che l'*aspirazione allo spigolo*, della quale fu discusso con lo stesso prof. Cisotti in altra occasione. Essa è bilanciata dalle pressioni sul rimanente del profilo, come mostreremo.

dove C è la circolazione, ζ_0 la coordinata complessa del punto della circonferenza di raggio 1 che nella trasformazione conforme corrisponde al punto singolare del profilo, $\Omega(\zeta_0)$ il valore che nel punto ζ_0 assume una funzione regolare per $|\zeta| \geq 1$ che serve a definire la trasformazione, avendo il Cisotti posto:

$$\frac{d\zeta}{d\zeta} = \frac{\Omega(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}.$$

S'intende che il piano ζ è quello della circonferenza, il piano z quello del profilo.

Il risultato del prof. Cisotti non può tuttavia essere ammesso. Invero esso è in contrasto col teorema di Bieberbach, il quale stabilisce che si può sempre sviluppare z in funzione di ζ mediante una serie di potenze negative, anche se sul contorno del profilo vi sono delle singolarità, con l'unica condizione che il profilo non sia intrecciato, cioè sia privo di punti doppi.

Da ciò deriva che l'effetto dinamico è nullo, giacchè la formula di Blasius, alla quale il prof. Cisotti fa ricorso:

$$R_y + iR_x = -\frac{\rho}{2} \int_{\gamma} w^2 d\zeta = \frac{\rho}{8} \frac{C^2}{\pi^2} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

contiene sotto il segno integrale una funzione che, sviluppata in serie di potenze decrescenti di ζ , non contiene se non termini del tipo a/ζ^n , con $n \geq 2$.

D'onde deriva il discordante risultato di Cisotti? Non è difficile vederlo.

La formula di Blasius, in base alla posizione del Cisotti, si riduce alla seguente:

$$R_y + iR_x = \frac{\rho C^2}{8\pi^2} \int_{\gamma} \frac{\Omega(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 (\zeta - \zeta_0)}.$$

Il Cisotti pone senz'altro l'integrale uguale a $i\pi \frac{\Omega(\zeta_0)}{\zeta_0^2}$; ma per far ciò bisogna che la $\Omega(\zeta)$ possa prolungarsi nell'interno del cerchio ed essere ivi ovunque regolare, il che non può accadere. Accade invece che la Ω ha nell'interno di γ dei poli, tali che l'integrale si annulla.

Un esempio chiarirà la cosa.

La funzione che trasforma il cerchio in un profilo di Joukowski è la seguente:

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta - m}$$

dove c è reale e < 1 ed m è un numero complesso, che deve soddisfare la relazione

$$|c + m| = 1.$$

Il punto singolare del profilo si ottiene per $\zeta - m = c$. Invero si ha:

$$\frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} = \frac{1}{1 - \frac{c^2}{(\zeta - m)^2}}$$

che $\rightarrow \infty$ per $\zeta - m = c$.

Con le notazioni del Cisotti $\zeta_0 = m + c$.

La precedente formula può trasformarsi come segue:

$$\frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} = \frac{(\zeta - m)^2}{(\zeta - m - c)(\zeta - m + c)} = \frac{(\zeta - m)^2}{(\zeta - m + c)(\zeta - \zeta_0)}.$$

Si vede perciò che la $\Omega(\zeta)$ è $\frac{(\zeta - m)^2}{\zeta - m + c}$, la quale ha un polo nel punto $\zeta = m - c$, che è interno al cerchio.

Se si applica la formula di Blasius tenendo conto di queste osservazioni, si trova quindi:

$$R_y + iR_x = 0.$$

Meccanica. — *Sulla meccanica dei sistemi continui.* Nota⁽¹⁾ di A. SIGNORINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Per trattare un qualunque problema di deformazioni finite bisogna, o almeno conviene, preventivamente sottoporre le equazioni generali della Meccanica dei sistemi continui ad una trasformazione analoga a quella che nel caso particolare dell'Idrodinamica conduce dalle equazioni di Eulero alle equazioni del Lagrange. Come è ben noto, fin dal secolo scorso ciò è stato fatto, in varia forma, da Kirchhoff, Boussinesq, Brillouin⁽²⁾.

Nella presente Nota, dopo avere opportunamente coordinato tali risultati, viene indicata una nuova forma lagrangiana delle equazioni indefinite, la quale può riuscire utile specialmente nella risoluzione indiretta di problemi particolari: nella Statica isoterma dei sistemi a trasformazioni reversibili (in particolare, nella Elastostatica isoterma) essa si concreta in tre equazioni alle derivate parziali del 1° ordine, non lineari, nelle sole caratteristiche di deformazione (almeno quando si possano trascurare le forze di massa).

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1930.

(2) Cfr., anche per una bibliografia completa fino al termine del secolo scorso, il pregevole lavoro riassuntivo di E. ed F. COSSERAT: *Sur la Théorie de l'Élasticité* (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », X, 1896).

2. NOTAZIONI. — Manteniamo tutte le notazioni e denominazioni introdotte nella Nota ⁽¹⁾: *Sulle deformazioni finite dei sistemi continui*, indicando inoltre: con α e k l'accelerazione e la densità attuale in P ; con $\mathbf{F} k dC$ ed $f d\Sigma = f_* d\Sigma_*$ la forza di massa e la forza superficiale esterna agenti (attualmente) sull'elemento di volume dC circostante a P e sul generico elemento di Σ ; con

$$\beta \equiv \| X_{rs} \| \quad (X_{rs} = X_{sr})$$

l'ordinaria omografia *euleriana* di tensione; con k_* la densità in C_* , legata a k e D dalla semplice relazione $k_* = kD$ (equazione *lagrangiana* di continuità).

Le equazioni da trasformare notoriamente sono le seguenti:

$$(1) \quad \begin{cases} k(\mathbf{F} - \alpha) = \sum_1^3 \frac{\partial \beta i_s}{\partial x_s} \dots C \\ f = \beta \mathbf{N} \dots \Sigma. \end{cases}$$

Pei sistemi suscettibili solo di deformazioni infinitesime la riduzione delle (1) a forma *lagrangiana* è quasi immediata e si riassume in

$$\begin{cases} k_*(\mathbf{F} - \alpha) = \sum_1^3 \frac{\partial \beta i_s}{\partial y_s} \dots C_* \\ f_* = \beta \mathbf{N}_* \dots \Sigma_*. \end{cases}$$

3. LE EQUAZIONI DEL BOUSSINESQ. — Siano: c e c_* una parte qualunque di C e la parte corrispondente di C_* ; σ e σ_* i contorni completi di c e c_* ; γ una qualsiasi omografia funzione regolare di P (e quindi anche di P_*).

La (3)_{*} (col ripetuto concorso di un celebre teorema del Gauss) fornisce

$$\begin{aligned} \int_c \sum_1^3 \frac{\partial \gamma i_s}{\partial x_s} dC &= - \int_{\sigma} \gamma (n d\sigma) = - \int_{\sigma_*} \gamma R \alpha n_* d\sigma_* = \\ &= \int_{c_*} \sum_1^3 \frac{\partial \gamma R \alpha i_s}{\partial y_s} dC_* = \int_{c_*} \frac{1}{D} \sum_1^3 \frac{\partial \gamma R \alpha i_s}{\partial y_s} dC. \end{aligned}$$

L'arbitrarietà di c (insieme al fatto che le funzioni integrande sono continue ed indipendenti dal campo d'integrazione) permette di concludere che

$$\sum_1^3 \frac{\partial \gamma i_s}{\partial x_s} = \frac{1}{D} \sum_1^3 \frac{\partial \gamma R \alpha i_s}{\partial y_s}.$$

(1) V. questo vol. dei « Rendiconti », p. 312. Nel seguito le citazioni di tale Nota sono contraddistinte con *.

Ponendo $\gamma = \beta$ e ricorrendo anche all'equazione lagrangiana di continuità, l'equazione indefinita (1)₁ si trasforma in

$$(2) \quad k_*(\mathbf{F} - \mathbf{a}) = \sum_1^3 \frac{\partial \beta R \alpha \mathbf{i}_s}{\partial y_s} \dots C_*.$$

Per quanto riguarda l'equazione al contorno (1)₂, basta scriverla nella forma $\beta(N d \Sigma) = f' d \Sigma = f'_* d \Sigma_*$ e successivamente applicare la (3')_{*}, per ottenere in definitiva

$$(2') \quad f'_* = \beta R \alpha \mathbf{N}_* \dots \Sigma_*.$$

Le (2)-(2') corrispondono alle equazioni del Boussinesq.

4. L'OMOGRAFIA LANGRANGIANA DI TENSIONE E LE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF. — Per le applicazioni ai sistemi elastici conviene eliminare l'omografia euleriana di tensione, sostituendola coll'omografia

$$(3) \quad \beta_* = \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot R \alpha = I_3 \alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot K \alpha^{-1},$$

i cui coefficienti rispetto ad $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ sono nel seguito indicati con $Y_{m,n}$ ($m, n = 1, 2, 3$).

La β_* risulta sempre una dilatazione⁽¹⁾, cioè sempre sussiste la proprietà di simmetria

$$Y_{rs} = Y_{sr}.$$

Per effetto della posizione $\beta R \alpha = \alpha \beta_*$ (e della (3)_{*}) si ha inoltre, identicamente,

$$\beta(n d \sigma) = \alpha \beta_*(n_* d \sigma_*).$$

Si presenta quindi spontanea per la β_* la denominazione di omografia *lagrangiana* di tensione.

Eliminando β le equazioni del Boussinesq rimangono sostituite dalle equazioni di Kirchhoff-Brillouin

$$(4) \quad \begin{cases} k_*(\mathbf{F} - \mathbf{a}) = \sum_1^3 \frac{\partial \alpha \beta_* \mathbf{i}_s}{\partial y_s} \dots C_* \\ f'_* = \alpha \beta_* \mathbf{N} \dots \Sigma_* \end{cases}$$

Ma il principale vantaggio offerto dall'intervento della β_* sta nel fatto che, in corrispondenza ad un qualsiasi spostamento virtuale di S ed alla

(1) Qualunque sia l'omografia δ , se γ è una dilatazione (un'omografia assiale) anche $\Gamma = \delta \cdot \gamma \cdot K \delta$ è una dilatazione (un'omografia assiale); e viceversa, almeno quando δ non è degenera. Infatti, basta una ripetuta applicazione del teorema di commutazione per riconoscere che $\Gamma x \times y = \pm x \times \Gamma y$; mentre se δ non è degenera certamente si ha $\gamma = \delta^{-1} \cdot \Gamma \cdot K \delta^{-1}$, ecc.

generica sua particella dC_* , il lavoro delle forze intime rimane semplicemente espresso da

$$(5) \quad \delta l_i = dC_* \left\{ \sum_1^3 Y_{rr'} \delta \varepsilon_r + \sum_1^3 Y_{s+1, s+2} \delta \gamma_s \right\} = dC_* \sum_1^3 \beta_* \dot{i}_s \times \delta \varepsilon \dot{i}_s.$$

Invero, essendo $\partial \delta \mathbf{s} / \partial y_s = \delta(\alpha \dot{i}_s - \dot{i}_s) = \delta \alpha \dot{i}_s$, l'espressione diretta del lavoro virtuale delle forze intime nell'intero sistema,

$$\delta L_i = - \int_C dC_* \delta \mathbf{s} \times \sum_1^3 \frac{\partial \alpha \beta_* \dot{i}_s}{\partial y_s} - \int_{\Sigma} d\Sigma_* \delta \mathbf{s} \times \alpha \beta_* \mathbf{N}_*,$$

può sostituirsi con

$$\delta l_i = dC_* \sum_1^3 \frac{\partial \delta \mathbf{s}}{\partial y_s} \times \alpha \beta_* \dot{i}_s = dC_* \sum_1^3 K \alpha \cdot \delta \alpha \dot{i}_s \times \beta_* \dot{i}_s.$$

D'altra parte, si ha $2\delta\varepsilon = \delta K \alpha \cdot \alpha + K \alpha \cdot \delta \alpha$ e le due omografie $\delta K \alpha \cdot \alpha$, $K \alpha \cdot \delta \alpha$ sono coniugate; in modo che $K \alpha \cdot \delta \alpha$ differisce da $\delta\varepsilon$ solo per l'aggiunta di un'omografia assiale. Ne segue ⁽¹⁾

$$\sum_1^3 K \alpha \cdot \delta \alpha \dot{i}_s \times \beta_* \dot{i}_s = \sum_1^3 \delta \varepsilon \dot{i}_s \times \beta_* \dot{i}_s,$$

c. d. d.

5. PARZIALE O TOTALE ELIMINAZIONE DELLA α_r ⁽²⁾. — Applicando ai due membri della (4)_i l'omografia non degenera $K\alpha$, si ottiene

$$k_* K \alpha (\mathbf{F} - \mathbf{a}) = \sum_1^3 K \alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y_s} \cdot \beta_* \dot{i}_s + \sum_1^3 K \alpha \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \beta_*}{\partial y_s} \dot{i}_s.$$

Basta allora ricordare la (13)_{*} e tener conto della doppia eguaglianza $K \alpha \cdot \alpha = \tilde{\omega} = 1 + 2\varepsilon$, per riconoscere che l'equazione indefinita (4)_i è perfettamente equivalente a

$$(6) \quad k_* K \alpha (\mathbf{F} - \mathbf{a}) = \sum_1^3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_s} \beta_* \dot{i}_s + \sum_1^3 \text{rot p.} \varepsilon \dot{i}_s \wedge \beta_* \dot{i}_s + (1 + 2\varepsilon) \sum_1^3 \frac{\partial \beta_*}{\partial y_s} \dot{i}_s.$$

(1) Pel solo fatto che β_* è una dilatazione, risulta $\sum_1^3 \beta_* \dot{i}_s \times (\mathbf{V} \wedge \dot{i}_s) = 0$ (cioè, si annulla l'invariante primo del prodotto di una qualsiasi omografia assiale per $K\beta_*$). Per dimostrarlo basta, ad. es., rilevare che l'espressione in esame coincide col prodotto scalare di \mathbf{V} pel vettore dell'omografia β_* .

(2) Le sei caratteristiche di deformazione sono legate dalle condizioni di congruenza del Saint-Venant. I coefficienti della rotazione rigida α_r non possono esser dedotti dalle caratteristiche di deformazione altro che integrando il sistema (14)_{*}.

In assenza di forze di massa e di forze d'inerzia il 1° membro si riduce a zero ed accanto alla β_* non figura più altro che la ε .

6. SISTEMI A TRASFORMAZIONI REVERSIBILI. - L'equazione vettoriale (4)₁ (ed analogamente la (4)₂) dà luogo a tre sole equazioni scalari nelle 9 incognite $x_1, x_2, x_3, Y_{11}, Y_{22}, Y_{33}, Y_{23}, Y_{31}, Y_{12}$; il pareggiamento del numero delle equazioni al numero delle incognite non può essere raggiunto altro che particolarizzando S.

Nel'ambito degli ordinari fenomeni termo-meccanici si possono aggiungere sei equazioni tutte le volte che ogni cambiamento di stato del corpo naturale rappresentato da S possa convenientemente schematizzarsi in una trasformazione del sistema, reversibile nel senso termodinamico della parola.

Siano sdC_* ed udC_* l'entropia e l'energia interna della generica particella di S, E l'equivalente meccanico del calore. Introduciamo la 1^a funzione caratteristica di Massieu (*energia utilizzabile* di Maxwell, *potenziale termodinamico* di Duhem) colla posizione

$$\theta = EsT - u.$$

I due principi classici della Termodinamica, combinati colla (5), portano a riconoscere⁽¹⁾ che per ciascuna particella di S (fissato lo stato di riferimento, nonchè i valori delle due costanti additive arbitrarie in s ed u) la θ non può dipendere altro che dai valori locali delle caratteristiche di deformazione e della temperatura assoluta,

$$\theta = \theta[\varepsilon_r, \gamma_s; T],$$

ed è legata alle tensioni ausiliari Y dalle relazioni

$$(7) \quad Y_{rr} = \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_r}, \quad Y_{s+1, s+2} = \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_s} \quad (r, s = 1; 2, 3).$$

Dopo questo, per pareggiare il numero delle equazioni al numero delle incognite, occorre in generale aggiungere l'equazione della propagazione del calore e la rispettiva condizione al contorno. La forma lagrangiana di queste equazioni è estremamente complicata⁽²⁾. Fortunatamente la loro aggiunta non occorre, anzi rimane esclusa, tanto nel caso limite delle trasformazioni isoterme, quanto in quello delle trasformazioni adiabatiche. Nel 1° caso T si riduce ad una costante assegnata. Nel 2° caso la condizione d'isoentropia permette di eliminare T e, dopo una certa correzione del potenziale termodinamico, tutto va come se si trattasse di una trasformazione isoterma.

(1) Cfr., ad. es., A. SIGNORINI, *Sui sistemi a trasformazioni reversibili e la propagazione del calore* (« Atti della R. Accademia di Torino », LXVI, 1930-31).

(2) Cfr. loc. cit. (1).

Riavvicinando le (7) alla (6) appare evidente quanto abbiamo asserito in fine al n°. 1.

Termineremo rilevando che, per effetto delle stesse (7) e della (5), in ogni trasformazione reversibile isoterma la quale faccia passare dC_* dallo stato $\epsilon_r^{(1)}, \gamma_s^{(1)}, T$ allo stato $\epsilon_r^{(2)}, \gamma_s^{(2)}, T$ il lavoro delle forze esterne rimane espresso da

$$(8) \quad \Delta A_e^{(i)} = -dC_* \{ \theta[\epsilon_r^{(2)}, \gamma_s^{(2)}; T] - \theta[\epsilon_r^{(1)}, \gamma_s^{(1)}; T] \}.$$

Meccanica. — *Sulla meccanica dei corpi rigidi negli spazi generalizzati.* Nota ⁽¹⁾ di ANGELINA CABRAS, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

In una Nota precedente ⁽²⁾ ho detto di alcuni metodi atti a studiare la cinematica dei moti rigidi in un S_n uniforme non euclideo. La statica e la dinamica corrispondente presentano minore interesse di studio; perchè le considerazioni cinematiche possono trovare applicazione nello studio di trasformazioni come quelle lorentziane e einsteiniane nello spazio-tempo e in altri spazi o insiemi continui che s'incontrano nella fisica moderna; invece lo studio di movimenti in relazione a ipotetiche masse e forze in uno spazio generalizzato corre rischio di riuscire troppo astratto. Questo studio è stato fatto per l' S_3 ellittico da vari autori, segnatamente inglesi, e per quello iperbolico dal De-Francesco, coi metodi classici della meccanica. Qui mi propongo di indicare uno schema di procedimento per applicare i metodi esposti nella Nota precedente alle trattazioni statiche e dinamiche uniformemente in tutti gli S_n ellittici. Ne risulterà la possibilità di qualche applicazione a studi geometrici e di calcolo tensoriale.

Ammettiamo che in questo S_n la statica dei corpi rigidi possa venire fondata sulla considerazione di forze paragonabili a fili tesi; cioè che ogni sforzo fisico sia risolubile in un insieme di forze di questo tipo. Le forze allora sono *cursori*, cioè ogni forza singola è definibile per mezzo di una linea d'azione, su cui è dato un verso e una grandezza scalare. Ammettiamo che le condizioni d'equilibrio siano quelle espresse dal principio dei lavori virtuali. Preciseremo questo principio così. Sia M un punto generico a cui è applicata una forza F : sia δM uno spostamento ipotetico infinitesimo di esso punto: il prodotto scalare di F e di δM sia definito intrinsecamente come di solito (prodotto delle due grandezze nel coseno dell'angolo formato); lo indicheremo con la notazione stessa dello spazio euclideo

$$F \times \delta M,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1930.

(2) *Moti rigidi negli spazi generalizzati*; questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. XII, 1930, p. 316.

quantunque nello spazio curvo i due fattori che compongono questo prodotto non possano venire considerati come vettori.

Allora, se un corpo rigido libero nell' S_n ellittico è sottoposto a un sistema qualunque di forze, la condizione di equilibrio sarà

$$\sum F \times \delta M = 0$$

da valere per tutti gli spostamenti compatibili con la rigidità. Abbiamo visto che un siffatto spostamento generico corrisponde a un atto di moto con $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri indipendenti; quindi esprimendo tutti gli spostamenti dei singoli punti P in funzione di questi parametri, e procedendo come d'ordinario, si ricavano $\frac{n(n+1)}{2}$ condizioni di equilibrio. Avendo ricondotto (v. Nota precedente) lo studio del corpo libero nell' S_n ellittico a quello di un corpo rigido con una dimensione di più, con un punto fisso nell' S_{n+1} euclideo, gli sviluppi procedono come nella geometria euclidea; osserviamo poi che in uno spazio euclideo con $n+1$ dimensioni, le condizioni di rigidità del moto intorno a un punto fisso sono quelle scritte nella Nota precedente, cioè le condizioni di una trasformazione ortogonale di assi, analoghe a quelle in 3 dimensioni. Possiamo quindi senza procedere negli sviluppi, enunciare i risultati, con un parallelo opportuno a ciò che avviene nello spazio ordinario.

Si ricava che le forze nell' S_n ellittico si compongono addizionando geometricamente i cursori rappresentativi, nello stesso modo come se quei cursori rappresentassero atti di moto.

Cartesianamente, riferiamoci a un sistema di $n+1$ assi ortogonali nell' S_{n+1} euclideo, come abbiamo fatto nello studio cinematico. Ogni cursore ha linea d'azione sull'ipersfera; proiettando dall'origine, o centro dell'ipersfera, questa linea diviene un piano: abbiamo dunque che il corrispondente nell' S_{n+1} di quel cursore diviene una giacitura con verso e grandezza scalare, ovvero un'area orientata (bivettore di Grassmann) e in linguaggio statico una coppia; proiettando sui piani coordinati si hanno tante componenti quanti sono essi piani e quindi $\frac{n(n+1)}{2}$, non però indipendenti, ma legate, come abbiamo visto in cinematica, da una serie di condizioni; e corrispondono evidentemente agli altrettanti coefficienti del tensore rappresentativo, studiato a proposito degli atti di moto.

La condizione di equilibrio di un sistema di forze si ottiene allora scrivendo che le somme delle componenti omologhe, così definite, sono nulle. La composizione di più forze si ottiene sommando le componenti omologhe, e questa somma tensoriale dà un tensore, rappresentativo dello sforzo risultante. Ma mentre le componenti di ogni singolo cursore soddi-

sfano alla condizione (v. Nota precedente) che il loro determinante emisimmetrico è degenerare con caratteristica = 2, questa proprietà scompare generalmente facendo la somma.

Così apprendiamo che un sistema di forze in un S_n ellittico (e quindi anche in qualunque S_n a curvatura costante o in un S_n euclideo), e similmente un sistema di coppie in un S_{n+1} euclideo, equivale a uno sforzo di tipo più generale, rappresentabile per mezzo di un tensore con $\frac{n(n+1)}{2}$ componenti indipendenti. Si confronti con gli enti geometrici che Cartan e Schouten hanno chiamato « sistemi di bivettori », senza però darne la rappresentazione tensoriale.

Ciò che avviene nello spazio ordinario è un caso particolare di questo teorema generale.

2. Venendo ora alla parte dinamica, come legge fondamentale pel moto del corpo rigido assumeremo questa:

$$\text{Sforzo} = \frac{d}{dt} (\text{quantità di moto})$$

intesa in senso generalizzato.

Abbiamo di già la generalizzazione del primo membro: come sforzo dovremo intendere quello testè definito, quale risultante di un sistema qualunque di forze, quindi un tensore con $\frac{n(n+1)}{2}$ componenti. Dobbiamo fare altrettanto pel secondo membro.

Consideriamo una particella elementare del corpo, che abbia massa = δm e riguardiamo la sua velocità U come un cursore avente una linea d'azione che passa per la particella stessa. Il prodotto di U per lo scalare δm è ancora un cursore

$$U \delta m$$

che ha la stessa linea d'azione, e rappresenta la quantità di moto della particella, considerata come cursore.

Sommiamo con la regola dei cursori, tutte le quantità di moto delle singole particelle. Abbiamo un risultante

$$Q = \sum U \delta m$$

il quale non è più un cursore ma un tensore di carattere più generale analogo allo sforzo risultante di un sistema di forze. Non vi è difficoltà a derivarlo rispetto al tempo; ciò corrisponde a derivare tutte le sue componenti; indicando allora con \mathfrak{F} lo sforzo risultante che agisce su un corpo rigido, e con Q la risultante tensoriale così definita delle quantità di moto

delle sue particelle, avremmo in forma intrinseca l'equazione fondamentale del moto di un corpo rigido

$$\mathfrak{F} = \frac{dQ}{dt}.$$

Si può andare oltre e riflettere che il tensore Q deve dipendere linearmente dal tensore P rappresentativo dell'atto di moto, perchè risulta da elementi che dipendono linearmente dalle velocità singole dei punti. In altre parole, le componenti di Q sono funzioni lineari omogenee delle componenti di P . Intrinsecamente scriveremo:

$$Q = \mathfrak{S}P$$

dove \mathfrak{S} è un tensore di nuovo tipo che esprime la legge di dipendenza lineare di due tensori; e generalizzando un'espressione proposta dal Cisotti per un caso particolare lo possiamo chiamare *tensore d'inerzia*. Si ha dunque un ultimo

$$\mathfrak{F} = \frac{d}{dt} (\mathfrak{S}P).$$

È ovvio che in generale \mathfrak{S} varia durante il movimento del corpo, perchè dipende dalla sua posizione e orientazione; e non è commutabile con P . Quindi la formola si sviluppa in

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S} \frac{dP}{dt} + \frac{d\mathfrak{S}}{dt} P.$$

Tenendo conto della configurazione del corpo, si dovrà di volta in volta esprimere $\frac{d\mathfrak{S}}{dt}$ in funzione di P per ricavare una formola che, sviluppata in equazioni cartesiane, dà un sistema che è una generalizzazione di quello di Eulero.

Molte di queste considerazioni si trasportano senz'altro agli spazi iperbolici e di tipo misto; e per quelli euclidei o pseudo-euclidei occorre un passaggio al limite come in cinematica e i risultati cessano di essere simmetrici. Ma l'ulteriore sviluppo ci condurrebbe troppo oltre e perderebbe contatto con la realtà.

Meccanica. — *Velocità critiche di masse pesanti su di un binario.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle vibrazioni dei sistemi reticolari elastici e sul colpo d'ariete nelle condotte multiple.* Nota di ENRICO VOLTERRA, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

INTRODUZIONE.

Mi propongo di accennare molto succintamente ad una teoria generale sulle piccole vibrazioni dei sistemi reticolari elastici. Studierò dapprima le leggi generali delle vibrazioni di un sistema reticolare formato da fili elastici tesi aventi nodi in comune ed estremi fissi, oppure vibranti con legge nota, supponendo note la configurazione iniziale del sistema e le velocità iniziali degli elementi delle linee elastiche che compongono il sistema.

Accennerò quindi come tali leggi possano applicarsi allo studio del moto perturbato dell'acqua (colpo d'ariete), nei sistemi reticolari dei tubi in pressione.

Tale studio, che ha importanza per le applicazioni, soprattutto nel campo idraulico, non mi risulta essere mai stato compiuto.

In verità il Routh⁽²⁾ considera un reticolato piano di rettangoli formati di fili elastici e suppone in ogni nodo concentrata una massa che vibra normalmente al piano del reticolato, mentre le forze che tendono a ricondurla nella posizione di equilibrio sono le tensioni elastiche dei fili.

Il caso che studio è invece quello di un reticolato, anche non rettangolare, le cui vibrazioni si propagano lungo i fili elastici e si riflettono ai nodi; nessuna massa è concentrata ai nodi, ma è invece distribuita uniformemente con data densità lungo i fili. Le equazioni fondamentali alle quali arriveremo sono equazioni alle derivate parziali, quelle del Routh, invece, sono equazioni ordinarie.

VIBRAZIONI DI SISTEMI RETICOLARI DI FILI ELASTICI.

Ciascuna linea i del sistema possiederà una vibrazione longitudinale lungo l'asse ξ_i e due vibrazioni trasversali nel piano normale alla linea stessa. Indicheremo con u_i, v_i, w_i le componenti delle vibrazioni secondo tali direzioni, l'energia potenziale P_i della corda di estremi A_i, B_i sarà

$$P_i = - \frac{1}{2} \int_{A_i}^{B_i} \left\{ E_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + K_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + K_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} \right)^2 \right\} d\xi_i$$

(1) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(2) V. ROUTH, *Die Dynamik der Systeme starrer Körper* (1898, vol. 2°, p. 315).

e la forza viva

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{A_i}^{B_i} \rho_i \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right\} d\xi_i$$

ove E_i è il modulo di elasticità, K_i la tensione, ρ_i la densità. Applicando il principio di Hamilton a tutto il sistema reticolare avremo:

$$\delta \sum_i^n \int_{t_1}^{t_2} (P_i + T_i) dt = \delta \sum_i^n \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\left\{ \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 - E_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \right)^2 \right\} + \right. \\ \left. + \left\{ \rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 - K_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \right)^2 \right\} + \left\{ \rho_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 - K_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} \right)^2 \right\} \right] d\xi_i = 0$$

supponendo gli spostamenti nulli ai tempi estremi; e variando ed integrando per parti:

$$\sum_i^n \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{A_i}^{B_i} \left(\rho_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - E_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_i^2} \right) \delta u_i d\xi_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{A_i}^{B_i} \left(\rho_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - K_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi_i^2} \right) \delta v_i d\xi_i dt + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} \int_{A_i}^{B_i} \left(\rho_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - K_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_i^2} \right) \delta w_i d\xi_i dt + \int_{t_1}^{t_2} E_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \delta u_i \right)_{A_i}^{B_i} dt + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} K_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \delta v_i \right)_{A_i}^{B_i} dt + \int_{t_1}^{t_2} K_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} \delta w_i \right)_{A_i}^{B_i} dt \right] = 0.$$

Essendo le δu_i , δv_i , δw_i arbitrarie nell'interno di ogni filo del sistema dovranno per ciascuno di questi sussistere le:

$$(1) \quad \rho_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - E_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_i^2} = 0 \quad \rho_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - K_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi_i^2} = 0 \quad \rho_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - K_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_i^2} = 0.$$

In ciascuno degli l nodi del sistema, ove immaginiamo concorrere n_l fili: h_1, h_2, \dots, h_{n_l} , avremo invece:

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n_l} \int_{t_1}^{t_2} \left(E_{hj} \frac{\partial u_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \delta u_{hj} + K_{hj} \frac{\partial v_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \delta v_{hj} + K_{hj} \frac{\partial w_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \delta w_{hj} \right) dt = 0.$$

Riferiamoci per ciascun nodo l del sistema ad una stessa terna di assi cartesiani ortogonali x, y, z , e prendiamo rispettivamente su tali assi delle quantità λ_l, μ_l, ν_l arbitrarie.

Per ogni linea avevamo adottato un sistema di assi cartesiani (ortogonali) ξ_i, η_i, ζ_i ; ξ_i coincidente in direzione col filo. Facciamo intervenire anche i coseni di tali assi ξ_i, η_i, ζ_i cogli assi fondamentali x, y, z :

	ξ_i	η_i	ζ_i
x	α'_i	β'_i	γ'_i
y	α''_i	β''_i	γ''_i
z	α'''_i	β'''_i	γ'''_i

Assumiamo per ciascun nodo l , come componenti dello spostamento, secondo la terna fondamentale x, y, z le quantità arbitrarie λ_l, μ_l, ν_l ; avremo:

$$(3) \quad \delta u_{hj} = \lambda_l \alpha'_{hj} + \mu_l \alpha''_{hj} + \nu_l \alpha'''_{hj} \quad \delta v_i = \lambda_l \beta'_{hj} + \mu_l \beta''_{hj} + \nu_l \beta'''_{hj}$$

$$\delta w_i = \lambda_l \gamma'_{hj} + \mu_l \gamma''_{hj} + \nu_l \gamma'''_{hj}$$

e la (2) diverrà perciò:

$$\sum_{i, hj}^n \int_{t_1}^{t_2} \left[E_{hj} \frac{\partial u_{hj}}{\partial \xi_{hj}} (\lambda_l \alpha'_{hj} + \mu_l \alpha''_{hj} + \nu_l \alpha'''_{hj}) + K_{hj} \frac{\partial v_{hj}}{\partial \xi_{hj}} (\lambda_l \beta'_{hj} + \mu_l \beta''_{hj} + \nu_l \beta'''_{hj}) + K_{hj} \frac{\partial w_{hj}}{\partial \xi_{hj}} (\lambda_l \gamma'_{hj} + \mu_l \gamma''_{hj} + \nu_l \gamma'''_{hj}) \right] dt = 0.$$

Essendo le quantità λ_l, μ_l, ν_l arbitrarie, dovranno per ciascun nodo essere verificate le relazioni:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i, hj}^n \left[E_{hj} \frac{\partial u_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \alpha'_{hj} + K_{hj} \frac{\partial v_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \beta'_{hj} + K_{hj} \frac{\partial w_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \gamma'_{hj} \right] = 0, \\ \sum_{i, hj}^n \left[E_{hj} \frac{\partial u_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \alpha''_{hj} + K_{hj} \frac{\partial v_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \beta''_{hj} + K_{hj} \frac{\partial w_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \gamma''_{hj} \right] = 0, \\ \sum_{i, hj}^n \left[E_{hj} \frac{\partial u_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \alpha'''_{hj} + K_{hj} \frac{\partial v_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \beta'''_{hj} + K_{hj} \frac{\partial w_{hj}}{\partial \xi_{hj}} \gamma'''_{hj} \right] = 0. \end{array} \right.$$

Riepilogando: lungo ogni linea vale la (1); pei nodi valgono le condizioni espresse dalle (4); per gli estremi isolati ove terminano i fili: r_1, r_2, \dots, r_m supponendo di conoscerne la legge di vibrazione, valgono in generale le condizioni

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{r_s} = U_{r_s}(t) \\ v_{r_s} = V_{r_s}(t) \\ w_{r_s} = W_{r_s}(t) \end{array} \right.$$

ove le $U_{r_s}, V_{r_s}, W_{r_s}$ sono funzioni della t , note per valori della variabile da $-\infty$ a $+\infty$. In particolare sarà $u_{r_s} = 0, v_{r_s} = 0, w_{r_s} = 0$, ove l'estremo i sia fisso.

Mostriamo ora come, assegnate, mediante le (4) e (4'), le condizioni ai limiti (nodi ed estremi), note la configurazione iniziale del sistema e le velocità al tempo $t = 0$ degli elementi dei vari fili che compongono il sistema, il problema delle vibrazioni rimane univocamente determinato, anzi addirittura ricondotto alla discussione di un sistema di equazioni algebriche lineari. Cominciamo col dimostrare che se due vibrazioni di componenti u', v', w' e u'', v'', w'' corrispondono per il tempo $t = 0$ alla stessa configurazione del sistema, alle stesse velocità iniziali ed alle stesse vibrazioni estreme tali vibrazioni risulteranno identiche in un tempo t qualsiasi.

Incominciamo col ritrovare pel sistema, le cui vibrazioni abbiano componenti u_i, v_i, w_i , il teorema delle forze vive. Con facili integrazioni per parti si ha:

$$(5) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_i^n \int_{A_i}^{B_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + a_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + b_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + b_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] d\xi_i =$$

$$= \sum_i^n \left[E_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \right)_{A_i}^{B_i} + K_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \right)_{A_i}^{B_i} + K_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} \right)_{A_i}^{B_i} \right]$$

ove $a_i = \frac{E_i}{\rho_i}, b_i = \frac{K_i}{\rho_i}$.

Per le condizioni (2) (in cui si ponga in particolare $\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt$ ecc.) e (3) il secondo membro delle (5) risulterà $= 0$.

Si avrà così per ciascuna linea elastica del sistema

$$(6) \quad \int_{A_i}^{B_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + a_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + b_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + b_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] d\xi_i = C$$

ove C è una costante rispetto al tempo e la (6) ci esprime il teorema delle forze vive.

In particolare ponendo $u_i = u'_i - u''_i, v_i = v'_i - v''_i, w_i = w'_i - w''_i$ avremo che al tempo $t = 0$ $u_i = v_i = w_i = 0, \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial w_i}{\partial t} = 0$, il che implica $C = 0$.

Varrà quindi per ogni linea elastica la relazione:

$$(7) \quad \int_{A_i}^{B_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + a_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + b_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + b_i \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} \right)^2 \right] d\xi_i = 0$$

da cui segue l'annullarsi delle derivate locali e temporali delle u_i, v_i, w_i ; e quindi sarà sempre

$$u'_i = u''_i, v'_i = v''_i, w'_i = w''_i.$$

Integrali delle (1) saranno gl'integrali di D'Alembert. Per cui

$$u_i = F_i(\xi_i + a_i t) + f_i(\xi_i - a_i t)$$

$$v_i = \Phi_i(\xi_i + b_i t) + \varphi_i(\xi_i - b_i t)$$

$$w_i = \Psi_i(\xi_i + b_i t) + \psi_i(\xi_i - b_i t)$$

le funzioni $F_i, f_i, \Phi_i, \varphi_i, \Psi_i, \psi_i$, a priori incognite, vengono determinate dapprima colle condizioni iniziali per valori dell'argomento corrispondenti alla lunghezza di ciascun filo e si prolungano poi univocamente per mezzo delle condizioni agli estremi.

APPLICAZIONE AL COLPO D'ARIE NEI SISTEMI DI CONDOTTE IN PRESSIONE.

Per mezzo delle equazioni trovate dall'Allievi⁽¹⁾, pei fenomeni di colpo di ariete si possono applicare ai sistemi di tubi in pressione gli stessi procedimenti noti per lo studio delle vibrazioni dei sistemi reticolari elastici. Risultano in particolare estendibili anche le considerazioni precedenti, salvo che (come vedremo tra breve), riescono un po' più complicate le condizioni ai limiti che non sono più tutte lineari ma contengono anche termini di secondo grado.

Le equazioni dell'Allievi pel moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione, sono:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial y}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t}$$

che danno luogo alle

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases}$$

ove v ed y sono rispettivamente le velocità e le altezze idrauliche corrispondenti alle pressioni in un istante qualunque ed in una sezione qualunque.

Il parametro del moto perturbato è $\frac{1}{a^2} = \frac{\omega}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{E} \frac{d}{e} \right)$ ove $\omega, g, \epsilon, E, d, e$, sono rispettivamente il peso specifico, del fluido, l'accelerazione

(1) V. ALLIEVI, *Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione*, « Atti dell'Associaz. Elettrotecnica Italiana ». 1903.

di gravità, il modulo di elasticità del fluido, il modulo di elasticità della sostanza di cui è composto il tubo, il diametro e lo spessore del tubo.

Le (8) sono manifestamente soddisfatte dalle

$$y = y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad v = v_0 - \frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right]$$

ove y_0 e v_0 sono l'altezza di carico corrispondente alla pressione e la velocità di regime della perturbazione. F e f sono funzioni da determinarsi mediante le condizioni iniziali e quelle ai limiti.

Tali ultime condizioni sono: per un generico nodo l , ove concorrono n tubi $1, 2, \dots, n$, dette y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) le altezze idrauliche corrispondenti alle pressioni e Q_i le rispettive portate, le n relazioni

$$\sum_i^n Q_i = 0 \quad y_1 = y_2 = \dots = y_n$$

esprimenti ordinatamente il principio di continuità e l'eguaglianza delle pressioni. In una estremità isolata munita di bocca d'efflusso, comandata da intercettatore di luce variabile con legge nota nel tempo le funzioni v ed y sono legate dall'equazione

$$u_i^2 - v_i^2 = 2 g y_i$$

ove u è la velocità di efflusso in aria libera.

Inoltre è noto il rapporto tra luce d'efflusso e sezione del tubo e quindi tra velocità v ed u

$$v_i = u_i \psi(t)$$

per valori di t da $-\infty$ a $+\infty$.

Per gli estremi in cui non si ha variazione di pressione

$$y_i = 0.$$

L'applicazione di tali equazioni ci permette di risolvere molti problemi utili nella idraulica pratica, come mi propongo di accennare in successive Note.

Meteorologia. — *Sul coefficiente di correlazione*⁽¹⁾. Nota di R. BILANCINI, presentata⁽²⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

È noto come nelle scienze meteorologiche si faccia assai di frequente uso del coefficiente di correlazione, allo scopo di accertare se fra due grandezze, delle quali si posseggano due serie di osservazioni, esista o no una relazione. È anche noto che, fra le condizioni sotto le quali la validità del metodo è stata dimostrata, ve n'è una che riguarda la forma della relazione che intercede fra le due grandezze: e precisamente il metodo è stato dimostrato applicabile quando le due grandezze sono legate da una relazione lineare, almeno in via approssimativa (3).

Vogliamo in questa Nota esaminare, in un caso abbastanza generale, che cosa avvenga del coefficiente di correlazione allorchè il legame fra le due grandezze considerate è più complesso, e precisamente quando una di esse è esprimibile mediante un polinomio di grado n (maggiore di 1) nell'altra.

Per semplificare la trattazione supporremo anzitutto di conoscere, anzichè due serie di valori, osservati a uguali intervalli di tempo, delle due grandezze X e Y (come avviene nei casi pratici), la espressione stessa di tali grandezze in funzione del tempo t . È ovvio che in tal modo i risultati che otterremo saranno praticamente applicabili soltanto con una certa approssimazione.

In tale ipotesi la espressione del coefficiente di correlazione r , come si vede subito, è:

$$(1) \quad r = \frac{\int_0^T XY \, dt - T\alpha\beta}{\sqrt{\left(\int_0^T X^2 \, dt - T\alpha^2\right)\left(\int_0^T Y^2 \, dt - T\beta^2\right)}},$$

dove $(0, T)$ è l'intervallo di tempo in cui si considerano le due funzioni, α e β le loro medie in tale intervallo.

Nei casi che ordinariamente si considerano in meteorologia le due grandezze variano fra limiti finiti, con oscillazioni più o meno regolari; per questa ragione, volendo semplificare, supporremo che la X vari addirittura sinusoidalmente col tempo; quanto alla Y , faremo, come si è già

(1) Lavoro eseguito all'Ufficio Presagi.

(2) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(3) Cfr. BAUR, *Die Verwerdung der Korrelationsmethode in der Meteorologie*. «Met. Zeitschr.», Juni, 1925.

detto, la ipotesi che essa sia un polinomio di grado n nella X ; a questo ci si potrà ridurre, almeno approssimativamente, anche in casi più generali, sviluppando in serie la Y in funzione della X , e trascurando i termini della serie da un certo punto in poi.

Più precisamente porremo:

$$(2) \quad \begin{aligned} X &= \cos t \\ Y &= c_1 \cos t + c_2 \cos^2 t + \dots + c_n \cos^n t, \end{aligned}$$

dove c_1, c_2, \dots, c_n sono certe costanti; si noti che nella espressione della Y non abbiamo messo alcun termine costante, perchè questo si può sempre supporre uguale a zero, non alterandosi evidentemente la r per l'aggiunta di una costante alla X o alla Y .

Come intervallo di tempo sceglieremo naturalmente, data la periodicità delle due funzioni, l'intervallo $(0, 2\pi)$ e noteremo che il coefficiente calcolato per questo intervallo vale anche, come si vede subito, per qualsiasi altro intervallo di ampiezza multipla di 2π .

Venendo al calcolo degli integrali che compaiono nella espressione di r si ha:

$$(3) \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0,$$

$$(4) \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n c_l \int_0^\pi \cos^l t \, dt = \frac{1}{2} \sum_1^{n'} A_{2l} c_{2l},$$

dove si è posto:

$$\begin{cases} A_{2k} = 1 & \text{per } k = 1 \\ A_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 5 \cdot 3}{2k(2k-2)\dots 6 \cdot 4} & \text{per } k = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

e dove n' è il massimo intero pari non superiore a n .

Così pure:

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} XY \, dt = \sum_1^n c_l \int_0^{2\pi} \cos^{l+1} t \, dt = \pi \sum_1^{n''} A_{2l} c_{2l-1},$$

essendo n'' il massimo intero pari non superiore a $n+1$.

Inoltre:

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} X^2 \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi,$$

e infine:

$$\int_0^{2\pi} Y^2 dt = \sum_1^n c_l^2 \int_0^{2\pi} \cos^{2l} t dt + 2 \sum_{hk} c_h c_k \int_0^{2\pi} \cos^{h+k} t dt$$

in cui la sommatoria doppia va estesa a tutte le combinazioni semplici di due indici presi fra $1, 2, \dots, n$. Ne segue:

$$(7) \quad \int_0^{2\pi} Y^2 dt = \pi \left(\sum_1^n A_{2l} c_l^2 + 2 \sum_{hk} A_{h+k} c_h c_k \right)$$

dove ora la sommatoria doppia va estesa soltanto a quelle combinazioni di due indici per cui la somma è un numero pari.

Portando le espressioni (3), (4), (5), (6) e (7) nella (1) si trova, dopo le opportune semplificazioni:

$$r = \frac{N}{D}$$

dove è

$$N = \sum_1^{\frac{n''}{2}} A_{2l} c_{2l-1}$$

$$D^2 = \sum_1^{\frac{n''}{2}} A_{4l-2} c_{2l-1}^2 + \sum_1^{\frac{n'}{2}} \left(A_{4l} - \frac{1}{2} A_{2l}^2 \right) c_{2l}^2 + 2 \sum'_{hk} A_{h+k} c_h c_k + 2 \sum''_{hk} \left(A_{h+k} - \frac{1}{2} A_h A_k \right) c_h c_k$$

in cui la \sum' va estesa a tutte le combinazioni semplici di due indici entrambi dispari, la \sum'' a tutte le combinazioni semplici di due indici entrambi pari.

Da questa espressione risulta anzitutto che, nel nostro caso, il coefficiente di correlazione dipende dai coefficienti del polinomio Y , a meno che questo non sia di primo grado (perchè allora si riduce a ± 1 , secondo il segno di c_1). Infatti, come si vede subito, imporre che r sia, per una data n , costante, e cioè che non dipenda dalle c , porta, escludendo il caso $n = 1$, a relazioni impossibili fra le A .

Dunque, eccettuato il caso della relazione lineare, il valore di r è funzione delle c , talchè per relazioni dello stesso grado n può assumere valori del tutto diversi. Così, per esempio, nel caso $n = 3$, si ha $r = 0$ per $c_1 = -\frac{3}{4} c_3$; $r = \pm 0.95$ per $c_1 = c_2 = 0$; $r = \pm 0.44$ per $c_1 = 0, c_2 = 3 c_3$.

Il metodo della correlazione è perciò privo di significato se le due grandezze non sono in relazione lineare.

In secondo luogo notiamo che *la presenza di potenze pari ha sul coefficiente di correlazione esclusivamente la influenza di diminuirne il valore assoluto*. Infatti le c a indice pari compaiono soltanto a denominatore, e il complesso dei termini che le contengono è essenzialmente positivo; ciò si vede subito pensando che il radicando del denominatore è una forma quadratica definita positiva nelle c , che risulta dalla somma di due forme quadratiche; una nelle sole c a indice dispari, l'altra nelle sole c a indice pari; ciascuna di queste due forme, in particolare la seconda, deve essere perciò definita positiva.

La presenza di potenze a indice dispari può invece, secondo i casi, aumentare o diminuire il valore assoluto del coefficiente di correlazione. La cosa si vede immediatamente sopra esempi particolari.

In ogni modo però *la presenza di potenze a indice maggiore della unità non permette mai al coefficiente di correlazione di raggiungere il valore assoluto 1, come invece avviene quando la relazione fra le due grandezze sia puramente lineare*. Infatti la differenza fra il quadrato del denominatore e quello del numeratore, che è una forma quadratica, necessariamente definita positiva⁽¹⁾, in c_2, c_3, \dots, c_n , si annulla soltanto quando tutte queste c sono uguali a zero.

Notiamo ancora che, nel caso che la relazione porti solo la potenza massima n , essendo $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$, il coefficiente di correlazione è sempre nullo se n è pari; se invece n è dispari il coefficiente è sempre diverso da zero, e vale $\pm \frac{A_{n+1}}{\sqrt{A_{2n}}}$.

Vogliamo ancora dare un cenno su di una interpretazione molto semplice del coefficiente di correlazione, che si ricollega a quanto precede.

Anzichè calcolare il coefficiente di correlazione in $(0, 2\pi)$ fra le funzioni (2) possiamo calcolarlo fra le funzioni:

$$(2') \quad \begin{cases} X' = \cos t \\ Y' = a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots + a_n \cos nt \end{cases}$$

dove le a sono certe costanti. Evidentemente il problema equivale al precedente, dato che ogni polinomio del tipo Y si può ridurre al tipo Y' e viceversa, ricorrendo a note formule trigonometriche che esprimono le potenze del $\cos t$ mediante i coseni degli archi multipli di t , e inversamente.

(1) Si ricordi la nota disuguaglianza di BESSEL:

$$\int_a^b f^2 dx \int_a^b \varphi^2 dx \geq \left(\int_a^b f \varphi dx \right)^2.$$

Data questa equivalenza, si potrebbe calcolare il coefficiente fra le (2') ricorrendo alla formula già trovata; ma è più conveniente ricavarlo direttamente. Si a:

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n a_l \int_0^{2\pi} \cos l t \, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} X' Y' \, dt = \sum_1^n a_l \int_0^{2\pi} \cos t \cos l t \, dt = \pi a_1$$

$$\int_0^{2\pi} X'^2 \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} Y'^2 \, dt = \sum_1^n a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 l t \, dt + 2 \sum_{hk} a_h a_k \int_0^{2\pi} \cos h t \cos k t \, dt = \pi \sum_1^n a_l^2.$$

Formando ora il coefficiente di correlazione mediante le espressioni trovate abbiamo la formula semplicissima e notevole:

$$r = \frac{a_1}{\sqrt{\sum_1^n a_l^2}}.$$

Questa formula che, crediamo, potrà avere qualche applicazione, mette bene in evidenza il fatto che la presenza di termini a periodo sottomultiplo di 2π ha unicamente l'effetto di diminuire il coefficiente di correlazione, e tanto più, quanto maggiore è la loro ampiezza.

Enunciando il risultato in parole potremo concludere che: *il coefficiente di correlazione, relativo a un intervallo uguale a un periodo o a un multiplo di periodo, tra la funzione $\cos t$ e la somma*

$$a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots + a_n \cos nt,$$

dove le a sono certe costanti, è uguale al rapporto fra l'ampiezza a_1 del termine in $\cos t$ della somma e la radice quadrata della somma dei quadrati delle ampiezze di tutti i termini della somma stessa.

Fisica. — *Sopra l'elettrodinamica quantistica.* Nota II ⁽¹⁾ di E. FERMI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

In una Nota pubblicata recentemente in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ ho scritto in forma quantistica le equazioni dell'elettrodinamica; cioè le equazioni del sistema costituito dal campo elettromagnetico e da un numero qualunque di cariche elettriche puntiformi. Le equazioni scritte allora si riferivano al caso non relativistico; presupponevano cioè che la velocità delle cariche non fossero molto elevate. Esse possono tuttavia senza alcuna difficoltà essere scritte in forma relativistica, basandosi sopra la teoria di Dirac dell'elettrone rotante. È noto che recentemente anche W. Heisenberg e W. Pauli ⁽³⁾ hanno trattato il problema dell'elettrodinamica quantistica. Siccome però i metodi seguiti da questi autori sono essenzialmente diversi dai miei, credo non inutile pubblicare anche i miei risultati.

La forma definitiva in cui verranno espressi i risultati di questo lavoro è particolarmente semplice. Troveremo infatti che la Hamiltoniana che, nel senso del principio di corrispondenza, rappresenta la naturale traduzione quantistica dell'elettrodinamica classica, si ottiene semplicemente aggiungendo alla Hamiltoniana della teoria dell'irradiazione di Dirac un termine che rappresenta l'energia elettrostatica del sistema di cariche elettriche; per modo che, nella presente forma, l'elettrodinamica quantistica viene a non essere in alcun modo più complicata della teoria di Dirac dell'irradiazione. Questa semplificazione si può raggiungere come vedremo mediante una opportuna espressione della condizione

$$(1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } U = 0$$

che lega tra di loro i potenziali scalare e vettore e che, anche nella teoria di Heisenberg e Pauli costituisce uno degli elementi più caratteristici dell'elettrodinamica quantistica.

Nella Nota I abbiamo trovata l'espressione (21) che rappresenta l'Hamiltoniana del nostro sistema. Se, invece della meccanica classica, vogliamo rappresentare il moto dei punti per mezzo della Hamiltoniana di Dirac,

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 settembre 1930.

(2) E. FERMI, « Rend. Lincei », 9, 881, 1929. Citata nel seguito con I.

(3) W. HEISENBERG und W. PAULI, « Zs. f. Phys. », 56, 1, 1929; 59, 160, 1930.

possiamo verificare facilmente che, al posto della (21) I dobbiamo usare l'Hamiltoniana seguente:

$$(2) \quad H = -c \sum_{ij} \gamma_i \times p_i - \sum_i \delta_i m_i c^2 + \sum_i e_i c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s Q_s \cos \Gamma_{si} + \\ + \sum_s e_i c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s \gamma_i \times (\alpha_s \chi_s + A_{s1} w_{s1} + A_{s2} w_{s2}) \sin \Gamma_{si} + \\ + \sum_s \left[\frac{1}{2} (\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2 + \tilde{\omega}_s^2 - P_s^2) + 2\pi^2 v_s^2 (w_{s1}^2 + w_{s2}^2 + \chi_s^2 - Q_s^2) \right].$$

Le notazioni sono quelle della Nota I; δ_i e γ_i rappresentano un q — scalare e un q — vettore tali che $\delta_i, \gamma_{ix}, \gamma_{iy}, \gamma_{iz}$ sono i quattro operatori, rappresentabili con matrici del quarto ordine, che intervengono nella Hamiltoniana relativa all' i -esimo punto materiale; naturalmente le γ e la δ relative a uno dei punti sono permutabili con le γ e la δ relative a un altro dei punti.

Osserviamo in particolare che dall'Hamiltoniana (2) risulta

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_s = \frac{\partial H}{\partial P_s} = -P_s \quad ; \quad \dot{P}_s = -\frac{\partial H}{\partial Q_s} = 4\pi^2 v_s^2 Q_s - c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \\ \dot{\chi}_s = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\omega}_s} = \tilde{\omega}_s \quad ; \quad \dot{\tilde{\omega}}_s = -\frac{\partial H}{\partial \chi_s} = -4\pi^2 v_s^2 \chi_s - c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \gamma_i \times \alpha_s \sin \Gamma_{si} \end{array} \right.$$

e

$$\dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = -c \gamma_i$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \cos \Gamma_{si} = 2\pi v_s \gamma_i \times \alpha_s \sin \Gamma_{si}.$$

Da questa equazione e dalle (3) risulta subito che anche dalla nuova Hamiltoniana (2) deriva l'equazione (18) I; e quindi che se l'espressione (19) I si annulla insieme alla sua derivata prima all'istante zero, essa resta sempre nulla in virtù delle equazioni differenziali. E resta quindi verificata la condizione (1), equivalente alla (19) I. Per mezzo delle (3), la (19) I si può scrivere

$$(4) \quad 2\pi v_s \chi_s - P_s = 0$$

e la sua derivata, a meno di un fattore costante

$$(5) \quad \tilde{\omega}_s - 2\pi v_s Q_s + \frac{c}{2\pi v_s} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} = 0.$$

In una interpretazione classica potremmo dunque dire che l'elettrodinamica ordinaria si ottiene integrando le equazioni canoniche dedotte dalla (2) e imponendo (4) e (5) come condizioni iniziali; ciò basta, poichè si è detto che se (4) e (5) sono verificate all'istante zero, esse lo sono anche automaticamente a un istante qualsiasi.

Per tradurre tutto questo nel linguaggio della meccanica quantistica, osserviamo che, affinchè le due grandezze (4) e (5) possano avere simultaneamente il valore zero, è necessario che esse siano commutabili, poichè altrimenti il fatto che una delle due grandezze ha un valore determinato renderebbe di necessità indeterminato il valore dell'altra. Ora si verifica facilmente, in base alle ordinarie regole di commutazione, che i primi membri di (4) e (5) sono effettivamente commutabili; si può quindi anche quantisticamente attribuire ad essi allo stesso istante il valore determinato zero.

Al procedimento classico di integrazione delle equazioni canoniche con valori arbitrari delle costanti di integrazione, corrisponde, nella meccanica ondulatoria l'integrazione dell'equazione di Schroedinger corrispondente alla Hamiltoniana (2), scegliendo arbitrariamente la funzione che rappresenta lo scalare di campo

$$(6) \quad \psi = \psi(t, x_i, \Phi_i, w_{s1}, w_{s2}, \chi_s, Q_s)$$

(σ_i rappresenta simbolicamente la coordinata interna « spincoordinata » dell'iesimo corpuscolo) per il valore $t = 0$ del tempo. Se vogliamo invece soddisfare le condizioni (4) e (5) non possiamo più lasciare arbitraria questa funzione; resta invece determinato il modo secondo cui essa dipende dalle variabili χ_s e Q_s . Siccome infatti $\tilde{\omega}_s$, coniugata di χ_s , deve avere, secondo la (5) il valore

$$\tilde{\omega}_s = 2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si}$$

risulta che ψ deve dipendere da χ_s nel fattore

$$(7) \quad e^{\frac{2\pi i}{h} \chi_s \left(2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)}.$$

Dalla (4) segue in modo simile che Q_s deve intervenire soltanto nel fattore

$$(8) \quad e^{\frac{2\pi i}{h} 2\pi\nu_s Q_s \chi_s}$$

il quale è del resto già contenuto nel fattore (7). In conclusione la soluzione corrispondente alle condizioni (4) e (5) deve avere la forma:

$$(9) \quad \psi = \left[\prod_s e^{\frac{2\pi i}{h} \chi_s \left(2\pi\nu_s Q_s - \frac{c}{2\pi\nu_s} \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)} \right] \varphi(t, x_i, \sigma_i, w_{s1}, w_{s2}).$$

Dobbiamo ora dimostrare che effettivamente si può soddisfare l'equazione di Schroedinger per mezzo della posizione (9). L'equazione di Schroedinger dedotta dall'Hamiltoniana (2) è

$$(10) \quad -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

dove H è naturalmente interpretato come un operatore. Sostituendo nella (10) al posto di ψ l'espressione (9) si trova, con calcoli non difficili la seguente equazione a cui deve soddisfare φ :

$$(11) \quad -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = R\varphi$$

dove R rappresenta il seguente operatore

$$(12) \quad R = -c \sum_i \gamma_i \times p_i - \sum_i \delta_i m_i c^2 + \sum_i e_i c \left| \frac{8\pi}{\Omega} \sum_i \gamma_i \times (A_{s1} w_{s1} + A_{s2} w_{s2}) \sin \Gamma_{si} + \right. \\ \left. + \sum_s \left[\frac{1}{2} (\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2) - 2\pi^2 v_s^2 (w_{s1}^2 + w_{s2}^2) \right] + \frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} \left(\sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)^2 \right.$$

A prescindere dall'ultimo termine, R coincide con l'Hamiltoniana della teoria dell'irradiazione di Dirac, in cui si trascura il potenziale scalare e la componente longitudinale del potenziale vettore, considerando solo il campo determinato dalle componenti trasversali del potenziale vettore, e cioè il solo campo di radiazione. Dobbiamo discutere il significato dell'ultimo termine. Per questo lo trasformiamo nel modo seguente:

$$\frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} \left(\sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)^2 = \frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_{sij} e_i e_j \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{v_s^2} = \\ = \frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_{ij} e_i e_j \sum_s \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{v_s^2}.$$

La somma rispetto ad s si può trasformare in un integrale e si trova, con calcoli privi di difficoltà

$$\sum_s \frac{\cos \Gamma_{si} \cos \Gamma_{sj}}{v_s^2} = \frac{\pi\Omega}{2c^2} \frac{1}{r_{ij}}$$

dove r_{ij} rappresenta la distanza tra i due punti i e j . Sostituendo troviamo

$$(13) \quad \frac{c^2}{\pi\Omega} \sum_s \frac{1}{v_s^2} \left(\sum_i e_i \cos \Gamma_{si} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{e_i e_j}{r_{ij}}.$$

La (13) ci dà dunque semplicemente la ordinaria espressione dell'energia elettrostatica; come nell'elettrostatica classica, l'espressione (13) diventa infinita nel caso di cariche elettriche puntiformi. Questo inconveniente, più che dalla elettrodinamica, deriva dalla imperfetta conoscenza della struttura dell'elettrone, e potrebbe p. es. venir eliminato considerando elettroni di raggio finito. Noi lo elimineremo formalmente, come si suol fare anche nell'elettrostatica classica, escludendo dalla somma (13) i termini per cui $i = j$ che rappresentano in certo modo una costante additiva infinitamente grande. Indicheremo ciò con un'apice al segno Σ . Per mezzo della (13), la (12) diventa:

$$(14) \quad R = -c \sum_i \gamma_i \times p_i - \sum_i \delta_i m_i c^2 + \sum_i e_i c \sqrt{\frac{8\pi}{\Omega}} \sum_s \gamma_i + (A_{s1} w_{s1} + A_{s2} w_{s2}) \sin \Gamma_{si} + \\ + \sum_s \left[\frac{1}{2} (\omega_{s1}^2 + \omega_{s2}^2) + 2\pi^2 v_s^2 (w_{s1}^2 + w_{s2}^2) \right] + \frac{1}{2} \sum_{ij}' \frac{e_i e_j}{r_{ij}}.$$

Osserviamo infine che la funzione φ che abbiamo sostituito allo scalare di campo ψ per mezzo della (9) può in tutte le considerazioni sostituirsi ad esso, da cui differisce per un fattore complesso di modulo 1. La φ soddisfa all'equazione (11) che è del tipo di una equazione di Schrodinger in cui però si deve prendere come Hamiltoniana R invece di H . Questa nuova Hamiltoniana R , come si legge immediatamente dalla (14) è costituita semplicemente aggiungendo l'ordinaria espressione dell'energia elettrostatica alla ordinaria Hamiltoniana dei termini di pura radiazione. Possiamo dunque concludere che, in questa forma, il problema di elettrodinamica quantistica non è in alcun modo più complicato di un ordinario problema di teoria della radiazione.

Naturalmente, come già abbiamo accennato, anche questa teoria conserva in se due difetti fondamentali che però più che di origine elettrodinamica, possono considerarsi derivanti dalla non completa conoscenza della struttura elettronica. Essi sono la possibilità che ha l'elettrone di Dirac di passare a livelli energetici con energia negativa ed il fatto che l'energia intrinseca a valore infinito se si ammette l'elettrone esattamente puntiforme.

Fisica (Optica). — *Metodo semplice per il calcolo di una lente piano-convessa asferica* ⁽¹⁾. Nota di G. B. PACELLA, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Il problema che ci siamo proposti di risolvere e di cui in questa Nota riportiamo la soluzione, consiste nella ricerca della forma da assegnare ad una lente asferica con una faccia piana perchè sia stigmatica per il punto all'infinito dell'asse quando essa sia investita da un fascio di luce monocromatica.

A questo scopo fisseremo la posizione del fuoco F e quella della faccia piana MN ; tenendo conto che il raggio incidente generico parallelo all'asse darà luogo ad una traiettoria ABF , ricerchiamo l'equazione del meridiano per A .

Le relazioni che si possono scrivere fra gli angoli sono

$$(1) \quad \text{sen } i = n \text{ sen } r$$

$$(2) \quad \text{sen } v = n \text{ sen } u$$

$$(3) \quad i = r + u$$

di cui l'ultima discende dall'esame del triangolo ABD . Non vi possono essere altre relazioni, chè altrimenti riuscirebbero determinati in unico modo i, r, u, v .

Per giungere all'equazione cui si è accennato stabiliamo un sistema d'assi con l'origine del vertice O della lente: l'asse y tangente ad un meridiano, l'asse x coincidente con l'asse ottico della lente e rivolto verso il fuoco. Ciò fatto, indicando con η l'ordinata del punto della superficie piana da cui si spicca il raggio emergente, con a lo spessore della lente al vertice, con b la distanza del fuoco dalla superficie piana, notando la relazione immediata

$$(4) \quad \eta = b \text{ tang } v,$$

si ottengono le due equazioni

$$(5) \quad x + \frac{a-x}{\cos u} n + \frac{\eta}{\text{sen } v} = an + b$$

$$(6) \quad (a-x) \text{ tang } u + \eta = y.$$

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale di ottica, Firenze.

(2) Nella seduta del 2 novembre 1930.

Conviene esaminare il giuoco delle costanti a e b per giudicare delle disponibilità che può offrire un blocchetto di vetro assegnato: il massimo diametro, corrispondente alla massima luminosità, si ottiene per $x = a$ e pur notando che questa è una condizione limite, non raggiungibile in pratica, associamola alla (5); ne risulta

$$a + \frac{\eta}{\sin \bar{v}} = an + b.$$

Supponendo poi $n = 1.5$, applicando la (4) discendono successivamente

$$\tan \bar{v} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a^2}{4} + ab}$$

$$b = \frac{d^2 - a^2}{4a}$$

Questo è il valore minimo che può assumere b . Fisicamente è evidente; per rendersene conto basterà mettere l'equazione (5) sotto la forma

$$x + \frac{a - x}{\cos u} n + \frac{b}{\cos v} = an + b$$

e notare che per b abbastanza grande anche i massimi di v e di u — corrispondenti alla zona marginale del blocco — sono prossimi a zero onde per x risultano valori positivi e minori di a .

Fisica (Elettrostatica). — *Calcolo della risultante e del momento risultante delle pressioni elettrostatiche, in un campo piano, con formule analoghe a quelle idrodinamiche del Blasius.* Nota⁽¹⁾ di A. MASOTTI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. In questa Nota viene messa in rilievo l'analogia fra le pressioni elettrostatiche, che si esercitano sulla superficie di un conduttore elettrizzato in equilibrio, e le pressioni idrodinamiche, che un liquido in moto permanente ed irrotazionale esercita sulla superficie di un solido immerso. Questa analogia dà lo spunto alla deduzione di formule, atte al calcolo della risultante e del momento risultante delle pressioni elettrostatiche nei campi piani, analoghe alle formule idrodinamiche del Blasius.

A titolo di applicazione viene ritrovata quella interpretazione elettrostatica del teorema di Kutta e Joukowski messa in evidenza dal Signorini; viene data altresì la interpretazione elettrostatica del teorema di Grammel. Ciò permette di enunciare la seguente proposizione: *Un conduttore cilindrico indefinito si trova in un campo elettrico che ha distribuzione uniforme all'infinito. La risultante delle pressioni elettrostatiche, sull'unità di lunghezza del conduttore, ha la direzione e il senso della forza elettrica all'infinito, ed ha per valore il prodotto dell'intensità di questa per la carica dell'unità di lunghezza del conduttore. Il sistema delle pressioni elettrostatiche è equivalente alla risultante predetta applicata nel baricentro delle cariche.*

2. La superficie di un conduttore elettrizzato in equilibrio è sottoposta a tensioni ad essa normali e rivolte all'esterno. Il valore della tensione per unità di superficie è chiamato *pressione elettrostatica*, ed è dato dalla formula:

$$(1) \quad p = \frac{\epsilon}{8\pi} F^2,$$

se ϵ denota la costante dielettrica del coibente, e F rappresenta il valore della forza elettrica in un punto infinitamente vicino alla superficie del conduttore⁽²⁾.

Nei problemi piani si ha una notevole rappresentazione complessa della forza elettrica. In questo caso il potenziale elettrostatico ψ , funzione armonica delle coordinate cartesiane x, y di un punto del piano, si può conce-

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 settembre 1930.

(2) J. C. MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 2^a ed., vol. I, n. 80 (Oxford, Clarendon Press, 1881). V. anche J. H. JEANS, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, 5^a ed., n. 92 (Cambridge, University Press, 1927).

pire come il coefficiente dell'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ di una funzione analitica di $\tilde{z} = x + iy$, detta *potenziale complesso*:

$$(2) \quad f = \varphi + i\psi;$$

la funzione φ è la armonica associata alla $\psi^{(1)}$. Allora, dette F_x e F_y le componenti cartesiane della forza elettrica, la quantità complessa

$$(3) \quad \Phi = F_y + iF_x$$

è pure funzione analitica di \tilde{z} , legata al potenziale complesso dalla relazione

$$(4) \quad \Phi = \frac{df}{d\tilde{z}} \quad (2).$$

La pressione elettrostatica assume l'espressione:

$$(5) \quad p = \frac{\varepsilon}{8\pi} |\Phi|^2.$$

3. È evidente l'analogia fra il comportamento delle pressioni elettrostatiche, sopportate dalla superficie di un conduttore in equilibrio, e quello delle pressioni idrodinamiche, esercitate da un liquido in moto permanente ed irrotazionale sulla superficie di un solido immerso.

La pressione idrodinamica è normale alla superficie del solido, volta verso l'esterno, e il suo valore è dato dalla formula:

$$(6) \quad p = \frac{\mu}{2} V^2,$$

se μ denota la densità del liquido, e V rappresenta il valore della velocità⁽³⁾.

Nei moti irrotazionali piani, se φ è il potenziale cinetico, ψ è la funzione di corrente, u e v sono le componenti cartesiane della velocità, le quantità complesse

$$(7) \quad f = \varphi + i\psi \quad \text{e} \quad w = u - iv,$$

(1) MAXWELL, loc. cit., cap. XII. JEANS, loc. cit., n. 306 e seguenti. U. CISOTTI, *Elettrostatica piana*, in questi « Rendiconti », vol. XI, ser. 6^a, 1° sem. 1930, pp. 243-246.

(2) Infatti si hanno le relazioni:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -F_x;$$

da esse discende che

$$\frac{df}{d\tilde{z}} = \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial x} = F_y + iF_x = \Phi.$$

(3) CISOTTI, *Idromeccanica piana*, p. 123 (Milano, Tamburini, 1921-1922).

dette rispettivamente *potenziale complesso* e *velocità complessa*, sono funzioni analitiche di z , legate dalla relazione

$$(8) \quad w = \frac{df}{dz} \quad (1).$$

La pressione idrodinamica assume l'espressione:

$$(9) \quad p = \frac{\mu}{2} |w|^2.$$

4. Questa analogia fa presumere che si possano stabilire formule atte al calcolo della risultante e del momento risultante delle pressioni elettrostatiche, nei campi piani, analoghe alle note formule idrodinamiche del Blasius, che qui trascriviamo:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int_c w^2 dz, \\ M = -\frac{\mu}{2} \Re \int_c w^2 z dz; \end{array} \right.$$

esse danno le componenti cartesiane R_x, R_y della risultante delle pressioni *idrodinamiche* subite dall'unità di lunghezza di un solido cilindrico, la cui sezione retta ha per contorno la linea c , e il momento risultante M rispetto all'origine; gli integrali sono estesi al profilo c , percorso in senso antiorario, e la lettera \Re indica « parte reale di » ⁽²⁾.

Si trovano infatti le relazioni seguenti:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_y + iR_x = -\frac{\epsilon}{8\pi} \int_c \Phi^2 dz, \\ M = -\frac{\epsilon}{8\pi} \Re \int_c \Phi^2 z dz; \end{array} \right.$$

esse danno le componenti cartesiane R_x, R_y della risultante delle pressioni *elettrostatiche* subite dall'unità di lunghezza di un conduttore cilindrico, la

(1) CISOTTI, loc. ult. cit., n. 31.

(2) H. BLASIUS, *Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik*, « Zeitschrift für Mathematik und Physik », 58 Bd., 1909, pp. 90-110 e 59 Bd., 1910, pp. 43-44. V. anche CISOTTI, loc. ult. cit., n. 105.

cui sezione retta ha per contorno la linea c , e il momento risultante M rispetto all'origine; gli integrali sono estesi al profilo c , percorso in senso antiorario, e la lettera \mathcal{R} ha ancora lo stesso significato ⁽¹⁾.

5. Una semplice applicazione di queste formule permette di ritrovare e completare il bel teorema esposto dal Signorini nella Nota *Interpretazione elettrostatica del teorema di Kutta-Joukowski* ⁽²⁾.

Un conduttore cilindrico indefinito, avente la carica Q per unità di lunghezza, si trova in un campo elettrico che ha distribuzione uniforme all'infinito, dove la sua intensità è E . La funzione Φ è regolare su tutto il piano esternamente alla sezione retta S del conduttore, sicchè essa è svi-

(1) Accenniamo ad una deduzione delle (11), analoga a quella delle formule del BLASIUS esposta nel trattato del prof. CISOTTI. — Dalle relazioni

$$R_x = \int_c p dy, \quad R_y = - \int_c p dx$$

si deduce che

$$R_y + iR_x = - \int_c p (dx - idy) = - \frac{\epsilon}{8\pi} \int_c (F_x^2 + F_y^2) (dx - idy);$$

aggiungendo all'ultimo membro il termine

$$- \frac{\epsilon}{8\pi} \cdot 2i \int_c (F_y + iF_x) (F_x dx + F_y dy),$$

che è nullo perchè $F_x dx + F_y dy = 0$ lungo c , si ha la prima delle formule annunciate. La seconda si ottiene partendo dalla relazione

$$M = - \int_c p (x dx + y dy) = - \frac{\epsilon}{8\pi} \int_c (F_x^2 + F_y^2) (x dx + y dy),$$

che può essere scritta come segue:

$$M = - \frac{\epsilon}{8\pi} \mathcal{R} \int_c (F_x^2 + F_y^2) (x + iy) (dx - idy);$$

basterà ora aggiungere al secondo membro il termine nullo

$$- \frac{\epsilon}{8\pi} \mathcal{R} \left[2i \int_c (F_y + iF_x) (x + iy) (F_x dx + F_y dy) \right].$$

(2) Questi « Rendiconti », vol. IX, ser. 6^a, 1° sem. 1929, pp. 192-197.

luppabile, fuori di qualsiasi cerchio col centro nell'origine e contenente S , in una serie del tipo:

$$(12) \quad \Phi = a_0 + \frac{a_1}{\tilde{\gamma}} + \frac{a_2}{\tilde{\gamma}^2} + \dots$$

È facile stabilire il significato fisico dei coefficienti a_0, a_1, a_2 .

Il primo è manifestamente l'espressione complessa della forza elettrica all'infinito:

$$(13) \quad a_0 = \lim_{\tilde{\gamma} \rightarrow \infty} \Phi.$$

Se l'asse delle x ha la direzione e il verso del campo all'infinito, allora dalla precedente discende che

$$(14) \quad a_0 = iE.$$

È poi facile constatare che

$$(15) \quad \int_c \Phi d\tilde{\gamma} = -\frac{+ \pi}{\epsilon} Q \quad (1).$$

Quindi, poichè

$$(16) \quad \int_c \Phi d\tilde{\gamma} = 2 \pi i a_1,$$

si deduce che

$$(17) \quad a_1 = \frac{2 Q}{\epsilon} i.$$

(1) Infatti, detta n la normale a c , rivolta verso l'esterno, si ha la seguente espressione della densità elettrica σ :

$$\sigma = \frac{\epsilon}{4 \pi} \frac{d\psi}{dn} = -\frac{\epsilon}{4 \pi} \frac{d\varphi}{ds},$$

ds essendo l'elemento d'arco del contorno c percorso in senso antiorario (JEANS, loc. cit., nn. 313, 314); la carica Q , distribuita sull'unità di lunghezza del conduttore, risulta così determinata:

$$Q = \int_c \sigma ds = -\frac{\epsilon}{4 \pi} \int_c d\varphi;$$

poichè lungo c il potenziale ψ è costante, si ha che $d\varphi = df = \Phi d\tilde{\gamma}$, e la precedente diviene:

$$Q = -\frac{\epsilon}{4 \pi} \int_c \Phi d\tilde{\gamma};$$

da questa scende subito la formula annunciata.

Si osservi, infine, che il baricentro delle masse elettriche distribuite sul contorno c di S ha l'affissa $z_0 = x_0 + iy_0$ così definita:

$$(18) \quad z_0 = -\frac{\varepsilon}{4\pi Q} \int_c \Phi z dz \quad (1).$$

Quindi, poichè

$$(19) \quad \int_c \Phi z dz = 2\pi i a_2,$$

si deduce che

$$(20) \quad a_2 = \frac{2Q}{\varepsilon} z_0 i.$$

Ciò premesso, le formule (11), che danno subito

$$(21) \quad R_y + iR_x = -\frac{\varepsilon}{2} i a_0 a_1, \quad M = -\frac{\varepsilon}{4} \Re \{ i (a_1^2 + 2a_0 a_2) \},$$

porgono infine le relazioni:

$$(22) \quad R_x = EQ, \quad R_y = 0; \quad M = -EQ y_0.$$

Nelle formule (22) è contenuto il teorema enunciato nel n. 1⁽²⁾.

Fisica. — *L'effetto Raman nell'acqua pura e in alcune soluzioni.* Nota di R. BRUNETTI e Z. OLLANO, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Infatti le due coordinate del baricentro delle cariche sono:

$$x_0 = \frac{1}{Q} \int_c \sigma x ds, \quad y_0 = \frac{1}{Q} \int_c \sigma y ds,$$

e la sua affissa è:

$$z_0 = \frac{1}{Q} \int_c \sigma z ds;$$

basta ora osservare che

$$\sigma ds = -\frac{\varepsilon}{4\pi} d\varphi = -\frac{\varepsilon}{4\pi} df = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \Phi dz$$

per dedurre la (18).

(2) Cfr. R. GRAMMEL, *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges*, p. 15 (Braunschweig, Vieweg, 1917). La deduzione contenuta nel n. 5 di questa Nota si ispira al § 4 dell'opera del GRAMMEL.

Chimica. — *Sulla decomposizione anomala del tetrazoderivato della 2,2'-diammina 1,1'-dinaftile* ⁽¹⁾. Nota di A. CORBELLINI e L. BARBARO presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. CAMBI.

In precedenti ricerche su alcuni derivati dell' $\alpha\alpha$ -dinaftile uno di noi con E. Debenedetti ⁽³⁾ aveva già constatato che la decomposizione del tetrazoderivato della 2,2'-diammina 1,1'-dinaftile procede in modo anomalo dando luogo ad un composto a carattere acido fondente intorno a 250-252°. Comuniciamo i risultati di ulteriori ricerche sull'argomento che ci permettono di dare una interpretazione probabile del meccanismo di questa reazione anormale.

Abbiamo anzitutto constatato che il predetto acido si forma per parziale decomposizione del tetrazocomposto riscaldando le soluzioni acide sia del suo solfato, sia del suo cloruro. La reazione avviene anche a temperatura ordinaria, ma molto lentamente. Accanto all'acido in questione si formano in queste decomposizioni anche altri composti a carattere neutro difficilmente purificabili dei quali stiamo proseguendo lo studio.

La decomposizione del solfato del tetrazonio con acido bromidrico in presenza di bromuro rameoso procede invece normalmente formando il 2,2'-dibromo 1,1'-dinaftile (p. f. 180-181°), come del resto si era già constatato anche nella preparazione del 2,2'-dicloro 1,1'-dinaftile ⁽⁴⁾ e del 2,2'-dinitrile 1,1'-dinaftile ⁽⁵⁾ dalla stessa diammina.

La purificazione del prodotto acido indicato ci ha fornito un composto che fonde decomponendosi a 269°,5 la cui composizione corrisponde alla formula bruta $C_{20}H_{14}O_2N_2$. Il suo carattere acido è dimostrato dal suo comportamento con i carbonati alcalini con i quali forma i sali corrispondenti.

Trattando il suo sale d'argento con ioduro metilico (o il suo sale sodico con solfato dimetilico) e con ioduro etilico si ottengono rispettivamente l'estere metilico $C_{21}H_{16}O_2N_2$ (p. f. 158°) e l'estere etilico $C_{22}H_{18}O_2N_2$ (p. f. 143°).

L'ottenimento di un acido monocarbossilico contenente due atomi di azoto ogni venti atomi di carbonio e lo sviluppo di azoto durante la decomposizione del tetrazocomposto, il quale è evidentemente collegato con la formazione del predetto acido, mettono chiaramente in rilievo che in

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(3) A. CORBELLINI e E. DEBENEDETTI, «Gazz. Chim. Ital.», 59, 394 (1929).

(4) A. CORBELLINI e E. DEBENEDETTI, loc. cit.

(5) L. KALB, «Ber.», 47, 1729 (1914).

questa reazione il gruppo diazonico di un nucleo naftalinico si è comportato in modo diverso da quello dell'altro nucleo. Infatti nei prodotti di reazione non venne isolato alcun composto ossidrilato che facesse pensare ad una decomposizione normale concomitante.

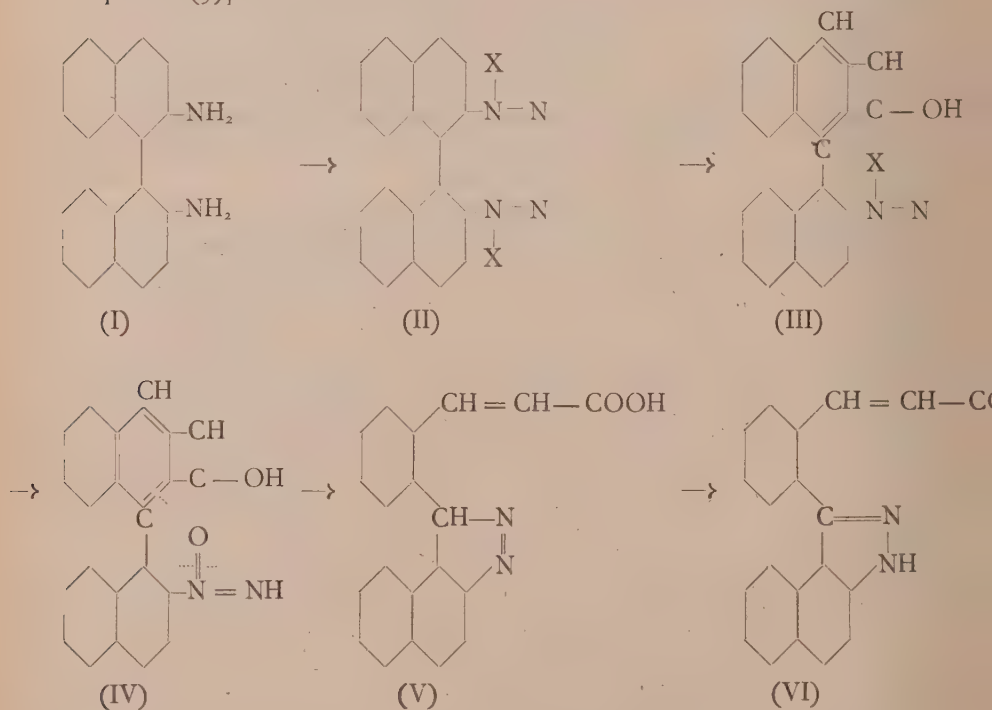
Ciò premesso la formazione dell'acido in questione si può spiegare ammettendo:

1° che nel predetto comportamento dissimetrico dei due nuclei naftalinici un gruppo diazonico del tetrazoderivato (II) si decomponga normalmente dando luogo al composto (III).

2° che in un secondo tempo il gruppo diazonico di questo composto, molto probabilmente reagendo sotto forma di diazoidrato normale (IV)⁽¹⁾, agisca ossidando e scindendo il doppio legame fra il carbonio ossidrilato e quello che porta il legame fra i due nuclei naftalinici.

Si forma cioè probabilmente da una parte un gruppo carbossilico portato da una catena cinnamica, dall'altra un anello pirazolico, ed avrebbe così origine un acido monocarbossilico $C_{20}H_{14}O_2N_2$ la cui composizione può essere sia la (V), sia l'altra tautomera (VI).

L'acido da noi ottenuto corrisponderebbe cioè all'acido [4,5-(nafto-1',2')-pirazol (3)] orto-cinnamico.



(1) A. ANGELI, « Gazz. Chim. Ital. », 60, 374 (1930).

L'azione ossidante del gruppo diazonico qui constatata è paragonabile a quella del permanganato potassico sul β -naftolo che dà luogo all'acido orto-carbossilcinnamico ⁽¹⁾.

La costituzione attribuita al nostro acido è inoltre avvalorata dai seguenti risultati sperimentali dai quali si rileva l'analogia del suo comportamento con l'acido cinnamico ordinario ⁽²⁾:

1° l'acido in questione riscaldato a fusione, o meglio sublimato nel vuoto ad alta temperatura, perde facilmente anidride carbonica formando un composto a carattere neutro fondente a 154° la cui composizione corrisponde alla formula bruta $C_{10}H_{14}N_2$. La sua costituzione, analoga allo stirolo, dovrebbe essere la (VII);

2° esso è instabile al permanganato. Ossidando le sue soluzioni alcaline con questo ossidante si ottengono diversi composti:

a) una aldeide $C_{18}H_{12}ON_2$ (p. f. 230° ; p-nitrofenilidrazzone $C_{24}H_{17}O_2N_5$, p. f. 258°) la cui costituzione dovrebbe essere la (VIII);

b) un acido che non siamo ancora riusciti ad isolare allo stato puro, ma molto probabilmente analogo all'acido benzoico o all'acido fenilglicerico e che dovrebbe quindi avere la costituzione (IX) o (X);

c) un acido fondente intorno a 287° del quale proseguiamo lo studio.

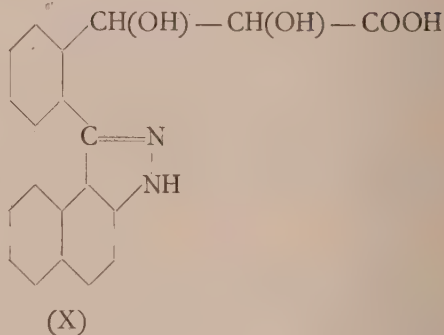
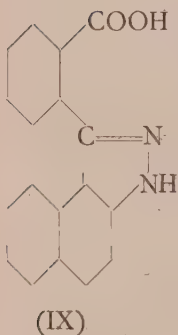
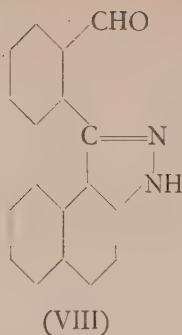
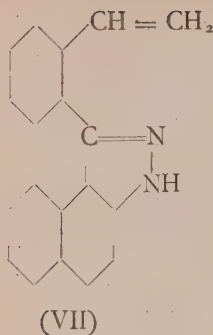
3° Bromurando gli esteri metilico ed etilico dell'acido in questione ed il suo prodotto di sublimazione con una molecola di bromo si ottengono dei bromoderivati di scarsa stabilità e difficilmente purificabili.

Crystallizzandoli da alcool perdono bromo e ridanno i composti di partenza. Il tenore in bromo dei prodotti grezzi di bromurazione è però vicino al valore che compete ai dibromoderivati di addizione.

Questa instabilità dei dibromoderivati non trova riscontro in un analogo comportamento del dibromostirolo e dei dibromuri degli esteri metilico ed etilico dell'acido cinnamico. Stiamo indagando con maggiore dettaglio la costituzione di questi dibromoderivati.

(1) EHRLICH e BENEDIKT, «Monatsh.», 9, 527 (1888); 10, 115 (1889).

(2) HOWARD, «Journ. Chem. Soc.», 13, 136 (1861); ERLÉNMEYER, «Ann.», 372, 249 (1910); FITTIG e RUER, «Ann.», 268, 27 (1892).



La presenza del doppio legame nell'acido da noi ottenuto e nei suoi derivati rimane perciò per ora provata dalla sua instabilità alla prova del Baeyer.

L'azione ossidante esplicita dal gruppo diazonico nello schema di reazioni dato precedentemente è la stessa di quella esercitata dai sali di diazonio sui fenoli, sui loro eteri e sulle ammine aromatiche a catena propenilica (anetolo, isosafolo, apiolo, isoeugenolo, o- e p-anolo, p-propenildimetilanilina) studiata recentemente ⁽¹⁾.

Anche nel nostro caso si tratta della scissione di un doppio legame fra due carboni facilitata dalla presenza dell'ossidrile attaccato ad uno di essi; il fenomeno di ossidazione e riduzione (formazione dell'aldeide e dell'idrazone) ha luogo nell'interno stesso della molecola formando un gruppo carbossilico ed un anello pirazolico (idrazone ciclico).

Continuiamo le ricerche sull'argomento per la definitiva conferma della costituzione dell'acido in questione.

(1) QUILICO e FRERI, «Gazz. Chim. Ital.», 58, 380 (1928); 59, 600 (1929); 60, 606 (1930); QUILICO e FLEISCHNER, 59, 39 (1929).

PARTE SPERIMENTALE.

2,2'-dibromo, 1,1'-dinaftile.

Si ottiene diazotando la 2,2'-diammina 1,1'-dinaftile in soluzione solforica e decomponendo la soluzione del diazo nel modo solito con acido bromidrico e bromuro rameoso. Il prodotto greggio si sublima nel vuoto a 220°-270°. Il sublimato cristallizza dall'alcool in aghetti lievemente colorati in giallo fondenti a 180°-181°.

La determinazione del bromo ha fornito:

	trovato %	39.01
per $C_{20}H_{12}Br_2$	calcolato %	38.80

Acido [4,5-(nafto-1',2')-pirazol (3)] orto-cinnamico.

Si diazota la 2,2'-diammina 1,1'-dinaftile in soluzione cloridrica o solforica e si decompone il tetrazo riscaldandolo a bagno maria agitando. Dal prodotto di reazione si isola l'acido estraendolo a caldo con carbonato sodico diluito ed acidificando la soluzione del sale sodico.

Si purifica lavandolo prima con clorobenzolo e cristallizzandolo successivamente da piridina; si ottengono dei finissimi aghetti bianchi fondenti a 269°.5 (non corr.).

All'analisi ha fornito:

	trovato %	C 76.50	H 4.61	N 9.01
per $C_{20}H_{14}O_2N_2$	calcolato %	76.40	4.49	8.92

Estere metilico. — Si ottiene facendo agire lo ioduro metilico sul sale di argento dell'acido o trattando il suo sale sodico con solfato dimetilico in lieve eccesso a caldo.

Cristallizza dall'alcool in piccoli cristalli bianchi aghiformi fondenti a 158°.

All'analisi ha fornito:

	trovato %	C 76.69	H 4.77	N 8.67
per $C_{21}H_{16}O_2N_2$	calcolato %	76.80	4.91	8.54

Estere etilico. — Si ottiene in modo analogo al metilico. Cristallizza dall'alcool in finissimi aghi bianchi fondenti a 143°-143°5.

All'analisi ha dato:

	trovato %	C 77.04	H 5.44	N 8.31
per $C_{22}H_{18}O_2N_2$	calcolato %	77.16	5.30	8.19

Il suo dibromoderivato si ottiene bromurandolo in soluzione cloroformica con una molecola di bromo. Cristallizzando il prodotto grezzo (p. f.

intorno a 205°) dall'alcool si ottengono dei cristalli aghiformi lievemente gialli fondenti a 135°-137°.

All'analisi ha fornito:

	trovato	% C	74.06	H	5.07	N	7.81	Br.	3.95
per $C_{22}H_{18}O_2N_2Br_2$	calcolato	%	52.59		3.61		5.58		31.84
per $C_{22}H_{18}O_2N_2$	calcolato	%	77.16		5.30		8.19		—

[4,5-(*nafto-1',2'*)-pirazol (3)] *orto-stirol*o.

Si ottiene sublimando l'acido precedente nel vuoto intorno a 280°. Dal sublimato si elimina la piccola quantità di acido che è sublimato inalterato estraendolo a caldo con carbonato sodico diluito.

Mediante cristallizzazione prima dal benzolo, poi dall'alcool si ottiene il composto puro in fini aghetti fondenti a 154°.

All'analisi ha dato:

	trovato	% C	84.55	H	5.27	N	10.45
per $C_{19}H_{14}N_2$	calcolato	%	84.41		5.22		10.37

Il suo bromoderivato si ottiene in modo analogo a quello dell'etere etilico. Quando si opera con il composto puro si ottengono dei cristalli aghiformi aranciati fondenti intorno a 255°-258°.

La determinazione del bromo in questo composto greggio ha dato:

	trovato	%	34.10
per $C_{19}H_{14}N_2Br_2$	calcolato	%	37.17

Cristallizzandolo ripetutamente dall'alcool si ottengono dei cristalli a forma di romboedri lievemente gialli fondenti a 148°.

All'analisi hanno dato:

	trovato	% C	82.88	H	5.09	N	10.07	Br.	2.56
per $C_{19}H_{14}N_2Br_2$	calcolato	%	53.03		3.28		6.52		37.17
per $C_{19}H_{14}N_2$	calcolato	%	84.41		5.22		10.37		—

[4,5-(*nafto-1',2'*)-pirazol (3)] *orto-benzaldeide*:

L'acido precedente (1 mol.) in soluzione alcalina diluita si ossida a temperatura ordinaria con permanganato potassico (3.33 mol.). Si filtra il biossido di manganese e si concentra il filtrato a piccolo volume. Il precipitato bianco fioccoso che si è separato durante la concentrazione cristallizza dal clorobenzolo in cristalli bianchi fondenti a 230°.

All'analisi si è avuto:

	trovato	% C	79.31	H	4.54	N	10.14
per $C_{18}H_{12}ON_2$	calcolato	%	79.38		4.45		10.30

p-nitrofenilidrazone. — Si ottiene trattando all'ebollizione l'aldeide precedente in sospensione alcoolica con *p*-nitrofenilidrazina. L'idrazone che si separa per raffreddamento viene purificato cristallizzandolo dall'alcool. Si ottengono degli aghi rossi fondenti a 258°.

All'analisi ha fornito:

	trovato	% C	70.57	H	4.30	N	17.09
per $C_{24}H_{17}O_2N_5$	calcolato	%	70.73		4.21		17.20

Il liquido alcalino dal quale si è separata l'aldeide precedente contiene, sotto forma di sali, una piccola parte dell'acido di partenza, un acido che cristallizza dall'alcool metilico in aghi bianchi finissimi fondenti intorno a 287° ed un terzo che non siamo ancora riusciti a purificare.

Chimica. — *Spettrochimica delle soluzioni di acido borico in glicerina*⁽¹⁾. Nota di MORELLO MORELLI, presentata⁽²⁾ dal Socio R. NASINI.

L'acido borico non è stato sin qui studiato dal punto di vista rifrattometrico che in soluzione nell'acqua, nel quale solvente è del resto poco solubile a temperatura ordinaria. Sulle soluzioni acquose dal punto di vista rifrattometrico fu pubblicato recentemente un esteso lavoro del dott. G. Banchi e della dott. Eda Cardinali⁽³⁾. A me parve di un certo interesse di iniziare lo studio rifrattometrico dell'acido borico in soluzioni non acquose e nemmeno alcooliche, riferendomi con questa parola agli alcool monoossidritici inferiori: per questi in cui l'acido borico è molto solubile, si conosce il potere rifrangente dei rispettivi eteri. Scelsi come solvente la glicerina in cui l'acido borico è abbastanza solubile. Lo studio offriva anche un certo interesse perchè l'acido borico contrae colla glicerina combinazioni, non isolate sin qui, per quanto io sappia, ma evidenti per le proprietà che l'acido stesso assume nella glicerina e che si manifestano principalmente nella conducibilità elettrica, nell'aumento dell'acidità e via dicendo.

Le determinazioni degli indici di rifrazione furono eseguite col metodo delle minime deviazioni prismatiche. Adoperai uno spettrometro messo a mia disposizione dal prof. R. Nasini: è un ottimo strumento costruito dalla Casa Hildebrand di Freiberg che permette la misurazione diretta dei 10'' e l'apprezzamento dei 5''. Gli indici furono determinati rispetto alle righe α , β , γ dello spettro dell'idrogeno e alla riga D del sodio alla temperatura di 20°. A questa temperatura si riferiscono anche i pesi specifici

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 1 dicembre 1929.

(3) G. BANCHI ed E. CARDINALI. *Densità e potere rifrangente delle soluzioni acquose di acido borico*. «Atti del R. Istituto Veneto». T. LXXXIX, parte 2ª, 1089. Anno 1930.

del solvente e della soluzione calcolati colle note formule, e con riduzione delle pesate al vuoto, rispetto all'acqua a 4°. I poteri rifrangenti specifici e molecolari si esprimono tanto rispetto alla formula $\frac{n-1}{d}$, che a quella

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d}$$

I poteri rifrangenti specifici e molecolari dell'acido borico furono calcolati, secondo il solito, dalle soluzioni, basandosi sulla regola dei miscugli.

L'acido borico si scioglie in glicerina sino a circa il 25 % alla temperatura di 25°. Io studiai soluzioni dall'1 al 20 % di acido borico.

La glicerina adoperata conteneva circa il 10 % di acqua, ma ritengo che questo contenuto in acqua non possa avere influenza notevole sui risultati finali.

Densità e indici di rifrazione della glicerina usata a 20°.

Densità	α	D	β	γ
1.23721	1.45821	1.46067	1.46608	1.47034

Potere rifrangente specifico secondo la formula $\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d}$.

α	D	β	γ	Dispersione = $\alpha - \gamma$
0.2206	0.2216	0.2239	0.2256	0.0050

Potere rifrangente specifico secondo la formula $\frac{n-1}{d}$.

α	D	β	γ	Dispersione $\alpha - \gamma$
0.3703	0.3723	0.3767	0.3801	0.0098

Nelle tabelle seguenti sono raccolti tutti i risultati delle mie esperienze e dei miei calcoli.

Densità e indice di rifrazione delle soluzioni boriche a 20°.

% H_3BO_3	Densità	α	D	β	γ
1	1.23798	1.45765	1.46011	1.46550	1.46979
2	1.23800	1.45678	1.45922	1.46460	1.46893
4	1.23949	1.45556	1.45796	1.46338	1.46772
8	1.24180	1.45276	1.45515	1.46051	1.46502
12	1.24501	1.45003	1.45239	1.45759	1.46241
16	1.25059	1.44809	1.45041	1.45541	1.46042
20	1.25173	1.44442	1.44671	1.45155	1.45631

Potere rifrangente specifico delle soluzioni $\left(\frac{n-1}{d}\right)$.

% H ₃ BO ₃	α	D	β	γ	Dispersione $\alpha - \gamma$
1	0.3697	0.3716	0.3760	0.3795	0.0098
2	0.3690	0.3709	0.3753	0.3788	0.0098
4	0.3675	0.3695	0.3738	0.3773	0.0098
8	0.3646	0.3665	0.3708	0.3745	0.0099
12	0.3615	0.3633	0.3675	0.3714	0.0099
16	0.3583	0.3602	0.3641	0.3682	0.0099
20	0.3550	0.3569	0.3607	0.3645	0.0095

Potere rifrangente specifico delle soluzioni $\left(\frac{n^2-1}{(n^2+2)d}\right)$.

% H ₃ BO ₃	α	D	β	γ	Dispersione $\alpha - \gamma$
1	0.2203	0.2213	0.2235	0.2253	0.0050
2	0.2199	0.2209	0.2231	0.2249	0.0050
4	0.2191	0.2201	0.2224	0.2242	0.0051
8	0.2175	0.2185	0.2208	0.2226	0.0051
12	0.2158	0.2168	0.2190	0.2210	0.0052
16	0.2136	0.2151	0.2171	0.2192	0.0056
20	0.2124	0.2138	0.2153	0.2173	0.0049

(Potere rifrangente specifico dell'acido borico $\frac{n-1}{d}$.)

% H_3BO_3	α	D	β	γ	Dispersione $\alpha - \gamma$
1	0.3021	0.3039	0.3066	0.3126	0.0105
2	0.3010	0.3021	0.3049	0.3115	0.0105
4	0.2999	0.3005	0.3041	0.3099	0.0100
8	0.2984	0.2996	0.3033	0.3091	0.0107
12	0.2963	0.2975	0.3002	0.3073	0.0110
16	0.2950	0.2965	0.3082	0.3052	0.0102
20	0.2538	0.2910	0.2968	0.3021	0.0083

Potere rifrangente specifico dell'acido borico $\left(\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2) d} \right)$

% H_3BO_3	α	D	β	γ	Dispersione $\alpha - \gamma$
1	0.1860	0.1852	0.1880	0.1899	0.0039
2	0.1832	0.1845	0.1861	0.1893	0.0061
4	0.1829	0.1832	0.1856	0.1883	0.0054
8	0.1822	0.1828	0.1848	0.1879	0.0057
12	0.1810	0.1815	0.1837	0.1867	0.0057
16	0.1767	0.1800	0.1815	0.1852	0.0085
20	0.1764	0.1795	0.1811	0.1838	0.0074

Potere rifrangente molecolare dell'acido bórico $\left(\frac{n-1}{d}\right)$.

% H ₃ BO ₃	α	D	β	γ
1	18.73	18.84	19.01	19.38
2	18.66	18.73	18.91	19.31
4	18.59	18.63	18.85	19.22
8	18.50	18.58	18.80	19.16
12	18.37	18.44	18.61	19.05
16	18.29	18.38	18.49	18.92
20	18.21	18.29	18.40	18.73

Potere rifrangente molecolare dell'acido bórico $\left(\frac{n^2+1}{(n^2+2)d}\right)$.

% H ₃ BO ₃	α	D	β	γ
1	11.53	11.48	11.65	11.78
2	11.36	11.44	11.54	11.74
4	11.34	11.36	11.51	11.67
8	11.30	11.34	11.45	11.65
12	11.22	11.25	11.35	11.57
16	10.96	11.16	11.26	11.48
20	10.92	11.13	11.23	11.40

I risultati più importanti delle mie ricerche refrattometriche mi sembrano essere i seguenti:

1° che il potere rifrangente molecolare e specifico dell'acido bórico in soluzione nella glicerina va diminuendo col crescere della concentrazione delle soluzioni.

Le variazioni sono più accentuate per la formula in n , ma sono evidenti anche per la formula in n^2 .

2° che il potere rifrangente molecolare dell'acido borico è maggiore nelle soluzioni gliceriniche che in quelle acquose, per le quali Banchi e Cardinali trovarono in media per la riga α 16.74 (formula in n) e 10.09 (formula in n^2).

Ho voluto anche stabilire se sciogliendosi l'acido borico nella glicerina si ha contrazione o dilatazione di volume. Per il peso specifico e il volume specifico dell'acido borico mi sono servito dei dati del Ditte che determinò il peso specifico dell'acido borico solido col metodo di Stolba adoperando come liquido l'essenza di trementina alle temperature di 0°, 12°, 14°, 60°, 80°⁽¹⁾; per interpolazione ho calcolato il peso specifico e il volume specifico a 20°. Per le varie soluzioni si hanno i seguenti risultati:

Vol. sp. glicerina 0.8083 a 20°
 » » ac. borico 0.6671 » »

Concentrazione in acido borico %	Volume per 100 gr. di soluzione		Differenza (Dilatazione)
	Trovato	Calcolato	
1	80.777	80.689	0.088
2	80.775	80.548	0.227
4	80.678	80.265	0.413
8	80.528	79.700	0.828
12	80.302	79.136	1.166
16	79.962	78.570	1.392
20	79.889	78.006	1.883

Si ha quindi una dilatazione nell'atto della soluzione, dilatazione che va crescendo notevolmente col crescere della concentrazione; invece per l'acqua, secondo le esperienze di Banchi e Cardinali, si ha una contrazione. In una prossima Nota verrà discussa l'interpretazione che può darsi a questi cambiamenti di volume.

(1) DITTE. « C. R. » 85, 1069 (1877).

Mineralogia. — *Pisoliti poliedrici di magnesite e di dolomite* ⁽¹⁾.

Nota di F. RODOLICO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. P. ALOISI.

Il Lacroix ⁽³⁾, e più tardi, indipendentemente da lui, lo Schrock ⁽⁴⁾ hanno osservato che in particolari condizioni i pisoliti di carbonato di calcio possono assumere forma esterna poliedrica: il Lacroix ha notato questo fenomeno nei depositi delle sorgenti termali di Hamman-Meskoutine nell'Algeria e di Mahatsinjo nel Madagascar; lo Schrock ha raccolto un ciottolo costituito da « *pisoliti poliedrici* » nei pressi di Logansport nell'Indiana.

Data la rarità del fenomeno e dato il fatto che esso è stato osservato solo per il carbonato di calcio, descrivo in questa Nota alcuni campioni di magnesite e di dolomite, nei quali esso nettamente si manifesta. I campioni sono stati raccolti dall'Ing. Adolfo Ciampi a Castiglioncello (Livorno) e a Monterufoli (Pisa), e da lui gentilmente posti a mia disposizione. L'aspetto dei pezzi provenienti dalle due località è del tutto simile, se si prescinde dalla grandezza dei pisoliti che misurano due o tre millimetri nei campioni di Castiglioncello, e che generalmente superano il mezzo centimetro in quelli di Monterufoli; si tratta nei due casi di un vero e proprio agglomerato formato da elementi che possiedono struttura interna pisolitica e forma esterna poliedrica. I pisoliti non sono collegati da cemento, e si possono facilmente isolare mediante una leggera percussione.

L'analisi chimica dei pisoliti di Castiglioncello, che sono stati raccolti nei noti giacimenti di magnesite, è la seguente:

MgO	45,89
CaO	0,23
FeO	2,28
MnO	tracce
Fe ₂ O ₃	»
CO ₂	51,40
	<hr/>
	99,80
peso specifico = 3,016	

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(3) A. LACROIX, *Sur la ctypélite etc.* «C. R. Acad. Sci. Paris», CXXVI, 601 (1898); ID., *Minéralogie de la France*, Paris, 1901, vol. III, p. 733; ID., *Minéralogie de Madagascar*, Paris, 1922, vol. I, p. 288.

(4) R. R. SCHROCK, *Polyhedral pisolites*, «Am. Jour. Sc.», XIX, 368 (1930).

Per i pisoliti di Monterufoli si ottengono invece questi risultati:

MgO	21,58
CaO	27,60
FeO	3,55
MnO	0,25
Fe ₂ O ₃	tracce
CO ₂	47,32
	<hr/>
	100,30
peso specifico = 2,995	

Per le due analisi ho scelto del materiale freschissimo nel quale erano presenti solo tracce di ossido ferrico; in generale i pisoliti sono alquanto alterati ed allora la quantità di ossido ferrico è maggiore.

Dall'analisi chimica si deduce che i pisoliti di Castiglioncello sono certamente di magnesite; ma, per quanto riguarda quelli di Monterufoli, non si può decidere, anche per la loro struttura a zone concentriche, se si tratti di dolomite, oppure di calcite e magnesite in quantità pressochè equivalenti. Per decidere la cosa mi sono valso di una reazione cromatica differenziale recentemente proposta da Feigl e Leitmeier ⁽¹⁾. La reazione, che mi ha dato ottimi risultati anche in alcune prove eseguite per controllo, è basata sul fatto che facendo bollire un frammento di magnesite col sale sodico della di-fenilcarbazide il minerale si colora in rosso mentre nelle stesse condizioni la dolomite rimane incolora. Applicando questo metodo ai pisoliti di Monterufoli opportunamente sezionati e levigati ho potuto constatare che essi sono di dolomite.

Nonostante la diversità del minerale che li costituisce questi pisoliti poliedrici di dolomite e di magnesite presentano una grande analogia con quelli di carbonato di calcio; credo pertanto cosa opportuna confrontare nella descrizione i miei risultati con quelli ottenuti dal Lacroix e dallo Schrock.

Riguardo alla forma esterna poliedrica i pisoliti di Castiglioncello e di Monterufoli raramente presentano quella di un pentagonododecaedro; pur tuttavia essi si avvicinano sempre a tale forma anche se per l'aspetto o per l'assenza di qualche faccia non possono generalmente essere considerati come pentagonododecaedrici. Questo tipo pentagonododecaedrico non era stato ancora notato nei pisoliti poliedrici, e mi sembra che ad esso si avvicinino

(1) F. FEIGL e H. LEITMEIER, *Eine Reaktion zur Unterscheidung von Dolomit und Magnesit*, «Centralblatt f. Mineralogie etc. - Abt. A», 74 (1928).

anche i pisoliti che già erano stati descritti. Infatti nei pisoliti studiati dallo Schrock sono presenti normalmente dodici facce, ed egli ha osservato inoltre che il sessantacinque per cento delle loro sezioni hanno contorno esagonale. Per i pisoliti dell'Algeria e del Madagascar nulla posso dire di preciso giacchè il Lacroix non dà nessun ragguaglio sulla loro forma geometrica, ma le illustrazioni contenute nei suoi lavori ⁽¹⁾ non escludono la possibilità che anche quei pisoliti presentino lo stesso tipo di forma poliedrica. Nei pisoliti di Castiglioncello e di Monterufoli le facce sono generalmente piane, ma ve ne sono di curve, sia concave che convesse; tale particolarità delle facce era stata notata anche dallo Schrock.

Al microscopio nelle sezioni sottili i pisoliti di magnesite e quelli di dolomite presentano nello stesso tempo struttura raggiata e zonato-concentrica. Prevale il primo tipo di struttura nei pisoliti di dolomite, che appaiono formati più o meno regolarmente da una serie di cristallotti allungati; i quali partendo dal centro e con disposizione radiale, raggiungono la superficie esterna. Nelle sezioni di questi pisoliti la struttura zonato-concentrica s'intravede per la presenza di anelli concentrici diversamente colorati da pigmenti opachi.

A questo tipo mi sembra si avvicinino i pisoliti poliedrici descritti dallo Schrock per quanto egli non ritenga presente in questi una vera struttura zonata, nonostante l'esistenza di zone concentriche più o meno ricche di ossido di ferro.

Nei pisoliti di magnesite prevale la struttura zonato-concentrica, e vi si nota che il minerale non presenta gli stessi caratteri nelle diverse zone. In alcuni pisoliti ho potuto distinguere nettamente due regioni: l'una interna formata da una serie di zone sferiche concentriche nelle quali il minerale si trova allo stato cripto o microcristallino, l'altra esterna costituita da una serie di piccoli cristalli impiantati normalmente alla superficie sferica esterna della regione precedente. Esaminando le microfotografie ⁽²⁾ dei pisoliti del Madagascar descritti dal Lacroix, ho notato in essi una grande analogia con questo tipo di struttura: secondo il Lacroix il carbonato di calcio che costituisce le due regioni non apparterrebbe alla stessa fase. In altri pisoliti di magnesite ho potuto chiaramente distinguere tre regioni delle quali l'interna e l'esterna sono nettamente cristalline, quest'ultima con struttura raggiata, mentre l'intermedia è costituita da una serie di zone concentriche criptocristalline.

Qualche spazio rimasto vuoto tra un pisolite e l'altro è riempito talvolta nei campioni di magnesite da calcedonio ed al centro dei pisoliti, sia di magnesite che di dolomite, raramente si osserva un granellino di quarzo

(1) A. LACROIX, *Minéralogie de la France*, cit., vol. III, p. 733, fig. 7; Id., *Minéralogie du Madagascar*, cit., vol. I, tav. II, fig. 6.

(2) A. LACROIX, *Minéralogie de Madagascar*, cit., vol. II, tav. 22.

e la seconda, quale terrigena, secondo il quale è avvenuta la formazione del pisolita.

Sull'argomento dell'origine della forma poliedrica, Lacroix, dopo avere tenuto conto del pisolite in un studio importante — « Les particularités bien connues des « les grains à l'union déformés par contact mutuel », così scrive: « Les déformations des cristaux qui partent de sont véritablement compressions linéaires, due le module, au moment de sa formation, d'un pastique et particulièrement celle de — », senza ricorrere a una supposizione di Schrock secondo la quale una pressione che si esercita secondo assenti forma poliedrica per l'interferenza reciproca esercitata durante il loro accrescimento, ma « une pression — qui s'applique — e per lo stesso assi preordinata ».

Fortemente non si può escludere che nella « ingenuità » del fenomeno siano intervenute anche le cause fisico-chimiche, ma mi sembra che l'ipotesi della Schrock sia sufficiente a spiegare tutte le caratteristiche morfologiche del pisolite poliedrico della Toscana. Infatti se un certo numero di pisoliti, iniziati al fondo del bacino del piano ed erosi fermati, costruissero un sistema di linee tutte della stessa dimensione e disposti nel modo il più denso, continuando uniformemente nel loro accrescimento, dovrebbero necessariamente assumere la forma di pentapentadecedro, regolare. Non verifichiamo, nel cammino di sviluppo alcuni di essere disposti irregolarmente in tutte tutte stesse dimensioni, in un modo a spiega non solo la forma ma e meno ancora la più la pentapentadecedro, ma anche la possibile formazione di facce compresse per lo sviluppo sferico parziale di un cristallo e il loro orientamento e direzione di crescita tra pisoliti di grandezza diversa.

1. A. LACROIX, *Minéralogie in Madagascar*, cit., vol. I, p. 288.

2. R. H. SCHROCK, op. cit., p. 372.

Biologia. — *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte* $\lambda = 2-3$ m. sui bachi da seta. — Parte III. — *Irraggiamento del seme bachi prima della schiusura.* Nota ⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

Irraggiamento del seme bachi prima della schiusura e nessun trattamento ai bachi dopo la nascita.

La stagione già troppo accaldata non ci permise di fare un irraggiamento sistematico del seme bachi, prima della incubazione ne di prolungare il trattamento durante la stessa: potemmo solo irraggiarlo durante due giorni perchè avvenne la schiusura: ciononostante questo brevissimo trattamento permise di ottenere un anticipo di schiusura del seme di due giorni.

Non si possono portare dati sullo sviluppo dei bachi nati da semi irradiati perchè l'irradiazione fu troppo breve, si ripeterà la prova l'anno prossimo.

Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte, sullo sviluppo dei bachi nati da seme irraggiato e continuati ad irraggiare durante il loro ulteriore sviluppo.

Il seme bachi fu irradiato solo per due giorni prima della schiusura, i bachi del seme della prova di confronto incominciarono a nascere due giorni dopo.

I piccoli bachi nati da seme irradiato vennero irradiati continuamente per un periodo di 30 minuti giornalieri, intensità ridotta a metà, fino all'epoca della prima muta, poi l'irradiazione venne continuata per 30 minuti giornalieri, con intensità doppia fino ad arrivare nell'ultimo periodo ad irradiazioni di 60 minuti giornalieri.

Anche in questo caso si nota come per le precedenti esperienze una influenza favorevole delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m. su tutto lo sviluppo, l'azione favorevole è esaltata al massimo.

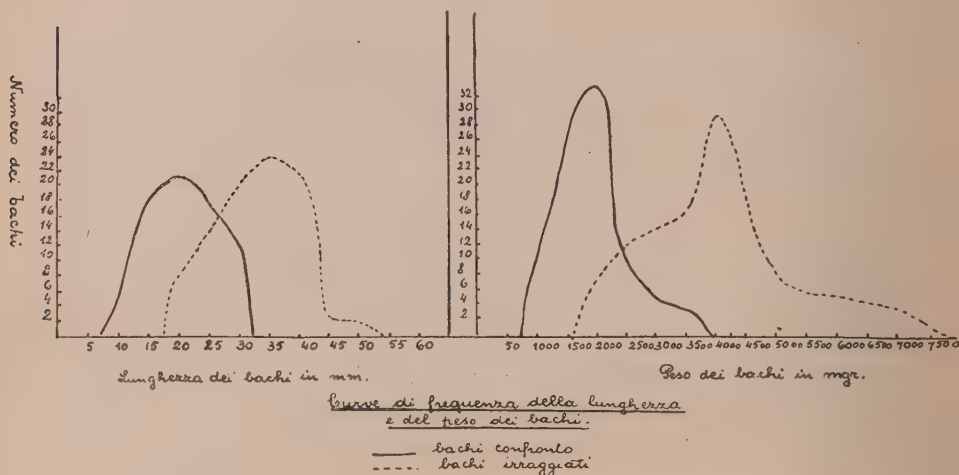
Per porre in evidenza con dati questa differenza riportiamo il peso medio e la lunghezza media dei bachi appartenenti alle due prove.

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1930.

Dopo 23 giorni dalla nascita.

	Bachi prova di confronto	Bachi irraggiati
Lunghezza media dei bachi	21.40 mm.	36.63 mm.
Peso medio dei bachi	170 mgr.	408 mgr.

Percentuale in più nella lunghezza dei bachi irraggiati: 70.25 %
 » » » nel peso dei bachi irraggiati: 140 %



Dopo 32 giorni dalla nascita.

	Bachi prova di confronto	Bachi irraggiati
Lunghezza media dei bachi	54.50 mm.	77.39 mm.
Peso medio dei bachi	254 mgr.	533.40 mgr.

Percentuale in più nella lunghezza dei bachi irraggiati: 42 %
 » » » nel peso dei bachi irraggiati: 110 %

Imboscatura. — Al 31° giorno i bachi irraggiati incominciano la salita al bosco e la tessitura del bozzolo, quelli di confronto da 7 a 8 1/2 giorni

dopo. Anche in questo caso fu sospeso l'irraggiamento appena i bachi iniziano la salita al bosco, per riprendere poi l'irraggiamento sui bozzoli raccolti.

Bozzoli. — Format i bozzoli essi vennero raccolti e pesati, per entrambe le prove dopo uguale tempo dall'inizio, affinché non si avessero delle perdite in peso, dovute alla perdita di umidità dei bozzoli.

Peso di 100 bozzoli provenienti da bachi irraggiati gr. 197.70

Peso medio dei » » » » » » 1.977

Peso di 100 bozzoli provenienti da bachi confronto gr. 160.40

Peso medio dei » » » » » » 1.6040

Percentuale in più nel peso dei bozzoli dei bachi irraggiati: 23.25 %

Abbiamo calcolato poi il rapporto medio fra il peso dell'involucro del bozzolo e il peso del bozzolo completo.

Nascita delle farfalle. — I bozzoli provenienti da bachi irraggiati vennero ancora irraggiati nelle medesime condizioni citate per i bachi, per 30 minuti giornalieri. La nascita delle farfalle da questi bozzoli ha luogo circa 8 giorni prima di quello di confronto.

CONCLUSIONI E RIASSUNTO.

Abbiamo studiato l'azione che le onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. esercitano sui bachi da seta provenienti da seme irraggiato prima della schiusura e continuati ad irraggiare dal momento della loro nascita fino all'inizio della tessitura del bozzolo.

L'irraggiamento del seme potè venir fatto solo per due giorni prima della schiusura, ma siamo convinti che un irraggiamento del seme per un periodo di tempo maggiore possa apportare ancora risultati più elevati (ci riserviamo di fare in proposito una serie di ricerche sistematiche nel prossimo anno).

1) Anche in queste esperienze abbiamo avuto occasione di osservare che l'irraggiamento va fatto con intensità blanda, sia del seme bachi che dei piccoli bachi, fino alla prima muta.

2) L'azione favorevole esercitata dalle onde elettromagnetiche $\lambda = 2-3$ m. sullo sviluppo dei bachi è più evidente quando si inizi l'irraggiamento sul seme prima della schiusura.

3) Questa più efficace azione si manifesta con una maggior differenza nel peso e nella lunghezza dei bachi durante il loro sviluppo, al 23° giorno si nota una percentuale in più nella lunghezza dei bachi irrag-

giati di 70.25 %, e nel peso di 140 %. Al 32° giorno, si nota una percentuale in più nella lunghezza dei bachi irraggiati di 42 % e nel peso di 110 %.

4) I bachi irraggiati iniziano la tessitura del bozzolo da 7 o 8 giorni prima dei bachi di confronto.

5) I bozzoli di questi bachi, continuati ad irradiare danno farfalle che nascono da 7 a 8 giorni prima.

6) Il peso dei bozzoli provenienti dai bachi irraggiati è di 23.25 % superiore di quello dei bachi di confronto.

7) Il peso degli involucri dei bozzoli provenienti dai bachi irraggiati è di 5.7 % superiore di quello dei bozzoli di confronto.

8) Il rapporto peso involucro-peso bozzolo totale è maggiore per i bozzoli provenienti dai bachi irraggiati e precisamente di: 3.77 %.

9) Se si sospende l'irraggiamento dei bachi proveniente da semi irraggiati al 15° giorno di vita, si mantiene la differenza acquisita nel primo tempo; ma i bachi irraggiati non accrescono il distacco nel loro ulteriore sviluppo, e la tessitura del bozzolo viene iniziata solo 3 o 4 giorni prima e l'aumento in peso del raccolto dei bozzoli è solo dell'8 %.

Biologia. — *Sulla innervazione ed i dispositivi sensitivi periferici del tronco arterioso dei rettili.* Nota ⁽¹⁾ di M. FEDELE, presentata dal Corrisp. U. PIERANTONI.

Ho potuto in questo campo di ricerche, nel quale le nostre conoscenze sono invero poco soddisfacenti, raccogliere alcuni dati positivi che proiettano luce da una parte sul problema generale della sensibilità vasale e dei dispositivi sensitivi periferici delle arterie, e dall'altra su un complesso di interrogativi riguardanti le vie e la organizzazione della sensibilità cardiaca e i riflessi manifestanti nei grossi tronchi arteriosi alla loro origine cardiaca, conosciuti da tempo e studiati, in alcuni Mammiferi, in rapporto al ben noto ramo centripeto vagale denominato *Depressore*.

Nelle mie ricerche, già fatte note in parte in forma riassuntiva, per quanto riguarda lo studio delle vie centripete inerenti al *Truncus arteriorum* dei Rettili, e nella loro parte essenziale in corso di pubblicazione, ho scelto a soggetto quest'ultimo gruppo di vertebrati, tanto studiato e che tanto si presta alle indagini sui problemi della fisiologia cardiaca, cercando di delinearne in esso, nel modo che più mi è stato possibile completo, i vari lati e problemi della innervazione cardiaca, seguendo gli elementi intervenienti in questa dalle loro origini alle loro distribuzioni, cercando di scernerne e

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1930.

determinare i rapporti e il significato con un esame anatomo-istologico molto approfondito, che ho basato, nei punti dove mi si è rivelato necessario, su indagini sperimentali, servendomi sia del metodo delle degenerazioni, sia dell'esame funzionale raccogliendo i cardiogramma risultanti da opportune stimolazioni.

Ho potuto, fra l'altro, stabilire su dati definitivi⁽¹⁾ come, sia nei Cheloni (*Emys orbicularis*, *Testudo graeca*, *Thalassochelis caretta*) che nei Sauri (*Lacerta muralis*, *L. viridis*), oltre ad un ramo vagale corrispondente morfologicamente e funzionalmente al *Depressore* dei Mammiferi, esiste altresì un secondo ramo vagale rappresentante anche esso una netta e ben isolabile via per le fibre centripete provenienti dal Tronco arterioso, e come questi nervi, da me denominati *Ramus superior* e *Ramus inferior trunci arteriorum*, abbiano come territorio esclusivo di distribuzione il tronco arterioso, e non convogliano per niente fibre centripete provenienti dal ventricolo o dagli atri.

Questo fatto, stabilito da me con chiarezza nei Rettili, getta altresì nuova luce sulla incerta considerazione che si fa del *Depressore* dei Mammiferi come un nervo sensitivo cardiaco o come esclusivo nervo aortico, suggerendo irresistibilmente, le molte rassomiglianze del comportamento del *Depressore* dei Mammiferi e del Ramo superiore del Tronco arterioso dei Rettili, la verosimiglianza di un identico comportamento anche per il territorio di distribuzione; come poi la esistenza di un ramo nervoso del Tronco arterioso nei Rettili a rapporti sviluppati principalmente in relazione con le arterie pulmonari, suggerisce la possibilità di esistenza, e la necessità di indagine in proposito, di possibili vie centripete a decorso isolabile per le arterie pulmonari dei Mammiferi.

Resta infine, pur non risolto per le sue grandi difficoltà, sgombro da un equivoco il problema delle vie della sensibilità propria atriale e ventricolare, che debbono esistere all'infuori della via dei depressori, visto che nel cuore la indagine istologica ci ha rivelato chiari dispositivi sensoriali periferici e la pratica clinica ci dà argomenti per appoggiare la esistenza di una sensibilità propria del cuore.

Le stimolazioni elettriche da me apportate sui nervi del *Truncus*, ramo inferiore e ramo superiore, specialmente in *Emys orbicularis*, *Testudo* e *Thalassochelis*, mettono fuori dubbio la natura afferente di essi. Le stimolazioni apportate sistematicamente e su molti individui, particolarmente della prima specie, sia sui nervi integri che sui loro monconi centrali o periferici, rispettando o no la integrità unilaterale o bilaterale dei vaghi o quella dei rami simpatici, secondo i fenomeni che si volevano verificare, mettono in mostra un insieme di fatti che non è nostra meta di esporre qui, dove basta ripor-

(1) V. « Boll. Soc. Biol. Sper. », vol. 5, 1930.

tare che, nelle specie indicate, tanto il ramo superiore che il ramo inferiore in esame, con i vaghi integri, stimolati elettricamente nella loro integrità o nei loro monconi centrali, producono un netto rallentamento del ritmo cardiaco, mentre la stimolazione del troncone periferico di essi, nelle stesse indicate condizioni, non ha effetto alcuno sul ritmo, come pure non si ha il cennato effetto rallentatore esercitando la stimolazione con i rami truncali integri e i due vaghi tagliati caudalmente alle origini apparenti dei primi.

Questo netto riflesso ha il territorio di ricezione localizzato esclusivamente nelle pareti vasali del *Truncus arteriorum*, nello istesso modo come il territorio ricettore del *Depressore* per i Mammiferi si ritiene, sebbene contrastatamente, esclusivamente localizzato nell'aorta, come lo provano le ricerche di Koster e Tschermack (1902)⁽¹⁾ e come, applicando il criterio comparativo, rendono molto verosimile i fatti che io ho potuto verificare strutturalmente e funzionalmente.

Ho minutamente seguita, con tutte le risorse tecniche, la distribuzione dei due nervi del Tronco arterioso fino al loro esaurirsi; ne ho visto le minime ramificazioni, seguite le fibre mieliniche dopo la perdita del loro involucro e la loro risoluzione nelle più minute formazioni espansionali, come la connessione delle fibre estreme con formazioni della più tipica natura sensoriale; e, dal lato dei limiti di distribuzione esclusivamente vasali (truncali), come dalla natura tipicamente sensoriale delle formazioni espansionali nelle quali si risolvono *tutti* gli elementi dei due nervi in esame, la indagine istologica da me condotta pazientemente e integralmente su tutto il territorio del tronco arterioso e delle parti circonvicine (con preparati in toto, dissezioni, tagli microtomici seriati, ed usando le impregnazioni argentiche ed auriche o la colorazione vitale) non lascia dubbio o lacuna alcuna, se noi richiamiamo e poniamo a confronto l'esame fisiologico condotto per altra via e dinanzi sommariamente riportato.

L'unità anatomica del Tronco arterioso dei Rettili, in cui le avventizie delle radici aortiche e dell'arteria polmonare si saldano indissolubilmente alla base (unità resa ancora anatomicamente e dinamicamente più salda dalla presenza dell'anello bulbare) si rispecchia anche nel comportamento dei nervi sopra accennati, i quali, ben distinti alla origine e nella quasi totalità del percorso nei due lati, dopo il contatto che prendono con l'avventizia dei grossi vasi arteriosi, e via via che si inoltrano nel tronco del Bulbo arterioso verso l'anello bulbare, mentre distribuiscono lungo il percorso rami indipendenti ai vasi componenti del Tronco arterioso, vanno sempre più scambiandosi ramuscoli anastomotici, fino a che le ramificazioni estreme si fondono, nella zona dell'anello bulbare e agli inizi del tronco, in un ter-

(1) A. TSCHERMACK u. G. KOSTER, *Ueber den Nervendepressor als Reflexnerv der Aorta*. «Pflüger's Arch.», Bd. 93, p. 24.

ritorio comune dove è difficile discernere le fibre provenienti dai rami superiori o inferiori, destri o sinistri.

E questo, a parte le differenti varietà specifiche, che tralascio qui di descrivere, avviene in tutte le specie esaminate: nella *Emys* e *Thalassechelis* come in *Testudo*, come in *Lacerta*.

La distribuzione dei dispositivi espansionali periferici non è omogenea nei vasi innervati e nel Tronco arterioso, ma si presenta per la istessa specie con caratteri ben costanti, in modo che, dopo lo studio di alcuni individui, è agevole prevedere nei successivi, che si vanno sottoponendo ad esame sulla base di preparati ben riusciti, una perfetta localizzazione delle aree a ricca innervazione.

Queste zone, localizzate nel tessuto avventiziale, si riscontrano precisamente nelle zone del Tronco arterioso dove più efficace deve essere l'urto esercitato dall'accresciuta pressione sanguigna nel primo tratto dei grossi vasi arteriosi; più sviluppate negli interstizi fra vaso e vaso del Tronco meglio che sulle rimanenti superficie vasali libere, e sviluppatissime nella zona arteriosa posta ai limiti dell'anello bulbare.

In questo limite i nervi del Tronco arterioso dei due lati sono completamente esauriti e non passano le fibre sensitive di essi al ventricolo.

I dispositivi periferici nei quali si distribuiscono tutte le fibre dei rami truncali divenuti anielinici sono di varia conformazione, ma tutti, per la loro localizzazione nell'avventizia delle arterie come per la tipica costruzione, che trova riscontro in altre ben note formazioni sensoriali, sono tipicamente sensitivi.

I tipi che predominano sono due: le *formazioni a gomito*, incapsulate o non, che sono espressioni di una più definita localizzazione degli apparati recettori, e le *espansioni a cespuglio*, espressione di una più ampia estensione del territorio di ricezione, dato che questi apparati espansionali sono formati da una trama minutissima neurofibrillare, disseminata di ispessimenti da puntiformi a larghi lembi di sostanza neurale dai più vari e polimorfi atteggiamenti, che offrono la possibilità di ritrarne motivi di rappresentazione delle più svariate forme di espansioni terminali (ederiforme, a cespuglio, ecc.) ma che ben si possono sinteticamente rappresentare come una vasta rete di fibrille con ispessimenti, a campi più o meno isolabili, che estende le fibrille recettrici in zone più o meno ampie della parete vasale ed in alcuni tratti (come in vicinanza dell'anello bulbare) tutta la parete addirittura abbraccia in modo da dare all'intero tratto dove queste fibrille si infiltrano tutta l'apparenza di un organo sensoriale unico.

Formazioni espansionali di varie peculiari forme (a gomito, a lembi finemente reticolati, a corpuscoli incapsulati) si riscontrano ancora e, particolarmente nelle specie di maggior mole sono più riccamente rappresentate; ma i miei preparati, ottenuti con la colorazione vitale, anche in *Emys orbicularis* mi hanno offerta una gamma varia di espansioni sensoriali nel Tronco

arterioso non meno varia di quella messa in mostra dal Dogiel, dallo Smirnow e dal Michailow per l'endocardio e il pericardio nei Mammiferi.

Considerata la mancanza assoluta di dati di tal genere non solo per il Tronco arterioso dei Rettili ma per i corrispondenti vasi degli altri gruppi di vertebrati, compresa l'aorta dei Mammiferi, è questa una conquista sostanziale, resa ancora più significativa dalla indagine funzionale eseguita e dai rapporti chiaramente da me definiti.

Dunque abbiamo tratti vasali che son provvisti di tanta ricchezza di dispositivi nervosi periferici da dare la immediata impressione che la loro parete in quel punto funziona tutta come un vasto apparato ricettore; e riscontriamo varietà tale di formazioni espansionali da dover ritenere che non una sola qualità di stimoli può ivi trovare ricezione.

Qui è il punto più difficile a definire sperimentalmente: se e quali di queste formazioni possono essere in rapporto a una o ad un'altra possibilità sensitiva o facoltà dolorifica, che, malgrado le controversie, è molto probabilmente posseduta dalle pareti vasali e specialmente da quelle aortiche; certo è che le formazioni studiate mostrano una predominante, se non essenziale disposizione per la ricezione di particolari stimoli meccanici, poichè l'aumentata pressione nei vasi del Tronco arterioso dei Rettili, come nell'Aorta pei Mammiferi (Koster e Tschermack) genera risposte riflesse attraverso i centri vagali e i vaghi sul ritmo cardiaco; sicchè possiamo ritenere che la pressione idrostatica endovasale è stimolo efficace per la parte principale ed essenziale dei dispositivi riscontrati.

Biologia (Embriologia). — *Condizioni determinanti lo sviluppo delle branchie (Ricerche di embriologia sperimentale sui Cefalopodi).*
Nota di S. RANZI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Nelle ricerche, che da tempo vado eseguendo, sulla meccanica dello sviluppo dei Cefalopodi ⁽²⁾ ho rivolto sempre la mia attenzione verso quei casi, nei quali mi è riuscito porre in evidenza l'azione di un organo sullo sviluppo di un altro.

Così in un precedente lavoro ⁽³⁾ misi in evidenza come, negli embrioni mostruosi di *Loligo vulgaris* Lam. ottenuti per azione di agenti inibitori, a volte si osserva che cuore branchiale e branchia di un lato sono ridotti mentre cuore branchiale e branchia dell'altro lato sono normalmente sviluppati e che si può concludere per l'esistenza di una correlazione tra

(1) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(2) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(3) RANZI S., *Suscettibilità differenziale nello sviluppo dei Cefalopodi*, «Pubbl. Stazione Zool. Napoli», vol. 9, 1928.

sviluppo del cuore branchiale e sviluppo della corrispondente branchia. Nelle mie conclusioni non ero potuto però andare oltre e mi ero dovuto contentare di annotare il fatto, ripromettendomi di cercare se dall'ulteriore analisi sperimentale dello sviluppo, che con metodo diverso già allora avevo iniziato, potesse emergere la ragione di questa correlazione e stabilirsi se è il cuore branchiale che regola lo sviluppo della branchia o viceversa.

La nuova serie di esperienze, che avevo intrapreso, consisteva nel tagliare l'embrione in due parti senza sgusciarlo, perchè l'embrione sgusciato muore. Le singole parti dell'embrione isolate continuavano a svilupparsi senza rigenerare la parte asportata.

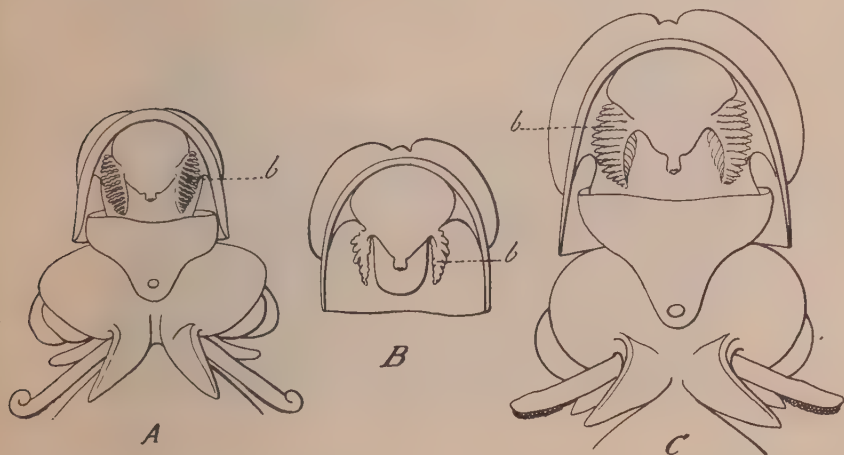


Fig. 1. — B Mantello e sacco viscerale di un embrione di *Sepia officinalis* L., tagliato dalla parte anteriore dell'embrione allo stadio XIII di Naef, e sviluppatosi per 25 giorni separato da questo. A e C controlli: C embrione coetaneo allo stadio XVII di Naef; A altro embrione normale allo stadio XV di Naef. In tutte le figg. la parte ventrale del mantello è stata asportata: b. branchie (per le figg. A e C mi sono parzialmente servito delle corrispondenti figg. di Naef).

Rimandando ad altro luogo per una completa esposizione della tecnica e dei risultati degli esperimenti tratterò qui di una delle operazioni che permettono lumeggiare la questione di cui mi occupo.

Facendo cadere il taglio tra l'imbuto e il mantello di un embrione di *Sepia officinalis* L. allo stadio XII-XV di Naef⁽¹⁾ vediamo che le due parti (mantello e sacco viscerale da un lato, parte anteriore dell'embrione

(1) NAEF A., *Die Cephalopoden III*, «Fauna e Flora del Golfo di Napoli», Mon. 35, 1928.

attaccata al sacco vitellino esterno dall'altro) continuano il loro sviluppo senza rigenerare la parte asportata.

Senza entrare ad illustrare tutti i fenomeni, che avvengono nei due pezzi, ricorderò che nel mantello e sacco viscerale, in rapporto alla scarsezza del vitello in questo pezzo contenuto, il sangue va, col progredire dello sviluppo, sempre più diminuendo e le branchie crescono poco o nulla e restano piccole (fig. 1). Poichè tutti gli altri organi nello stesso tempo progrediscono nello sviluppo e poichè nelle branchie normali sono vaste lacune sanguigne che, in questi embrioni sono, in rapporto alla generale scarsezza del sangue, poco o nulla irrorate, si viene alla conclusione che *il sangue con la sua pressione determina il normale accrescimento della branchia*.

Tenendo presente questa conclusione ovvia resta la spiegazione del

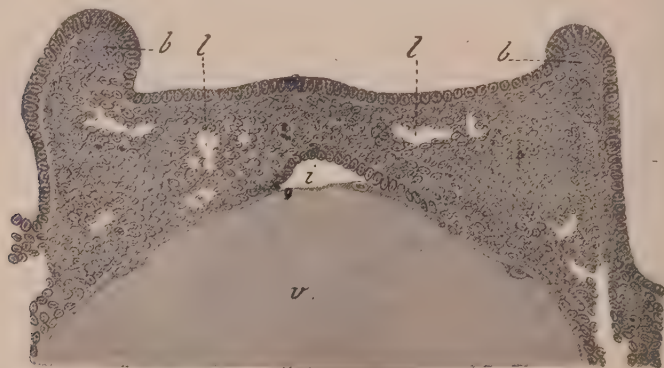


Fig. 2. - Sezione trasversale della regione delle branchie di *Loligo vulgaris* Lam. allo stadio X di Naef: *b*, abbozzi delle branchie; *i*, intestino; *l*, lacune sanguigne; *v*, vitello.

costante reperto di proporzionalità tra sviluppo del cuore branchiale e sviluppo della corrispondente branchia *la riduzione del cuore branchiale determina un deficiente flusso del sangue nella branchia, che non può quindi normalmente svilupparsi*.

Questi reperti riguardano l'accrescimento della branchia, restava ancora insoluta la questione della sua prima formazione e bisognava cercare di vedere se, anche questa prima formazione, è subordinata allo stimolo che viene dal sangue.

Per chiarire questo punto ho eseguito delle ricerche sui primi stadi di sviluppo della branchia. Nell'embrione di *Loligo vulgaris* allo stadio IX di Naef, il primo abbozzo della branchia appare costituito da una leggera sporgenza con il suo corpo fatto da un ammasso di mesenchima compatto, rivestito all'esterno dall'epitelio ectodermico, che riveste il corpo e che è più spesso dell'ectoderma circostante.

In stadi successivi (fig. 2) si vede questa sporgenza crescere come un turbecoletto, con asse di mesenchima compatto, rivestito all'esterno dall'epitelio ectodermico più spesso del circostante tessuto e solo verso lo stadio X-XI di Naef comincia quà e là il mesenchima compatto a presentare qualche lacuna.

Tenendo presente questi fatti — considerando anche che, sotto il turbecoletto primo abbozzo della branchia, allo stadio IX di N., è una lacuna sanguigna, ma che questa è la grande lacuna, che nei primi stadi dello sviluppo è al disopra dell'epitelio vitellino, e che non presenta nella zona delle branchie nessun diverticolo sia pure minimo verso l'esterno — bisogna venire alla conclusione che *il primo abbozzo della branchia si forma e si accresce indipendentemente dalla irrorazione sanguigna di questa.*

Poichè sullo sviluppo delle branchie dei Vertebrati sono stati eseguiti numerosi lavori, credo utile — al fine di porre in risalto le convergenze tra le forze in atto dello sviluppo di due tipi di organizzazione così differenti — comparare i miei reperti coi fatti appurati sullo sviluppo di questi animali.

Il primo a intuire un rapporto tra sviluppo delle branchie e sviluppo dei vasi fu Dohrn ⁽¹⁾; egli descrisse come, negli embrioni di Selaci, gli abbozzi delle anse vascolari sporgono all'esterno rivestiti da ectoderma formando i villi branchiali e mostrò come un simile comportamento sembra indicare che siano i vasi a determinare l'accrescimento delle branchie.

Un simile modo di vedere è seguito da Moroff ⁽²⁾ per Selaci e Teleostei e da Marchetti ⁽³⁾ per *Bufo*; mentre Götte ⁽⁴⁾, Ekman ⁽⁵⁾ e Della Valle ⁽⁶⁾ in Anfibi ammettono che la prima insorgenza del filamento branchiale possa essere indipendente dai vasi, che però Ekman ritiene abbiano una importanza di primo ordine nel regolare l'accrescimento della lamella branchiale.

Harrison ⁽⁷⁾ che sottomise lo sviluppo delle branchie di *Amblystoma* ad una accurata indagine sperimentale vide che l'ectoderma branchiale trapiantato eterotopicamente forma gemme epiteliali, onde si può pensare abbia in se la potenza di accrescersi e formare il primo abbozzo delle branchie mentre

(1) DOHRN A., *Studien zur Urgeschichte des Wirbelthierkörpers*, IV, « Mitt. a. d. Zool. Stat. Neapel », Bd. 5, 1884.

(2) MOROFF T., *Ueber die Entwicklung der Kiemen bei Fischen*, « Arch. f. Mikr. Anat. », Bd. 64, 1904.

(3) MARCHETTI L., *Sui primi momenti dello sviluppo di alcuni organi primitivi nel germe di Bufo vulgaris*, « Anat. Anz. », Bd. 47, 1914.

(4) GÖTTE A., *Ueber die Kiemen der Fische*, « Zeit. . wiss. Zool. », Bd. 69, 1901.

(5) EKMAN G., *Experimentelle Untersuchungen über die Entwicklung der Kiemenregion einiger Anuren Amphibien*, « Morph. Jahrb. », Bd. 47, 1913.

(6) DELLA VALLE P., *L'apparato opercolare e la cavità peribranchiale nei Cordati I*, « Arch. Zool. Ital. », vol. 7, 1914.

(7) HARRISON R. G., *Experiments on the development of the gills in the amphibian embryos*, « Biol. Bull. », vol. 41, 1921.

queste, per accrescersi normalmente, hanno bisogno di un normale flusso di sangue nel loro interno e se, come avviene a volte per branchie che si sviluppano trapiantate e nelle quali i rapporti circolatori restano anormali, il flusso del sangue è scarso, la branchia è ridotta in dimensione.

Da questa rapida rassegna si viene alla conclusione che si può in generale ritenere che in tutti i Vertebrati l'accrescimento delle branchie è subordinato alla loro normale irrorazione sanguigna (Dohrn, Moroff, Ekman, Marchetti, Harrison) ma che il primo abbozzo di esse è, almeno negli Anfibii, indipendente dall'azione morfogenetica esercitata dal sangue (Ekman, Della Valle, Harrison).

Risulta quindi tra Vertebrati e Cefalopodi una completa analogia tra i processi in atto per lo sviluppo delle branchie. Il primo abbozzo della branchia è indipendente dallo sviluppo dei vasi o lacune sanguigne mentre il suo accrescimento è subordinato alla azione esercitata dalla circolazione del sangue.

Fisiologia. — *Ossigeno e funzioni centrali nervose.* ⁽¹⁾ Nota ⁽²⁾ di M. MITOLO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Le ricerche di Baglioni ⁽³⁾ sull'importanza dell'ossigeno nelle funzioni del sistema nervoso centrale, se da un lato hanno messo in evidenza la necessità di questo gas vitale per le cellule nervose, di gran lunga più indispensabile che per gli altri tessuti organici, dall'altro hanno dato adito ad un nuovo campo di indagini interessanti circa il meccanismo di questa speciale azione dell'ossigeno sul sistema nervoso centrale. La questione è assai complessa perchè ancor oggi, fra le numerose teorie che si riferiscono alla cosiddetta *respirazione interna* dei tessuti, non ve n'è una che soddisfi pienamente; talchè sono ancora ignoti i delicati processi intermedi che portano alla utilizzazione dell'ossigeno da parte dei tessuti stessi.

Per suggerimento di S. Baglioni, ho tentato la soluzione di uno dei lati del problema, quello attinente ai rapporti che intercedono tra l'ossigeno e la distruzione di acidi, organici ed inorganici, fissi o volatili, che si formano continuamente nei processi del ricambio intermedio. Per il sistema nervoso centrale ho già potuto notare la formazione di questi acidi ⁽⁴⁾, che H. Winterstein e allievi hanno dimostrato essere in prevalenza acido lattico, fosforico

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1930.

(3) BAGLIONI, « Rend. R. Accad. Lincei », v. XIII, ser. 5^a, fasc. 12^o, 1904; « Policlino », sez. prat., 1904; « Arch. ital. de Biol. », XLII, 83, 1904; « Zeitschr. f. allgem. Physiol. », IV, 384, 1904.

(4) MITOLO, « Fisiol. e Medic. », I, 445, 1930.

e carbonico ⁽¹⁾, ⁽²⁾. Winterstein ⁽³⁾ ha pure osservato che, schiacciando midolli spinali ossigenati su cartine di laccamuffa, non si ha alcun arrossamento (o quasi) di queste, mentre l'arrossamento è evidente per midolli spinali precedentemente sottoposti all'azione dell'azoto, in luogo dell'ossigeno.

Per una minuta analisi del fenomeno, mi sono valso del *preparato centrale* Baglioni; l'asse cerebro-spinale di un preparato veniva immerso in 12 cc. di una sol. fisiologica di NaCl al 0,7 % (pH = 6,8 — 6,9; T = 20 — 24 °C.), in cui si faceva gorgogliare bolla a bolla ossigeno; ogni bolla si succedeva ad un'altra con un intervallo di 3". L'asse cerebro-spinale di un altro preparato era posto nelle stesse condizioni sperimentali del precedente, ma nel liquido fisiologico non si faceva gorgogliare ossigeno. La durata della ricerca non superava le due ore, non potendosi prolungare l'esperimento (per i preparati non ossigenati) a causa dell'accumulo dei prodotti acidi intorno alla sostanza nervosa centrale. Ambedue i preparati erano lasciati a riposo. Dopo l'esperienza, si separava l'asse cerebro-spinale dal resto del preparato, e si pesava accuratamente; si è fatto sempre in modo che l'asse cerebro-spinale di maggior peso fosse quello sottoposto all'azione dell'ossigeno. Dopo le due ore di riposo, si misurava col metodo colorimetrico (nuovo comparatore di HELIGE), il pH della sol. fisiologica rimasta a contatto col tessuto nervoso centrale, e si osservavano le eventuali differenze tra il pH iniziale della soluzione e quello finale, e tra il pH finale della sol. ossigenata e quello finale della sol. non ossigenata. La temperatura ha oscillato, nei vari giorni di esperienza, tra 20 e 24° C.

Riassumo nella Tab. I i risultati ottenuti:

TABELLA I.

Sol. fisiologica di NaCl al 0.7 %: pH 6.8-6.9 (T = 20-24° C.).

N.	Durata dell'esperimento ore	Preparati ossigenati		Preparati controllo	
		peso mgr.	pH finale	peso mgr.	pH finale
1	1	135	6.8	125	6.7
2	1	140	6.8	140	6.7
3	1	142	6.8	140	6.7
4	1	157	6.8	132	6.8
5	2	151	6.8	139	6.6
6	2	125	6.8	124	6.6
7	2	120	6.8	111	6.6
8	2	137	6.8	112	6.6

(1) JUNGMAUN, « Bioch. Zeitschr. ». CCI, 259, 1928; « ibid. », CCVI, 457, 1929.

(2) JUNGMAUN e KIMMELSTIEL, « Bioch. Zeitschr. », CCXII, 347, 1929.

(3) H. WINTERSTEIN, « Bioch. Zeitschr. », LXX, 130, 1915.

Questi risultati dimostrano che sia il preparato Baglioni ossigenato, sia il preparato controllo non ossigenato fanno abbassare (verso la zona acida) il pH della sol. fisiologica in cui è immerso il loro asse cerebro-spinale; tuttavia lo spostamento verso il lato acido è minimo o spesso nullo per i preparati ossigenati, mentre è marcato nei preparati non ossigenati, per i quali, anche dopo una sola ora di esperienza, si trova un pH nettamente acido. È da notare il fatto che di fronte a questi prodotti acidi del ricambio intermedio il sistema nervoso centrale non è capace di difendersi mediante il suo potere moderatore della reazione chimica, che ho posto in rilievo in una precedente nota; ciò induce a credere che il concetto di potere moderatore deve, almeno per ora, restare nell'ambito della fisica chimica, riuscendo assai difficile il poterlo trasportare nel campo biologico.

Al termine della esperienza ho talvolta osservato che la eccitabilità riflessa aumentava, quando il pH finale della sol. fisiologica scendeva a 6,6.

In un esperimento ho lasciato il preparato ossigenato a contatto con l'ossigeno per ben 7 ore, mentre sul preparato controllo ho sperimentato per due ore sole; i pH sono stati rispettivamente 6,7 e 6,6.

In un'altra serie di ricerche, invece di lasciare a riposo i preparati, li sottoponevo, di 5' in 5', a stimolazione meccanica della cute delle estremità posteriori, che provocava l'attività riflessa dei preparati stessi. La Tab. II riassume i risultati:

TABELLA II.

Sol. fisiologica di NaCl al 0.7 %: pH 6.8-6.9 (T = 20-24° C.).

N.	Durata dell'esperimento ore	Preparati ossigenati		Preparati controllo	
		peso mgr.	pH finale	peso mgr.	pH finale
1	1	120	6.8	115	6.6
2	1	159	6.8	136	6.5
3	1	140	6.8	134	6.6
4	1.30'	154	6.8	137	6.5

Adunque, l'attività riflessa produce aumento di acidi, che si riesce ad osservare solo nei preparati non ossigenati.

In una terza serie di esperienze, ho immerso l'asse cerebro-spinale in 12 cc. di una sol. di solfato neutro di stricnina al 2,5: 10.000 (in sol. fisiologica): si sono ottenute, durante tutta la durata degli esperimenti, convulsioni tetaniche. I risultati sono esposti nella Tab. III:

TABELLA III.

Sol. solfato neutro stricnina: pH 6.7 (T = 24° C.).

N.	Durata dell'esperimento ore	Preparati ossigenati		Preparati controllo	
		peso mgr.	pH finale	peso mgr.	pH finale
1	1	125	6.7	121	6.6
2	1	134	6.7	125	6.6
3	2	125	6.7	105	6.6
4	2	150	6.7	149	6.6
5	2	134	6.7	120	6.6

Anche per l'azione di veleni convulsivanti si ha uno spostamento del pH della soluzione verso il lato acido, abbastanza notevole; questo risultato è apprezzabile solo per i preparati non ossigenati.

Ponendo a contatto l'asse cerebro-spinale con 12 cc. di una miscela di sol. fisiologica di NaCl (cc. 11) con alcool etilico assoluto (cc. 1), si ottiene narcosi centrale per tutta la durata delle esperienze. Il pH finale della soluzione, per i preparati non ossigenati, è spostato anche qui, sebbene meno fortemente, verso la zona acida; mentre, per i preparati ossigenati, il pH finale della soluzione è uguale a quello iniziale; il che starebbe contro la teoria di Verworu (1), secondo cui esisterebbe un rapporto tra narcosi ed arresto delle ossidazioni intracellulari, ed in accordo con le dimostrazioni di Winterstein (2) sulla mancata relazione tra i due processi.

TABELLA IV.

Sol. fisiologica cc. 11 + alcool etil. ass. cc. 1: pH 6.8 (T = 24° C.).

N.	Durata dell'esperimento ore	Preparati ossigenati		Preparati controllo	
		peso mgr.	pH finale	peso mgr.	pH finale
1	1	138	6.8	135	6.8
2	1	126	6.8	125	6.7
3	2	145	6.8	127	6.7
4	2	150	6.8	131	6.7

(1) VERWORN, Narkose. Jena, 1912.

(2) H. WINTERSTEIN, « Bioch. Zeitschr. », LI, 143, 1913; « ibid. », LXI, 81, 1914.

In conclusione, uno dei meccanismi secondo cui si esplica l'azione dell'ossigeno nelle funzioni del sistema nervoso centrale, e che ci spiega in parte la indispensabilità di questo gas per gli elementi nervosi centrali, è la ossidazione continua di acidi che compaiono tra i prodotti del ricambio intermedio del sistema nervoso centrale. Se questi prodotti acidi non venissero continuamente ossidati, mano mano che si formano, essi agirebbero sul tessuto e lo danneggerebbero nelle sue funzioni, essendo nota la squisita sensibilità della sostanza nervosa centrale verso lo spostamento (dal lato acido) del pH della neutralità, ossia verso l'accumulo di idrogenioni.

Inoltre, è oggi noto che un aumento della concentrazione degli H-ioni provoca nelle cellule un rallentamento dei processi ossidativi (Rondoni,⁽¹⁾); in assenza di ossigeno, si forma un vero circolo vizioso: aumentando gli acidi, questi a loro volta rallentano il processo di ossidazione degli stessi acidi, a scapito del tessuto nervoso. L'ossigeno, ossidando i prodotti acidi mano mano che si formano, evita l'accumulo e l'azione dannosa degli H-ioni sugli elementi centrali, ed evita pure il rallentamento delle ossidazioni operato dagli stessi H-ioni.

Questa speciale funzione dell'ossigeno, per la quale il tessuto nervoso si libera continuamente dai prodotti acidi del suo metabolismo, è una vera *funzione protettiva* per gli elementi centrali; essa si manifesta non solo durante il riposo del sistema nervoso centrale, ma anche durante la esplicazione della attività riflessa, nel corso dell'azione di veleni convulsivanti (stricnina) e durante la narcosi alcoolica.

(1) RONDONI, « Biochimica ». U. T. E. T., 1928.

Fisiologia. — *Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia. Escisione totale o parziale e metabolismo* ⁽¹⁾. Nota III ⁽²⁾ di CLARA FORTI presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In alcuni dei ratti sottoposti all'escisione dei vasi e nervi dell'ovario, e in uno dei cani operati di escisione totale, di cui ho riferito nella Nota precedente ⁽³⁾, ho eseguito pure ricerche sul metabolismo.

Per stabilire eventuali modificazioni del ricambio materiale sottoposi gli animali a determinazioni metodiche del peso del corpo, della quantità delle ingesta, delle fecce e delle urine eliminate, dell'azoto in esse contenuto, ed infine dell'urea, dei fosfati e dei cloruri espulsi colla urina. Le determinazioni furono eseguite per un certo periodo prima e dopo l'intervento operatorio, e oltre che negli animali in esperimento in qualcuno di controllo. Scelsi per le ricerche ratti che eliminassero in 24 o per lo meno in 48 ore una quantità di urina sufficiente per eseguire le diverse determinazioni. Non è difficile trovarne alcuni che, specialmente durante l'inverno e la primavera, eliminino 8-10 cc. di urina al giorno.

Per le ricerche sul ricambio materiale si tenevano i ratti in gabbie speciali (Baglioni), di forma cilindrica con doppio fondo costituito da due reticelle a maglia di diversa grandezza: la rete superiore su cui riposa l'animale lascia passare le urine e le fecce; queste ultime sono trattenute dalla seconda rete a maglia molto fitta, mentre le prime attraversano anche questa e mediante un imbuto si raccolgono in appositi recipienti. Il cane si poneva durante gli esperimenti in una speciale gabbia di ferro verniciato che permetteva pure di raccogliere i prodotti di escrezione dell'animale. Ogni 24 ore si lavavano accuratamente le gabbie e gl'imbuto con acqua e poi con una soluzione molto diluita di acido fenico, nel fondo del recipiente destinato a ricevere le urine si poneva uno strato di toluolo. I ratti si tennero ad una dieta costante di pane secco comune, cavolo ed acqua a volontà; al cane si somministrò pane secco cotto con strutto e sale. Il pane conteneva circa 1,88 % di azoto.

Determinai l'azoto totale delle urine e delle fecce col metodo di Kjeldhal, l'urea col metodo dell'ipobromito, i fosfati col metodo di Leconte e Neubauer modificato dal Cimmino; i cloruri con la modificazione di Settimj del metodo di Volhard.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1930.

(3) FORTI, *Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia. Escisione totale o parziale e funzioni sessuali*, « Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei », Rendic., serie VI, vol. XII.

Le determinazioni eseguite su ratti di controllo e quelle praticate su gli animali sottoposti all'operazione prima dell'intervento mi permettono di affermare che i ratti adoperati per questi esperimenti si comportavano, sia per la razza, sia pel genere di alimentazione, come quelli considerati dagli AA. a sviluppo poco rapido; le femmine di questi raggiungono ordinariamente un peso massimo oscillante intorno ai 200 gr., in alcuni dei miei controlli si sono arrestate perfino a 160 gr.

I risultati ottenuti nelle varie determinazioni si possono così riassumere:

Nel ratto G, operato di escisione del solo fascio vascolo-nervoso utero-ovarico, le variazioni del peso del corpo seguite per un periodo di due mesi prima dell'operazione dimostrarono che il ratto aveva una curva di accrescimento corrispondente a quella degli animali a sviluppo meno rapido, il suo peso aumentò infatti in questo periodo soltanto da 140 a 158 gr.; il primo mese dopo l'operazione osservai una notevole accelerazione nell'aumento del peso che passò da 165 a 182 gr. e raggiunse 5 mesi e mezzo dopo l'intervento 216 gr. In due gruppi di determinazioni eseguite rispettivamente due mesi e mezzo e quattro mesi e mezzo dopo l'operazione si ebbe, in confronto alle determinazioni eseguite prima di questa, lieve diminuzione della quantità del cibo ingerito, dell'azoto delle urine e delle fecce, dell'urea e dei cloruri eliminati con le urine; più forte era specialmente nel gruppo di determinazioni eseguite due mesi e mezzo dopo l'intervento la diminuzione dei fosfati.

Nel ratto H, operato come il precedente, il peso del corpo che nel mese precedente l'operazione aveva oscillato sempre intorno ad una media di gr. 201, sicchè sembrava che l'animale avesse ormai raggiunto il completo sviluppo, due mesi e mezzo dopo l'operazione raggiunse 215 gr. e tale si mantenne con lievissime oscillazioni fino a circa cinque mesi dopo. Tre mesi e mezzo, e cinque mesi e mezzo dopo l'intervento si aveva diminuzione della quantità di cibo ingerita, specialmente del pane, e diminuzione dell'azoto delle fecce e dell'urina, dei cloruri, dell'urea e soprattutto dei fosfati eliminati nelle 24 ore con questo ultimo prodotto di escrezione.

Nel ratto F, operato di escisione totale del fascio vascolo-nervoso ovarico e di quello uterino, l'aumento del peso del corpo si accelerò notevolmente nel primo mese dopo l'operazione. Alla fine del primo mese non si avevano variazioni della quantità del cibo ingerita. Nelle urine i fosfati erano notevolmente diminuiti. Tre mesi dopo l'operazione si aveva lieve diminuzione della quantità delle ingesta, dell'azoto eliminato, degli altri componenti urinari e soprattutto dei fosfati, il peso del corpo dai due ai tre mesi dopo l'operazione non mostrò variazioni ed oscillò sempre intorno ai 192 gr.

Nel ratto M, sottoposto alla stessa operazione del precedente, il peso del corpo che per un mese e mezzo prima dell'operazione era rimasto sempre intorno ai 208 gr., in modo da far pensare che l'animale avesse ormai raggiunto il suo completo sviluppo, ricominciò ad aumentare circa un mese dopo l'operazione, per arrivare quattro mesi dopo a 214 gr. La quantità di cibo ingerita un mese dopo l'operazione non era diminuita, leggermente diminuita era invece dopo quattro mesi. Sia un mese, sia tre mesi dopo l'operazione osservai lieve diminuzione dei cloruri, dell'urea, dell'azoto totale e soprattutto dei fosfati dell'urina, come pure dell'azoto eliminato con le fecce.

Nel ratto N, operato come i due precedenti, osservai accelerazione nell'aumento del peso corporeo nel primo mese dopo l'operazione, nei mesi successivi l'aumento fu più lento. La quantità di cibo ingerita, nel primo mese rimase quasi costante. Un mese dopo l'operazione era diminuita la quantità dei fosfati, dell'urea e dei cloruri eliminati con le urine; due mesi e mezzo dopo, si continuava ad avere lieve diminuzione dell'azoto totale, dell'urea,

dei cloruri e dei fosfati eliminati, si aveva però anche lieve diminuzione della quantità del cibo ingerito.

La cagna operata di escisione del fascio vascolo-nervoso utero-ovarico e di quello uterino, un mese e mezzo dopo l'operazione, ingeriva una quantità di cibo notevolmente minore che prima dell'intervento, notai pure diminuzione dell'azoto eliminato, colle fecce e colle urine, e dei vari componenti urinari. L'animale (che nei quattro mesi precedenti l'operazione aveva avuto un peso oscillante fra i 5,3 e i 5,5 kgr.), era però notevolmente diminuito di peso, ciò si doveva verosimilmente mettere in rapporto col fatto che la ferita era guarita lentamente ed aveva suppurato. Perchè l'animale potesse rimettersi dal deperimento subito, gli somministrai per otto giorni, oltre a pane a volontà circa 400 gr. di carne ogni 24 ore, e tre giorni dopo aver rimesso il cane alla dieta ordinaria di pane ed acqua ripetei le determinazioni del ricambio aggiungendo al pane strutto e sale. La cagna che durante la somministrazione della carne era passata dal peso di kgr. 4,7 a quello di kgr. 5, nei cinque giorni di esperimento aumentò di 500 gr. La quantità di cibo consumata era press'a poco uguale a quella che l'animale prendeva prima dell'operazione. L'azoto totale eliminato ed i vari prodotti del ricambio espulsi con le urine nelle 24 ore erano invece in quantità notevolmente minore che prima dell'intervento.

Tanto nei ratti G ed H operati di escisione del fascio vascolo nervoso ovarico, come nei ratti F, M ed N e nella cagna operati di escisione totale del fascio ovarico e di quello uterino si è avuto dunque lieve rallentamento del ricambio materiale, che si è manifestato, in quasi tutti gli animali, con un aumento del peso del corpo, una diminuzione dell'azoto delle fecce, dell'azoto totale, dell'urea e dei cloruri, ma soprattutto dei fosfati, eliminati con le urine. In alcuni ratti si è osservata anche diminuzione della quantità del cibo ingerito, ed in quelli il cui accrescimento non era ancora completo un acceleramento nell'aumento del peso del corpo.

In alcuni dei ratti ho determinato pure l'O₂ consumato a diverse temperature prima e dopo l'atto operatorio; il normale funzionamento dell'ovario infatti non solo favorirebbe, per lo meno nella maggior parte dei casi, la dissimilazione delle sostanze azotate e farebbe aumentare la quantità di azoto presente nelle urine (ORITA INAO 1924⁽¹⁾, KORENCKEWSKY 1926⁽²⁾ ecc.); ma dovrebbe far aumentare pure il ricambio gassoso (VEER 1924⁽³⁾). Per le determinazioni della quantità di O₂ consumato dagli animali a varie temperature mi sono servita dell'apparecchio di Regnault e Reiset, modificato da Giaja (1925)⁽⁴⁾. Gli animali anche durante queste ricerche sul ricambio energetico, erano

(1) ORITA INAO, *Experimentelle Studien über den Einfluss der Ovarien auf den Stoffwechsel*, « Arch. f. Gynäkol. », Bd. 123, 1924, S. 133.

(2) KORENCKEWSKY, *The sexual glands a. metabolism. I. Influence of castration on nitrogen a. gaseous metabolism*, e III. *The influence of injections of testicular or ovarian emulsions upon the nitrogen a. gaseous metabolism of dogs a. rabbits*, « Brit. journ. of exp. pathol. », vol. VI, 1925, pp. 21-35 e 158-172.

(3) VEER, *Ueber die Wirkung von Ovarialextracten unter besonderer Berücksichtigung des gasförmigen Stoffwechsels bei Ratten*, « Zeitschr. f. d. ges. exp. Med. », Bd. 44, 1924, S. 240.

(4) GIAJA, *Le métabolisme de sommet et le quotient métabolique*, « Ann. de physiol. et de physicochim. biol. », vol. I, 1925, p. 596.

tenuti ad una dieta costante di pane secco e cavolo; prima di eseguire le determinazioni li tenevo digiuni per circa 12 ore, cercavo di determinare in tal modo, e variando la temperatura del termostato si da raggiungere la zona della neutralità termica, oltre alla quantità di O_2 consumata a diverse temperature, il metabolismo minimo o basale.

Prima di iniziare ogni esperimento tenevo il ratto per circa 30-45 minuti nell'apparecchio alla temperatura a cui intendevo fare la prima determinazione, per le successive aumentavo di qualche grado la temperatura, e dopo aver atteso il tempo necessario perchè tutto l'apparecchio fosse in equilibrio termico, stabilivo quanti secondi l'animale impiegava per consumare una determinata quantità di O_2 (intorno ai 16, 18 cm³), eseguendo da tre a cinque determinazioni successive e prendendone la media. In un esperimento in cui discesi dalle temperature più elevate alle più basse potei confermare quanto aveva visto MALES (1929) (1), che cioè la quantità di O_2 consumata dai ratti in primo tempo, quando si esce dalla zona di neutralità termica, è maggiore di quella consumata 25-30 minuti dopo che l'animale si trova ad una data temperatura: ed ho anche potuto vedere che il contrario accade quando si esperimenta salendo dalle temperature più basse alle più elevate; e cioè da principio il consumo di O_2 è minore che 25 o 30 minuti dopo che l'animale è stato posto ad una data temperatura. Questo minore sviluppo di calore in primo tempo, quando cioè il ratto comincia a risentire dell'aumento di temperatura, è secondo me paragonabile al calore che accompagna l'impressione di benessere che prova l'uomo quando passa da un ambiente più freddo ad uno più caldo, anche se la temperatura dei due ambienti è molto elevata: in modo analogo si può forse spiegare il maggior consumo di O_2 che si ha in primo tempo allorchè si abbassa la temperatura. Ad ogni modo tenendo conto di queste osservazioni lascio passare sempre lo stesso tempo tra il momento in cui aumentavo la temperatura e quello in cui eseguivo le determinazioni, cercando di fare queste prima che si fosse stabilito l'aumento del consumo di O_2 che si ha quando l'animale è stato ormai per un certo tempo alla temperatura più elevata; e precisamente lascio passare 15' al di sotto 25° c., e 20' al di sopra di questa temperatura. Di regola i ratti non meno che di si avvicina alla zona di neutralità termica tendono ad addormentarsi sicchè è possibile fra i 24° e i 35° c. eseguire determinazioni non falsate dalla produzione di calore dovuta all'attività muscolare o comunque allo stato di veglia dell'animale: tuttavia ho dovuto scartare alcuni esperimenti durante i quali il ratto rimase sempre sveglio anche alle temperature più elevate.

Nelle annesse tabelle ho riassunto i risultati indicando per ogni esperimento nella prima colonna le temperature delle singole determinazioni espresse in gradi C., nella seconda la quantità dell' O_2 (indicata in cm.³ e ridotta a 0°, e 760 mm. di pressione) che l'animale avrebbe dovuto consumare, in base alle determinazioni eseguite, ad ogni temperatura per cm.² di superficie e per ora, nella terza lo stato di riposo, o di attività dell'animale.

(1) MALES. *Sviluppo della capacità termoregolatrice nei neonati ometermi*, « Boll. della Soc. Ital. di Biol. Sperim. », vol. IV, 1929, p. 252.

(2) MALES e MAGAZ. *Su una zona di neutralità termica nel metabolismo basale del ratto albino*, « Boll. della Soc. Ital. di Biol. Sperim. », vol. IV, 1929, p. 461.

Ratto H

Prima dell'operazione			Cinque mesi dopo l'operazione		
Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata per cm ² e per ora	Osservazioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata per cm ² e per ora	Osservazioni
14½	1.29	si muove			
17	0.99	tranquillo	18	0.99	tranquillo
22	0.99	si muove	22	0.98	si muove
26	0.97	tranquillo	26	0.96	tranquillo
30	0.96	dorme	30	0.92	dorme
32	0.68	»	32	0.66	»
34	0.54	»	34	0.45	»
35	0.96	»	36	0.96	si muove

Ratto F

Prima dell'operazione						Tre mesi dopo l'operazione					
I. esperimento			II. Esperimento			I. Esperimento			II. Esperimento		
Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni
			13	1.32	si agita						
16	1.28	si agita	16	1.30	»	16	0.99	si muove	16	1.17	si muove
20	0.96	si muove	20	0.95	si muove				20	0.93	»
22	0.78	dorme				22	0.66	dorme			
24	0.77	»	24	0.81	si muove	24	0.61	»	24	0.65	tranquillo
27	0.75	»	27	0.78	tranquillo	27	0.44	»	27	0.50	dorme
29	0.70	»	29	0.76	»						
31	0.64	»	31	0.66	dorme	31	0.51	»	30	0.52	»
33	0.62	»	34	0.63	»	32	0.72	si muove	33	0.72	dorme
			36	0.75	»						

Ratto N

Prima dell'operazione						Due mesi e mezzo dopo l'operazione					
I. Esperimento			II. Esperimento			I. Esperimento			II. Esperimento		
Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni
17	1.38	si muove	19	1.15	si muove	18	1.17	si muove	19	1.05	si muove
20	1.10	»				20	0.90	»	20	0.93	»
25	0.87	tranquillo	25	0.83	tranquillo	25	0.75	tranquillo			
26	0.78	dorme							26	0.66	dorme
			28	0.77	dorme	28	0.69	dorme	28	0.61	»
30	0.90	tranquillo	30	0.74	»	30	0.60	»			
32	0.97	»	32	0.71	»	32	0.48	»	32	0.60	»
33	1 —	»	33	0.68	»	33	0.48	»	33	0.49	»
			34	0.70	»	33.5	0.48	»			
			36	1.01	si muove	37	0.68	»	36	1.02	si muove

Ratto M

Prima dell'operazione						Tre mesi dopo l'operazione					
I. Esperimento			II. Esperimento			I. Esperimento			II. Esperimento		
Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni	Tempera- tura	Quantità di O ₂ consumata	Osserva- zioni
			16	1.84	si agita	16	1.38	si agita			
18	1.14	si muove	18	1.20	»				18	1.10	si muove
19	0.93	»				19	0.96	si muove			
			20	1.16	si muove				20	1.00	»
22	0.75	tranquillo	22	0.84	»	22	0.84	tranquillo	22	0.85	»
						24	0.66	»			
25.5	0.63	dorme	25.1	0.63	tranquillo	26	0.57	»	25.5	0.72	dorme
28.4	0.66	»	28.5	0.62	dorme	28.5	0.54	dorme	28	0.69	tranquillo
30	0.63	»	30	0.69	tranquillo	30	0.53	»	29	0.66	dorme
32	0.57	»	32	0.60	dorme				31	0.64	tranquillo
33	0.54	»				33	0.50	»	33	0.51	dorme
34	0.51	»							34	0.60	si muove
34.4	0.55	»				34.5	0.54	»	35	0.40	dorme
									35	0.90	si muove
									37	1.24	si agita

Dai risultati ottenuti si desume che, sebbene si verificchino variazioni della quantità di O_2 consumata da un giorno all'altro dallo stesso animale alle stesse temperature, nelle determinazioni eseguite dopo la escisione dei vasi e dei nervi dell'ovario, le quantità di O_2 consumate nella zona di neutralità termica e alle temperature vicine a questa zona nei ratti F ed N circa tre mesi dopo l'operazione sono state sempre un po' inferiori a quelle consumate prima dell'intervento. Soprattutto il metabolismo di base era diminuito dopo l'operazione. Nel ratto M non trovai la stessa diminuzione del ricambio energetico, però solo dopo la escisione di tutti i vasi e nervi dell'ovario a temperature elevate ebbi in una delle determinazioni eseguite una limitazione del consumo di ossigeno, che raggiunse $0,40 \text{ cm.}^3$ per ora e per cm.^2 di superficie.

Anche nel ratto H, operato di escisione dei soli vasi e nervi ovarici, cinque mesi dopo l'operazione il metabolismo di base diminuì leggermente, sebbene il ricambio energetico alle temperature che non corrispondevano a quella della neutralità termica non fosse molto diverso da quello che si aveva prima dell'intervento.

Tutti i ratti operati apparivano assai più torpidi dei controlli.

CONCLUSIONI. — Da queste osservazioni si può concludere che la escisione dei vasi e nervi dell'ovario produce nei primi mesi dopo l'operazione lieve rallentamento del metabolismo. Negli animali sottoposti alla escisione del fascio vascolo-nervoso ovarico e di quello uterino, un mese e mezzo e tre mesi dopo l'operazione si osservò lieve rallentamento del ricambio materiale. Anche in quelli operati di escisione limitata al solo fascio ovarico tre mesi e cinque mesi dopo l'operazione il ricambio materiale apparve leggermente rallentato, sebbene il ciclo sessuale fosse conservato (come abbiamo visto nella precedente Nota), e le alterazioni subite dall'ovaia (come vedremo dai risultati dell'esame anatomico) fossero molto meno gravi che in quelli operati di escisione totale. Il ricambio energetico è solo leggermente diminuito nei ratti operati da circa tre mesi di escisione totale dei vasi e nervi dell'ovario; anche in uno di quelli operati di escisione del solo fascio ovarico cinque mesi dopo l'operazione il metabolismo di base era leggermente diminuito.

Biologia. — *Differenziamento morfologico di alcune specie di Actinomiceti confuse sotto la denominazione di « Actinomyces bovis » Harz.* Nota di V. PUNTONI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Variazioni dei tassi alcoolemico ed idremico in seguito a somministrazione di determinate dosi di alcool.* Nota di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Commemorazione del Socio Nazionale Giulio Fano

letta dal Socio FILIPPO BOTTAZZI nella seduta del 2 novembre 1930.

Giulio FANO nacque in Mantova, addì 29 marzo del 1856. Compì gli studi liceali nella città natale, ove gli fu dato di ascoltare le prime lezioni di filosofia dettate da Roberto Ardigò. S'iscrisse poi nell'Università di Padova alla Facoltà di Medicina; ma l'anno seguente passò allo studio di Bologna; quindi si trasferì a Torino, dove rimase gli ultimi quattro anni, frequentando il laboratorio diretto da Giulio Bizzozzero. A Torino conseguì la laurea in Medicina, nel 1879.

Seguendo l'esempio del Mosso, del Luciani ed altri, andò in Germania, attratto da quel faro luminoso della fisiologia che fu C. Ludwig, avendo egli già deliberato fin dai primi anni universitari di dedicarsi agli studi fisiologici. Fu appunto nel celebre Istituto di Lipsia che egli fece il suo primo lavoro sperimentale, pubblicato nel 1881 col titolo: *Das Verhalten des Peptons und Tryptons gegen Blut und Lymphe*, lavoro col quale egli, in età di 24 anni, vale a dire quando d'ordinario s'incomincia appena a fare i primi tentativi nell'agone scientifico, entrò subito nella schiera degli Autori più noti e citati, dando così prova di non comune precocità d'ingegno e abilità di sperimentatore. Un anno avanti Schmidt-Mülheim aveva osservato che all'iniezione endovenosa di « propeptone » segue, nel cane, cospicuo abbassamento della pressione arteriosa, e che per giunta il sangue diventa incoagulabile. FANO confermò il fatto, determinò la dose minima sufficiente, vide che il prodotto della digestione pancreatica (che egli volle chiamare « triptone ») produce gli stessi effetti che il propeptone, e trovò che questo, iniettato nel coniglio, è del tutto inattivo; osservò inoltre che, dopo le iniezioni endovenose di « peptone », non solamente il sangue, ma anche la linfa perde la capacità di coagulare. Queste osservazioni sono state il punto di partenza d'una serie numerosa di lavori, i quali non solo hanno condotto poi alla conoscenza del modo d'agire del « peptone », ma hanno gettato anche molta luce sul fenomeno della coagulazione del sangue.

Tornato in Italia, FANO occupò, durante l'anno scolastico 1880-81, il posto di Aiuto presso l'Istituto di Fisiologia di Torino diretto da A. Mosso, e qui incominciò a fare ricerche sul tempo di reazione dei vasi sanguigni dell'uomo, i cui risultati pubblicò solo più tardi (1885).

Da Torino passò a Firenze, Aiuto di Luciani, e vi rimase fino a che, nel novembre del 1884, la Facoltà Medica di Genova gli affidò l'incarico dell'insegnamento della Fisiologia. A 28 anni FANO era già professore universitario! Banditosi l'anno seguente il concorso per straordinario, FANO lo vinse, rimanendo in Genova, dove dopo tre anni fu promosso ordinario. Tenne la cattedra di Fisiologia di Genova fino al 1894, anno in cui dal voto unanime delle due Facoltà di Scienze e di Medicina del R. Istituto di Studi superiori di Firenze fu chiamato a succedere al suo maestro Luciani, che a sua volta aveva accettato l'invito di occupare la cattedra di Fisiologia di Roma, vacante per la morte di Jacopo Moleschott. In quell'anno conobbi io, da pochi mesi laureato, il FANO, e divenni suo Aiuto.

Il decennio 1883-93, corrisponde al periodo della massima attività scientifica del FANO. A questo periodo appartengono le ricerche: *Sulla respirazione periodica e sul ritmo respiratorio*; quelle *Sul meccanismo dei movimenti volontari*; *Sul nodo deambulatorio bulbare*, ecc., e, in collaborazione col Baldi, le ricerche: *Sugli albuminoidi della linfa e del sangue nel lavoro muscolare*, ed altre molte. Ma i lavori di maggiore importanza sono quelli da lui fatti a Genova: *Sullo sviluppo della funzione cardiaca nell'embrione*; *Sulle oscillazioni del tono dell'atrio cardiaco dell'Emys europaea*, e *Sul chimismo respiratorio negli animali e nelle piante*. In queste ricerche il FANO dette la prova del suo ingegno inventivo e di abilità tecnica non comune, scoprendo fatti importanti, e vincendo in quelle indagini difficoltà tecniche notevolissime con artifizi nuovi che allargarono l'applicazione del metodo grafico alla fisiologia.

A Firenze egli volle innanzi tutto provvedere all'accrescimento e al riordinamento di quel laboratorio di Fisiologia, già reso famoso nel mondo scientifico dall'opera di M. Schiff e di L. Luciani.

Già da alcuni anni Hamburger aveva introdotto i principi e i metodi della chimica fisica nel campo della fisiologia. Ora mi è caro ricordare, che le prime ricerche eseguite in Italia, in quest'ordine di studi, furono fatte nel laboratorio di fisiologia di Firenze, e il primo lavoro italiano di chimica fisica applicata alla fisiologia è quello che FANO e Bottazzi pubblicarono nel 1896: *Sur la pression osmotique du sérum du sang et de la lymphe en différentes conditions de l'organisme* (« Arch. ital. de Biologie », XXVI). In quell'ordine di studi il FANO stesso ha continuato a lavorare in seguito, come dimostrano le ricerche: *Sui liquidi colloidali*; *Sui composti salino-proteici*; *Sulla tensione superficiale del siero del sangue*; *Sui liquidi filanti*, fatte in collaborazione coi suoi assistenti G. Rossi, P. Enriques, M. Mayer e da solo.

Fra gli altri lavori eseguiti in Firenze, merita d'essere ricordato, in modo speciale, sì per la sua importanza e sì per la mole, quello *Sui riflessi spinali nella tartaruga*, che il FANO presentò, insieme con altri, al concorso per il Premio Reale dei Lincei del 1897, a lui integralmente aggiudicato.

Il FANO dimostrò sempre, non solo rare attitudini di biologo sperimentatore, ma anche spiccata tendenza alla generalizzazione nel campo della nostra scienza, di che sono prova numerose pubblicazioni, quali per es.: *Fisiologia del cuore* (1883); *La fisiologia quale scienza autonoma* (1884); *Di alcuni fondamenti fisiologici del pensiero* (1890); *Le funzioni del cuore nei sentimenti* (1893); *La fisiologia in rapporto con la chimica e la morfologia* (1894); *La fisiologia nel passato e la causa dei suoi recenti progressi* (1895); *Chimica e biologia* (1907) ecc.

Un grande merito di G. FANO fu quello di essersi mostrato, nel Laboratorio e nella Scuola, tale a dire nella ricerca scientifica e nell'insegnamento, aperto a ogni nuova corrente del pensiero, e sollecito nell'utilizzare i più moderni perfezionamenti della tecnica fisiologica. Infatti, nel laboratorio da lui diretto, oltre a quelle già ricordate di chimica fisica, furono eseguite da A. Herlitzka le prime ricerche italiane di « Meccanica dello sviluppo ». Le sue lezioni, anche per la facilità con cui esprimeva il suo pensiero e per l'abilità di rendere accessibili alle menti giovanili i più complessi problemi fisiologici, erano un vero godimento intellettuale.

G. FANO non fu, però, solamente cultore appassionato della Fisiologia. Negli anni che trascorse a Firenze, fu sempre in ottimi rapporti coi professori della Facoltà di Lettere. Anche altri scienziati, quali per es. il Pestalozza e il Chiarugi e per breve tempo il Martirolo, trattavano cordialmente coi letterati loro colleghi. Ma il FANO per il suo carattere giovanile, per la versatilità del suo ingegno e la larghezza e varietà della sua cultura, non che per le sue doti non comuni di arguto conversatore, si trovava tra i fisiologi, i filosofi e i letterati quasi come uno di loro. Ebbe rapporti di amicizia coi principali professori delle varie Facoltà; ma fu di preferenza nel circolo che intorno al Virelli, al Raina, al Tocco, si adunava ogni sera in un caffè di Piazza della Signoria, e partecipò alle riunioni che spesso si tenevano nella casa ospitale di Adriano e Laura Milani. Quando sorse, nei primi mesi del 1897, l'idea di costituire una Società per la difesa degli studi classici, seriamente minacciati da progetti ministeriali di riforma della scuola media, il FANO fu tra i promotori e animatori dell'impresa e contribuì validamente alla sua attuazione.

Nell'aprile di quello stesso anno, sorse, con oltre un centinaio di soci effettivi e molti aggregati, la « Società Italiana per la diffusione e l'incoraggiamento degli Studi classici ». Ebbene: l'elenco dei soci, pubblicato nel primo numero del bollettino sociale « Atene e Roma » (gennaio-febbraio 1898), contiene il nome di FANO insieme con quelli di pochi altri illustri scienziati (Giovanni Schiaparelli, Francesco Brioschi, Raffaele Naisini, Federico Enriques), che si schierarono risolutamente in difesa della cultura umanistica. E Umanista nel senso largo della parola, secondo la gloriosa tradizione italiana, massimamente rappresentata, nel campo della Fisiologia da Luzaro Spallanzani, fu GIULIO FANO. Egli parlava volentieri

di letteratura e d'arte, s'informava con interesse di cose pertinenti alle discipline filologiche storiche e filosofiche rivolgendosi agli amici cultori di queste, e amava comporre per suo conto un quadro generale della coltura contemporanea in modo da poter dire una parola sensata su tutte le questioni più importanti e più dibattute. Citava Omero nel suo: *Viaggio di un fisiologo intorno al mondo*; e mentre ne curava qualche anno fa la seconda edizione chiedeva a un Collega filologo romano di verificare se la citazione fosse a proposito ed esatta. Dall'Annuario dell'Università di Roma risulta che egli era socio dell'«Accademia Virgiliana»; e certo meritava di appartenere a quell'Accademia, non soltanto per la sua origine mantovana.

Nel 1911 Fano fu nominato Senatore; e nel 1916 volle trasferirsi a Roma, attratto dal miraggio di dare maggiore incremento alla fisiologia generale, verso la quale aveva indirizzato tutta la sua opera di ricercatore. Ma i tempi non erano propizi per la realizzazione del suo sogno. Gli fu dato di allogarsi in un Istituto decoroso; ma non poté ottenere, g'ingentissimi mezzi occorrenti per fondare un grande Laboratorio moderno di Fisiologia generale. Tuttavia non ristette dal trasfondere nei giovani, con la genialità del suo insegnamento, con conferenze e con nuove pubblicazioni, l'amore per quella scienza. Ebbe molti discepoli, che presentemente occupano cattedre di Fisiologia: insieme con me, Amedeo Herlitzka, Gilberto Rossi, Virgilio Ducceschi, Igino Spadolini. Fondò il primo «Archivio di Fisiologia» italiano, che ora, continuato da suoi discepoli, è al suo 29° volume.

Nei molti anni che passai presso di lui, e dopo, ebbi l'impressione che egli non fosse stato mai seriamente malato. Solo ultimamente, e contava già 73 anni, seppi che aveva incominciato ad avvertire sofferenze, che ne accelerarono forse la fine avvenuta in pochi giorni, presso Mantova, il 27 di agosto: fine apparsa immatura a chi conosceva la sua immutabile vitalità, la sua resistenza al lavoro, e ai lunghi frequenti viaggi, che egli usava intraprendere in compagnia della sua adorata Consorte.

Ingegno vivace e organismo sano, agitato dal bisogno di attività corpora e mentale: da un canto, non vi è manifestazione intellettuale alla quale il Fano abbia dato il suo contributo personale, come dimostra la sua partecipazione a Congressi Nazionali e Internazionali, mentre dall'altro canto, si può dire che dall'Egitto al Giappone, dall'Europa all'America, non vi è forse luogo meritevole di fama, per la sua storia o per i suoi tesori d'arte o per la magnificenza della sua natura, che egli non abbia visitato e talvolta ripetutamente. Di questa qualità non comune, specie fra scienziati, segni tangibili furono da una parte le sue pubblicazioni (*Criminali e prostitute in Oriente*, nel 1893; *Impressioni di Viaggio*, 1895; *Un fisiologo intorno al mondo*, 1899), e dall'altra la molteplicità delle sue conoscenze personali, molte delle quali (e mi sovviene il nome venerato di M. Foster) furono sincere calde amicizie.

FANO fu d'avviso che la vita fosse un tal bene, un sì prezioso dono elargito agli umani, che è nostro dovere cogliere il maggior numero dei suoi infiniti aspetti, conoscere della natura quanta più parte possiamo, vivere e operare intensamente.

Egli mirò bensì, alla Scienza come a una delle più efficaci consolazioni della vita ma non come alla sola. Insofferente di unilateralità per temperamento, egli non si tenne pago di lasciare il suo nome legato a tre o quattro capitoli della Scienza della vita — fortuna che capita a pochi — ma volle arricchire il suo spirito agile e pronto d'innumerabili visioni d'arte e di natura, e adunarvi un numero d'esperienze d'ordine superiore, quali pochi possono vantarsi di possedere, cioè un tesoro che vale assai più di un cumulo di « note fisiologiche » caduche come queste foglie d'autunno.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. GARBASSO dà il triste annuncio della morte del Socio Nazionale GIULIO FANO e del Socio Straniero GIOVANNI HAGEN avvenuta durante le ferie.

Dà quindi la parola a S. E. il Socio BOTTAZZI che legge una elevata e dotta commemorazione del Socio FANO.

Il Presidente si congratula col Socio BOTTAZZI e lo ringrazia della bella commemorazione pronunciata.

Il Socio CASTELNUOVO si associa alle alte parole dette dal Presidente e dal Socio BOTTAZZI in memoria dell'insigne scomparso e propone che si invii alla famiglia un telegramma di condoglianze a nome della Classe riunita nella prima seduta annuale.

L'Assemblea approva.

Il Socio RAFFAELE si associa alle parole dei precedenti oratori e ricorda con commosse parole l'indimenticabile amico perduto.

Il Presidente comunica che hanno inviato parole di ringraziamento per essere stati chiamati a far parte dell'Accademia, i nuovi Soci BETTI, CESARIS DEMEL, DUCCESCHI, GIORDANI, GORTANI, NEGRI, QUAGLIARIELLO, RONDONI, VITALI.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

S. E. GUIDI presenta in omaggio alcuni suoi opuscoli dal titolo rispettivamente: « Appunti sulle funivie », « Si devono considerare sollecitazioni sismiche nelle dighe? », « Travi continue da ponte solidali con piedritti incastrati alla base », « Telai asismici ».

Il Socio L. PALAZZO offre all'Accademia, in omaggio, una sua breve nota: "Einige Bemerkungen über erdmagnetische Messungen welche in Feodossia ausgeführt wurden"; la nota fa parte di un volume edito dalla « Zeitschrift für Geophysik » per onorare il 70° compleanno dell'eminente magnetologo ADOLFO SCHMIDT di Gotha.

S. E. PARRAVANO (Segretario Accademico) presenta le opere giunte in dono durante le ferie segnalando le pubblicazioni dell'Istituto di Biologia dell'Università di Bologna, inviate dal Socio GHIGI, il vol. III degli Atti del Congresso Nazionale dei Matematici, i volumi dedicati alla memoria dei defunti Soci CAVARA e LO MONACO, il primo volume delle Opere di Poincaré, le Ricerche eseguite nell'Istituto C. Golgi, vivente ancora il defunto Socio PERRONCITO, la Relazione della Commissione d'inchiesta per il disastro dell'aeronave Italia e molte altre opere.

Richiama in maniera speciale l'attenzione dei soci sugli Atti del III Congresso di Chimica pura e applicata, raccolti a cura del benemerito prof. MAROTTA per il quale propone un voto di plauso, e coglie l'occasione per mettere in evidenza l'importanza di questi congressi di chimica dai quali la scienza e l'industria traggono grandi vantaggi.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Presenta quindi un plico suggellato inviato dal sig. LUCARINI LUIGI, ma propone che non sia accettato perchè reca l'indicazione che contiene un manoscritto sulla quadratura del circolo.

L'assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci BAGLIONI, CASTELNUOVO, GARBASSO, LEVI-CIVITA, NASINI, RAFFAELE.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 novembre 1930

- ALLEN H. W. and JAYNES H. A. — Contribution to the taxonomy of Asiatic Wasps of the genus *Tiphia* (Scoliidae). (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 76). Washington, 1930. 8°, pp. 1-105.
- ANTONIADI E. M. — La planète Mars. 1659-1929. Paris, 1930. 4°, pp. 1-239. Planches I-X.
- Archivio di Farmacologia Sperimentale e Scienze Affini. Vol. XLVIII, XLIX. Parte I, II. Volume giubilare per il 25° anno d'insegnamento del † Prof. DOMENICO LO MONACO Direttore dell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma. Anno 1903-1928. Roma, 1929. 8°, pp. 1-502, 1-365.
- ARCANGELI A. — Contributo alla conoscenza del « Microgenton » di Costa Rica. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXV). Portici, 1930. 8°, pp. 1-29.
- ARCANGELI A. — *Musconiscus Romanorum*. Nuovo genere e nuova specie di isopodo terrestre della Cirenaica. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXV, pp. 39-43). Portici, 1930. 8°.
- ARCANGELI A. — Due nuove specie del genere « *Rhyscotus* ». B. L. isopodi terrestri. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXV, pp. 30-38). Portici, 1930. 8°.
- ARMELLINI G. — L'Osservatorio astronomico di Roma. Contributi scientifici. (Nuova serie, n. 30). Roma, 1930. 8°, pp. 1-18.
- Atti del Congresso internazionale dei matematici. Bologna, 3-10 settembre 1928. Tomo III. Bologna, 1930. 8°, pp. 1-472.
- BEIER MAX. — Nuovi pseudoscorpioni dell'Africa tropicale. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXV, pp. 43-48). Portici, 1930. 8°.
- BELLOTTI L. — Il sole. Città di Pieve, 1930. 8°, non pag.
- BERKSON J. — Bayes' Theorem. (Reprinted from « The Annals of mathematical Statistics ». February 1930, pp. 43-56). Ann Arbor, 1930. 8°.
- BERKSON J. — Growth changes in physical Correlation Height, Weight, and Chest-Circumference Males. (Reprint. from « Human Biology a record of research ». Vol. I, n. 4, pp. 461-502). York, 1929. 8°.
- BOEGAN E. — Catasto delle grotte italiane. Grotte della Venezia Giulia, fasc. I. Trieste, 1930. 8°, pp. 1-129.
- BONOMI L. — Naturalisti, medici e tecnici Trentini. Contributo alla storia della Scienza in Italia. Trento, 1930. 8°, pp. 1-221.
- BOSCHMA H. — *Briarosaccus Callosus*, a new genus and new species of a rhizocephalan parasite of *Lithodes Agassizii* Smith. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 76). Washington, 1930. 8° non pag.
- BRUGGENCATE P. — The radial velocities of globular Clusters. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XVI, N. 2, 1930, pp. 111-118). Washington, 1930. 8°.
- CANU F. and BASSLER R. S. — The bryozoan fauna of the Galapagos Islands.

- (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 76). Washington, 1930. 8°, pp. 1-78.
- CASTALDI L. — Scritti biologici. Vol. V. Siena, 1930. 8°, pp. 1-577.
- COCHRAN D. M. — The herpetological Collections made by Dr. Hugh M. Smith in Siam from 1923 to 1929. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, s. p.
- Das neue Eisenhütten-Institut der Sächsischen Bergakademie in Freiburg. (Sonderabd. aus der « Zeitschrift Stahl und Eisen ». 1930, Heft. 15). s. l. 1930. 4°, pp. 1-14.
- DE MAGISTRIS L. F. — Lo stato attuale della conoscenza della distribuzione della malaria nell'Italia meridionale. (Estr. dagli « Atti dell'XI Congresso geogr. ital. ». Vol. III). Napoli, 1930. 8°, pp. 1-12.
- DRAGHETTI A. — Fenomeni di maculazione della granelle in una linea pura di soja gialla « Monchu ». (Estr. dai « Nuovi Annali dell'agricoltura » Anno IX, 1929, pp. 581-596). Roma, 1930. 8°.
- DRAGHETTI A. — L'importanza dello studio dell'internodo superiore del culmo di frumento nella costituzione di varietà agrariamente refrattarie alle Puccinie. (Estr. dalla « Rivista di Patologia vegetale ». Anno XX, N. 5-6, 1930). Pavia, 1930. 8°, pp. 1-11.
- EKMAN E. L. — En buxa del monte Tino. República Dominicana. Estacion agronomica de Moca. Serie B. Botanica. N. 15. Santo Domingo, 1930. 8°, pp. 1-17.
- EKMAN E. L. — Excursion botanica al Nord-Oeste de la Republica Dominicana. Estacion agronomica de Moca. Serie B. Botanica N. 18. Santo Domingo, 1930. 8°, pp. 1-16.
- EDWARDS D. L. — Spectroscopic parallaxes of B-type Stars (Sixth Paper): the spectral types and parallaxes of 175 Stars. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XC, N. 3, pp. 523-533). Edinburgh, 1930. 8°.
- ERIKSSON J. — Sur l'hibernation du Puccinia Ribis DC à l'état végétatif dans les bourgeons d'hiver de la plante hôtalière. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences ». T. 190, 1930). Paris, 1930. 4°, pp. 1-3.
- FABIANI R. — Le risorse del sottosuolo della provincia di Vicenza. Vicenza, 1930. 8°, pp. 1-149.
- FANTOLI G. — Per la venuta del Duce a Milano nella celebrazione del 24 Maggio 1915. Parole agli allievi del R. Politecnico di Milano. Milano, 1930. 8°, pp. 1-7.
- FISHER W. J. — The lunar total Eclipse of 1927 june 15. (Reprinted from « Popular Astronomy ». Vol. XXXVIII, N. VI, 1930, pp. 328-340). s. d. t. 8°.
- FRIEDMANN H. — The caudal molt of certain Corachform, Coliiform and Piciform Birds. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-6).
- GAFAPER W. M. — Infant diarrhea and enteritis and climate. London, 1876-1927. (Reprinted from the « American Journal of Hygiene ». Vol. XI, pp. 536-575, 1930). s. d. t.
- GAHAN A. B. — Synonymical and descriptive Notes on parasitic Hymenoptera. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 57). Washington, 1930. 8°, pp. 1-12.
- GALLARDO A. — Note sur les mœurs de la fourmi *Pseudoatta argentina*. (Extr. des « Revista de la Sociedad Entomologica Argentina ». N. X, 1929, pp. 197-202). Buenos-Aires, 1929. 8°.
- GALLARDO A. — Sobre el género *Dorymyrmex* Mayr en la Argentina. (Extracto de la « Revista Chilena de Historia Natural ». Año XXXIV (1930), pp. 143-148). Buenos Aires, 1930. 8°.
- GARNIER R. — Cours de mathématiques générales (Analyse et geometrie). Paris, 1930. 8°, pp. 1-XI, 1-463.
- GARCIA G. — La métrica en un espacio múltiplo. (Universidad Nacional de S. Marco. Facultad de Ciencias Matematicas, Fisicas y Biologicas). Lima-Perù, 1930. 8°, pp. 1-22.
- GENOVESE S. — Intorno alla concezione astronomica Veltriana di Giona Ricci. Città della Pieve, 1930. 8°, pp. 1-25.
- GHIGI A. — Ricerche di zoologia. Vol. I-V. Bologna, 1926-1929. 8°.

- GHIGI A. — Gli animali da cortile. Roma, s. d. 8°, pp. 1-343.
- GILMORE Ch. W. — A nearly complete shell of the extinct turtle *Trachemys sculpta*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-3.
- GOSSELIN A. et GOSSELIN M. — Constitution et thermochimie des molécules. Paris, 1930. 8°, pp. 1-227.
- GUIDI C. — Appunti sulle funivie. (Estr. da «L'Ingegnere». Rivista Tecnica del Sindacato nazionale fascista Ingegneri. Vol. IV, N. 3, 1930). Roma, 1930. 4°. pp. 1-5.
- GUIDI C. — Si devono considerare sollecitazioni sismiche nelle dighe? (Estr. da «L'Ingegnere». Rivista Tecnica del Sindacato nazionale fascista Ingegneri. Vol. IV, N. 6, 1930). Roma, 1930. 4°, s. p.
- GUIDI C. — Telai asismici. Roma, 1930. 8°, pp. 1-42.
- GUIDI C. — Travi continue da ponte solidali con piedritti incastrati alla base. (Estr. dagli «Annali dei Lavori pubblici», già Giornale del Genio Civile. Anno 1930, fasc. VI). Roma, 1930. 8°, pp. 1-21.
- HAALCK H. — Die Verwendung der Elektrizität zur Erforschung des Untergrundes. (Sonderdruck aus «Gerlands Beiträge zur Geophysik». Bd. XXXIII, Ss. 99-143). Leipzig, 1929, 8°.
- HAALCK VON H. — Über das Vorhandensein einer magnetischen Wirkung durch rotierende Massen und die Ursache des Erd- und Sonnenmagnetismus. (Sonderdruck aus der «Zeitschrift für Geophysik». Jahrg. V, Heft VIII, Ss. 359-365). s. d. t.
- HAGEN G. — A Durchmusterung of the Heavens for obscure cosmic Clouds. s. l. s. d. 4°, pp. 1-5.
- HAGEN G. — Gli esperimenti col pendolo libero. s. l. s. d. 4°, pp. 1-3.
- HAGEN G. — Oscillazioni del pendolo libero fotografate. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali». Vol. XI, serie VI, 1° sem., fasc. VII, p. 633-635). Roma, 1930. 8°.
- HEDRICH A. W. — The corrected average Attack rate from measles among City Children. (Reprinted from the «American Journal of Hygiene». Vol. XI, N. 3, 1930, pp. 576-600). s. l. 1930. 8°.
- HEDRICH A. W. — Correction of birth Rates for incomplete Reporting. (Reprinted from the «American Journal of Hygiene». Vol. X, N. 2, 1929, pp. 435-452). s. l. 1929. 8°.
- HUMBERT P. — Œuvres publiées par P. Humbert et G. Julia. Tome I. Paris, 1929. 4°, pp. 1-555.
- Il monumento all'Arma d'artiglieria XV giugno 1930. Discorsi. s. d. l. 8°, pp. 1-12.
- IMBEAUX Ed. — Essai d'Hydrogéologie. Recherche, étude et captage des eaux souterraines. Paris, 1930. 8°, pp. 1-XIX, 1-704.
- JULIA G. — Principes géométriques d'analyse. Partie I. Paris, 1930. 8°, pp. 1-116.
- LANDAU E. — Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz. (Sonderdruck aus «Nachrichten von der Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse», 1930, pp. 255-276) Berlin, 1930. 8°.
- LECAT M. — Contributo fisico-chimico all'analisi organica. (Estr. dalla «Gazzetta Chimica Italiana». Vol. 61, fasc. IX, pp. 704-719). Roma, 1930. 8°.
- LECAT M. — Isopérimètres, iséophanes, cercle et sphère, fonctions et figures convexes. (Extr. de la «Revue des Questions scientifiques, 1930, pp. 305-312). Louvain, 1930. 8°.
- LECAT M. — Nouveaux azéotropes binaires normaux. XV liste. (Extr. des «Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Tome L, série B. Comptes rendus des séances», pp. 21-33). Louvain, 1930. 8°.
- LECAT M. — Systèmes binaires à isobare d'ébullition normale sensiblement rectiligne. (Extr. des «Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome L, série B. Comptes rendus de séances, 1930, pp. 13-17). Louvain, 1930. 8°.
- LECAT M. — Une application nouvelle de l'azéotropisme. (Extr. des «Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome L, série B. Comptes rendus de séances», pp. 18-21). Louvain, 1930. 8°.
- LEHMANN I. — As read from the Records of the Earthquake of June 16th 1929.

- (Reprinted from « *Gerlands Beiträge zur Geophysik* ». Bd. XXVI (1930), pp. 402-412). Leipzig, 1930. 8°.
- LEONE S. — Profili del trauma e visiva nelle provincie di Agrigento, Catania, Enna, Messina, Ragusa, Siracusa, Catanzaro, 1929-1930. Siracusa, 1930, 4°, pp. 1-20, 1-28, 1-14, 1-18, 1-14, 1-20, -11.
- LUMÈRE A. — Tuberculose, contagion, hérédité. Lyon, 1930. 8°, pp. 1-xv, 1-11.
- LUTTEN W. J. — On the systematic and accidental Errors of modern triconometric Parallaxes. (Reprinted from the « *Proceedings of the National Academy of Sciences* ». Vol. XVI, N. VII, pp. 464-473, 1930). s. d. t. 8°.
- LOREN N. — Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris, 1930. 8°, pp. 1-xi, 1-327.
- MAROTTA D. — Atti del III Congresso nazionale di Chimica pura ed applicata. Firenze e Toscana 26 maggio-1 giugno 1929. Roma, 1930. 8°, pp. 1-350.
- MENGOZZI C. e RUSSO G. — Contributo alla conoscenza della Mirmecofauna della Repubblica Dominicana (Antille). (Estr. dal « *Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici* ». Vol. XXVI, pp. 148-173). Portici, 1930. 8°.
- MENGOZZI C. — Insetti dannosi alla barbabietola. Osservazioni ed appunti preliminari (Società entomologica italiana). Genova, 1930. 8°, pp. 1-98.
- Natka Polska jej Potrzeby, Organizacja i Rozwoj. Vol. XIII. Warszawa, 1930. 8°, pp. 1-ix, 1-279.
- NIEMIENSKI H. F. and BRENDER A. BRANDIS G. A. — Three new Genera and five new Species of parasitic Crustacea. (From the « *Proceedings of the United States National Museum* ». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-9.
- NORLUND N. E. — Rapport sur les travaux géodésiques exécutés de 1927 à 1930. (Institut géodésique Danemark). Copenhague, 1930. 8°, pp. 1-21.
- ONDO G. — Trattato di chimica organica, con 101 incisioni e 52 tavole. Palermo, 1930. 8°, pp. 1-11.
- Ouvres de l'Institut Dzerjinski des Ingénieurs du transport à Moscou. Fasc. XIV. Moscou, 1929. 8°, 1-308.
- PAINCORN P. — Leçons sur la résistance des fluides non visqueux. Paris, 1930. 8°, pp. 1-183.
- PALAZZO L. — Einige Bemerkungen über erdmagnetische Messungen, welche in Feodosija ausgeführt wurden. (Sonderdruck aus der « *Zeitschrift für Geophysik* » Jahrg. 6, Heft. 4-7, Ss. 223-227), s. l. s. d.
- PAOLI G. — Contributo allo studio dei rapporti fra le acacie e le formiche. Estr. dalle « *Memorie della Società entomologica italiana* ». Vol. IX, 1930, pp. 131-195). s. l. 1930. 8°.
- PAOLI G. — Notizie sull'arriccimento del conoide della Somalia italiana. (Estratto dalla « *Rassegna economica delle Colonie* » anno 1930, N. 3-4. Roma, 1930. 8°, pp. 1-15.
- PEARL R. — Alcohol: biological aspects. (Reprinted from the « *Encyclopedia of the Social Sciences* ». 1930. pp. 620-622). s. l. 1930. 8°.
- PEARL R. — A note on the Association of Diseases (Reprinted from « *Science* », 1929, Vol. LXX). s. l. 1929. 8°, 1-4.
- PEARL R. — Changes in the incidence of mortality at advanced ages. (Reprint. from « *Human Biology a record of research* ». Vol. I, N. 4, pp. 558-561). N. York, 1929. 8°.
- PEARL R. — Quotations Cuvier: questions and answers, 1614. (Reprint. from « *Human Biology a record of research* », Vol. II, N. 1, pp. 137-144). York, 1930. 8°.
- PEARL R. — Quotations Dr. John Cross on physiognomy and constitution. (Reprint. from « *Human Biology a record of research* ». Vol. I, N. 1, pp. 427-430). York, 1929. 8°.
- PEARL R. — Quotations John Hunter on appetites and aging. (Reprint. from « *Human Biology a record of research* ». Vol. I, N. 4, pp. 565-571). York, 1929. 8°.
- PEARL R. — Report of the Director of the Institute for Biological Research IV, 1928-1929. (Reprinted from « *Report of the President of the University, 1928-29* ». The Johns Hopkins University Circular.

- Number 407, 1929). s. l. 1929. 8°, pp. 1-15.
- PEARL R. — Requirements of a Proof that natural selection has altered a race. (Extr. de «Scientia», 1930, pp. 175-186). Milano, 1930. 8°.
- PEARL R. — Some aspects of the Biology of human populations. (Reprinted from «Human Biology and racial Welfare», pp. 515-552, 1930). New York, 1930. 8°.
- PEARL R. — Statistical report on the second year's operations of the Bureau for contraceptive Advice. (Reprinted from «Second Report of the Bureau for contraceptive Advice», 1930). Baltimore, 1930. 8°, pp. 1-10.
- PICARD E. — Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles. Fasc. V. Paris, 1930. 8°, pp. 1-271.
- POINCARÉ H. — Œuvres publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par P. Appel. Tome I. Paris, 1928. 4°, pp. 1-379.
- Recueil consacré à la mémoire de THÉOPHILE JANOVSKY, membre de l'Académie. Kijiv, 1930. 8°, pp. 1-LXIV, 1-786.
- Relazione della Commissione d'indagini per la spedizione polare dell'aeronave «Italia». (Ministero della Marina). Roma, 1930. 4°, pp. 1-138.
- Ricerche eseguite nell'Istituto di patologia generale ed istologia della R. Università di Pavia negli anni 1928-1929. Pavia, 1930. 8°.
- Ricerche degli allievi dell'Istituto Zoologico della R. Università di Bologna. Bologna, 1920-1930. 8°.
- ROMANELLI P. — Le vestigia del passato. (Monumenti e scavi). Ministero delle Colonie. Anno 1930. Roma, 1930. 8°, pp. 1-127.
- RUSSO G. — Descrizione di Chalcididae galigeno nov. gen. e nov. sp. di Cuba (Antille). (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXIV, pp. 132-139). Portici, 1930. 8°.
- RUSSO G. — Contributo alla conoscenza dei Cerambycidae (Coleoptera) della Rep. Dominicana (Antille) con descrizione di una nuova specie. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXIV, pp. 139-147). Portici, 1930. 8°.
- SHOEMAKER C. R. — The Lysianassid Amphipod Crustaceans of Newfoundland, Nova Scotia, and New Brunswick in the United States National Museum. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. 1-19.
- SILVESTRI F. — Aparato para recolección de pequeños artrópodos. (Extrado de las «Conferencias y reseñas científicas» de la Real Sociedad Española de Historia natural. Tomo V, num. I, pp. 11-13). Madrid, 1930. 8°.
- SMITH S. — The effect of low temperatures on the sensitivity of radiometers. (Reprinted from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XVI, pp. 373-376). Washington, 1930. 8°.
- Statistica dei beni silvo-pastorali delle provincie di Torino ed Aosta. (R. Accademia di Agricoltura di Torino). Torino, 1929. 8°, pp. 1-145.
- STEGAGNO G. — Il veronese Giovanni Arduino e il suo contributo al progresso della scienza geologica. Opera pubblicata sotto gli auspici del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Verona, 1929. 8°, pp. 1-39, tav. IX.
- STEVENS N. E. — A method of testing the keeping quality of certain small fruits. (Reprinted from «Phytopathology». Vol. XIX, pp. 593-596). Washington, 1929. 8°.
- STEVENS N. E. — A possible Aid in Forecasting the keeping Quality of the Cranberry Crop. (Reprinted from the «Wareham Courier»). s. l. d.
- STEVENS N. E. — Botryosphaeria and Phyllosticta in the Hawaiian Islands. (Reprinted from «Mycologia». Vol. XXI, pp. 313-320). s. l. 1929. 8°.
- STEVENS N. E. — Brevity at botanical Banquets. (Reprinted from «Science», 1926. Vol. LXIV). Washington, 1926. 8°, pp. 1-3.
- STEVENS N. E. — Dean Inge on the relation between Science and Religion

- to-day. (Reprinted from « Science ». Vol. LXIII, 1926, pp. 281-282). Washington, 1926. 8°.
- STEVENS N. E. — Environmental Temperatures of Fungi in Nature. (Reprinted from the « American Journal of Botany ». Vol. IX, pp. 385-390). Washington, 1922. 8°.
- STEVENS N. E. — Field Observations on false Blossom of the cultivated Cranberry. (Reprinted from « Phytopathology ». Vol. XV, pp. 85-91). s. l. 1925. 8°.
- STEVENS N. E. — Notes on Cranberry Fungi in Massachusetts. (Reprinted from « Phytopathology ». Vol. XIV, pp. 101-107). sl. 1924. 8°.
- STEVENS N. E. — Occurrence of the currant Cane blight Fungus on numerous Hosts in the Southern States. (Reprinted from « Mycologia ». Vol. XVIII, 1926, pp. 278-282). Washington, 1926. 8°.
- STEVENS N. E. — Occurrence of the currant Cane blight Fungus on other Hosts. (Reprinted from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXVII, pp. 837-843). Washington, 1924. 8°.
- STEVENS N. E. — Physalospora Malorum on currant. (Reprinted from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXVIII, pp. 583-587). Washington, 1924. 8°.
- STEVENS N. E. — Rots of early Strawberries in Florida and Southern California. (Reprinted from the « American Journal of Botany ». Vol. IX, pp. 204-211). Washington, 1922. 8°.
- STEVENS N. E. — Some Observations on the relation of Weather to the keeping Quality of the Cranberry Crop. s. l. s. d. pp. 1-7.
- STEVENS N. E. — Storage Rots of Granberries in the 1927 Grop. (Reprinted from « Phytopathology ». Vol. XVIII, pp. 809-814). s. l. 1928. 8°.
- STEVENS N. E. — The excessive Politeness of American Botanists. (Reprinted from « Science ». Vol. LXI, 1925, pp. 656-657). Washington, 1925. 8°.
- STEVENS N. E. — The life history and relations of Diplodia Gossypina. (Reprinted from « Mycologia ». Vol. XVII, 1925, pp. 191-201). s. l. s. d.
- STEVENS N. E. — The literature of plant Pathology and the Plant industry Catalog. (Reprinted from « Phytopathology ». Vol. XV, pp. 722-724). Washington, 1925. 8°.
- STEVENS N. E. — The Rhizoctonia Brown rot and other Fruit rots of Strawberries. (Reprinted from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXVIII, pp. 643-648). Washington, 1925. 8°.
- STEVENS N. E. — Two Species of Physalospora on Citrus and other Hosts. (Reprinted from « Mycologia ». Vol. XVIII, pp. 206-217). s. l. 1926. 8°.
- STEVENS N. E. — Universal and « Provincial » Figures of Speech in the old Testament. (Reprinted « Methodist Review », pp. 427-435). sl. sd.
- STEVENS N. E. and BAIN H. T. — Storage rots of Cranberries in the 1926 Grop. (Reprinted from « Phytopathology », 1927, Vol. XVII, pp. 649-655). sl. 1927. 8°.
- STEVENS N. E. and BAIN T. B. — Storage rots of Cranberries in the 1928 Grop. (Reprinted from « Phytopathology ». Vol. XIX, pp. 1037-1039). Washington, 1929. 8°.
- STEVENS N. E. and SAWYER W. H. — The Distribution of Cranberry false Blossom. (Reprinted from « Phytopathology ». Vol. XVI, pp. 223-227). Washington, 1925. 8°.
- STEVENS N. E. and WILCOX M. S. — The Citrus Stem-end Rot « Diplodia » its life history and relation to Sphaeropsis Malorum. (Reprinted from « Phytopathology », Vol. XV, pp. 332-340). s. l. 1925. 8°.
- The Science Society of China. Its ideals, organization, and present state of development. s. l. 1929. 8°, pp. 1-4.
- The Seismological Stations Kobenhavn and Scoresby-Sund. (Geodætisk Institut Danmark). Copenhagen, 1930. 4°, pp. 1-32.
- ULRICH E. O. — Ordovician Trilobites of the family Telephidae and concerned stratigraphic correlations. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 76). Washington, 1930. 8°, pp. 1-101.
- VECCHI A. — Ricerche di Zoologia. (Istituto zoologico della R. Università di Bologna). Pavia, 1920-1930. 8°.

VECCHI A. — Elementi scientifici di avicoltura. (Stazione sperimentale di pollicoltura di Rovigo). Bologna, 1929. 8°, pp. I-X, 1-269.

WILLIAM J. S. and LOCKYER M. A. — Monochromatic images of the Orion nebula. (Reprinted from the «Monthly Notices

of the Royal astronomical Society ». Vol. XC, pp. 580-588). Edinburgh, 1930. 8°.

ZANOLINI C. e BORAGGINE G. — Sunto storico monografico della Società agraria di Bologna dall'anno 1807 all'anno 1927. Bologna, 1929. 8°, pp. I-CLXXXVII, 1-116.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 16 novembre 1930 (anno IX)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Espressione generale dei tensori isotropi.* Nota di MARIA PASTORI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

In una Nota precedente ⁽²⁾, estendendo dei risultati recenti del professore Cisotti ⁽³⁾, ho determinato le proprietà delle componenti di un qualunque tensore isotropo di una varietà euclidea.

Nella presente dò una rappresentazione del più generale tensore isotropo di una varietà euclidea, ed estendo definizione e rappresentazione di tensori isotropi alle varietà riemanniane.

I. — TENSORI ISOTROPI DI VARIETÀ EUCLIDEE.

Consideriamo un tensore m^{plo} isotropo di una varietà euclidea ad n dimensioni ed indichiamone con T_{i_1, i_2, \dots, i_m} ($i_1, i_2, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n$) le componenti in coordinate cartesiane ortogonali. Per la prima proprietà ⁽⁴⁾ m deve essere pari: potremo quindi porre $m = 2k$ con k intero positivo; inoltre gli indici si distribuiscono in gruppi di 2, 4, \dots , ecc. elementi tutti eguali, essendo gli elementi di uno stesso gruppo indici consecutivi o no ⁽⁴⁾.

Per la seconda e la terza proprietà, le componenti distinte linearmente indipendenti saranno al massimo in numero di $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k - 1)$ ⁽⁵⁾.

(1) Nella seduta del 16 novembre 1930.

(2) *Sui tensori isotropi: relazione fra le componenti*, questi «Rendiconti», serie 6^a, vol. XII, 2° sem. 1930, pp. 374-379.

(3) *Tensori isotropi*, questi «Rendiconti», serie 6^a, vol. XI, 1° sem. 1930, pp. 727-731; *Tensori isotropi e tensori emisotropi*, ibid., pp. 917-920; *Tensori quadrupli isotropi*, ibid., pp. 1055-1058.

(4) M. PASTORI, loc. cit., n. 1.

(5) M. PASTORI, loc. cit., nn. 2 e 3.

Indicando con δ_{ik} l'unità se $i = k$ e lo zero se $i \neq k$, potremo porre;

$$(1) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2k-1} i_{2k}}$$

dove le A_{α} sono arbitrarie funzioni delle coordinate, invarianti per ogni loro trasformazione, e la sommatoria del secondo membro è estesa a quelle permutazioni degli indici $i_1 i_2 \dots i_{2k}$ che si ottengono nel modo seguente:

a) si formino le combinazioni a 2 a 2 degli indici medesimi, b) si considerino le $\delta_{i_p i_q}$ le cui coppie di indici sono quelle delle combinazioni formate, c) si combinino tali $\delta_{i_p i_q}$ a k a k in modo che in ciascuna di queste ultime combinazioni nessun indice sia ripetuto.

È facile constatare che il numero N_{2k} dei termini della sommatoria del secondo membro della (1) è appunto $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k - 1)$. È infatti evidentemente $N_2 = 1$, $N_4 = 3$, ed in generale $N_{2s} = (2s - 1) N_{2s-2}$, perchè, fissato un indice, ad esempio i_1 , ci sono $2s - 1$ combinazioni di classe 2 che lo contengono, e ciascuna di esse andrà combinata, nel modo sopra indicato, con gruppi di combinazioni di classe 2 dei rimanenti $2s - 2$ indici.

Dall'ultima formola ricorrente si ricava appunto l'espressione scritta per N_{2k} .

Si verificano pure facilmente le tre proprietà delle componenti cartesiane ortogonali dei tensori isotropi⁽¹⁾ sulle formole (1). Se $k \leq n$ esisteranno componenti con k gruppi di due indici eguali, ciascuna delle quali eguaglierà una A_{α} , mentre quelle contenenti gruppi di almeno quattro indici tutti eguali saranno somme di tutte o parte delle precedenti conformemente alla terza proprietà⁽²⁾. Se $k > n$ ogni componente conterrà almeno un gruppo di 4 indici tutti eguali e sarà quindi somma di almeno 3 delle A_{α} , e fra le componenti distinte si verificheranno soltanto relazioni del tipo della (7) della Nota precedente⁽³⁾.

In particolare per $k = 1$ e $k = 2$ le (1) coincidono con le espressioni date dal prof. Cisotti⁽⁴⁾; per $k = 3$ si ha, sviluppando la (1):

$$\begin{aligned} T_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} = & A_1 \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{i_5 i_6} + A_2 \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_5} \delta_{i_4 i_6} + A_3 \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_6} \delta_{i_4 i_5} + \\ & + A_4 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{i_5 i_6} + A_5 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_5} \delta_{i_4 i_6} + A_6 \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_6} \delta_{i_4 i_5} + A_7 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \delta_{i_5 i_6} + \\ & + A_8 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_5} \delta_{i_3 i_6} + A_9 \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_6} \delta_{i_3 i_5} + A_{10} \delta_{i_1 i_5} \delta_{i_2 i_3} \delta_{i_4 i_6} + A_{11} \delta_{i_1 i_5} \delta_{i_2 i_4} \delta_{i_3 i_6} + \\ & + A_{12} \delta_{i_1 i_5} \delta_{i_2 i_6} \delta_{i_3 i_4} + A_{13} \delta_{i_1 i_6} \delta_{i_2 i_3} \delta_{i_4 i_5} + A_{14} \delta_{i_1 i_6} \delta_{i_2 i_4} \delta_{i_3 i_5} + A_{15} \delta_{i_1 i_6} \delta_{i_2 i_5} \delta_{i_3 i_4}. \end{aligned}$$

Per le formole che legano le componenti cartesiane ortogonali di un tensore qualunque alle componenti in coordinate curvilinee generali, si hanno, per le componenti covarianti di un tensore isotropo, le seguenti espressioni:

$$(2) \quad T'_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \dots a_{i_{2k-1} i_{2k}}$$

(1) M. PASTORI, loc. cit., nn. 1, 2, 3.

(2) M. PASTORI, loc. cit., n. 3.

(3) M. PASTORI, loc. cit., n. 3.

(4) U. CISOTTI, secondo loc. cit., n. 2, e terzo loc. cit., n. 5.

dove le $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ sono i coefficienti dell'elemento lineare della varietà, e la sommatoria del secondo membro ha lo stesso significato che nella (1).

2. - TENSORI ISOTROPI DI VARIETÀ RIEMANNIANA.

Consideriamo in una varietà riemanniana ad n dimensioni, un'ennupla di congruenze ortogonali di parametri λ^k e momenti $\lambda_k(i, k, j = 1, 2, \dots, n)$.

È noto che le componenti intrinseche di un tensore m^{vo} , ottenuto saturandone gli indici di covarianza e di controvarianza rispettivamente mediante i parametri e i momenti dell'ennupla, sono invarianti per una sostituzione di coordinate, e si mutano, per un mutamento dell'ennupla in un'altra, pure ortogonale,

$$\lambda'^k = \lambda^k c_{ij}$$

nel modo seguente:

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_m} = T_{j_1 j_2 \dots j_m} c_{i_1 j_1} c_{i_2 j_2} \dots c_{i_m j_m}$$

dove le $c_{i_r j_r}$ sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale.

Le considerazioni fatte nella Nota precedente si potranno quindi ripetere sostituendo alle componenti cartesiane ortogonali di un tensore di una varietà euclidea, le componenti intrinseche ortogonali di un tensore di una varietà riemanniana.

Viene quindi spontaneo di definire *tensore isotropo* di una varietà riemanniana un tensore le cui componenti intrinseche ortogonali sono invarianti (oltre che per un cambiamento di coordinate), anche per un cambiamento dell'ennupla.

Perciò le componenti intrinseche (ortogonali) di un tensore isotropo di una varietà riemanniana eguaglieranno le (1).

Tenendo conto poi delle formole che legano le componenti intrinseche di un tensore con le sue componenti covarianti:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_m} = T_{j_1 j_2 \dots j_m} \lambda_{i_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_m}$$

e delle formole:

$$\lambda_i \lambda_k = a_{ik},$$

si trovano ancora, per le componenti covarianti di un tensore isotropo, le (2).

Osserviamo infine che le (1) possono anche essere interpretate come componenti miste di un tensore isotropo di una varietà riemanniana ad indici alternativamente di covarianza e di controvarianza⁽¹⁾. Basta infatti ricor-

(1) Tali componenti miste sono quindi indipendenti dal sistema di coordinate scelto.

dare le formole che legano le componenti covarianti $T_{i_1 i_2 \dots i_{2k}}$ a tali componenti miste:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k}}^{i_1 i_2 \dots i_{2k}} = T_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k}} a^{i_1 i_2 \dots i_{2k}} a_{i_1 i_2 \dots i_{2k}}$$

ed applicare le (2), tenendo conto che $a_k^i = \delta_{ik}^{(1)}$.

Matematica. — *Sulle coordinate geodetiche.* Nota⁽²⁾ di V. HLAVATÝ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questa Nota vogliamo esporre qualche considerazione concernente il « teorema di Fermi » sopra le coordinate geodetiche lungo una curva C nello spazio n -dimensionale, dotato di una connessione affine o riemanniana. Questo teorema ci consente di trovare — mediante integrazione — un sistema di coordinate di spazio, per il quale si annullano tutti i coefficienti $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ dell'assegnata connessione. È naturale di domandarsi: quanti coefficienti possono annullarsi mediante sole operazioni algebriche? La soluzione di questo problema ci dà un'interpretazione geometrica del teorema sopra indicato, che se non ha grande importanza, non è però priva di interesse.

In ciò che segue indicheremo in primo luogo la soluzione di un problema più generale di cui un caso particolare ci fornisce il teorema di Fermi.

I.

1. Immaginiamo un'ennupla di vettori controvarianti $u^{(3)}$, linearmente indipendenti, spiccati in ogni punto della C e deduciamone l'ennupla complementare dei vettori covarianti u_a , mediante le posizioni

$$(1) \quad u_a \times u^b = \delta_a^b \quad (4).$$

(1) Osserviamo che, l'imporre alle congruenze di un'ennupla di essere a due a due ortogonali, e cioè l'imporre ai parametri e ai momenti di soddisfare alle condizioni di ortogonalità:

$$\lambda_j^r \lambda_j^s = a_{ij} \lambda_j^r \lambda_j^s = \delta_{rs}$$

equivale ad imporre al tensore fondamentale di avere le componenti intrinseche eguali alle componenti miste. Ciò equivale anche ad imporre che gli elementi reciproci delle λ_j^i nel determinante delle medesime (supposto diverso da zero) eguagliino le componenti covarianti, ottenute dalle λ_j^i per composizione col tensore fondamentale.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 novembre 1930.

(3) Gli indici assumono in generale i valori $1, \dots, n$. Fanno eccezione gli indici p, q , i quali assumono soltanto i valori $2, \dots, n$. Sottointendiamo il simbolo della sommazione secondo un indice muto.

$$(4) \quad \delta_a^b = \delta_a^b = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases}.$$

Designando con D il simbolo della derivazione covariante lungo C e ponendo

$$u^b \times_a D u = -u \times_a D u^b = \Lambda_a^b,$$

si ha

$$(2) \quad D u = \Lambda_a^b u.$$

Le funzioni Λ essendo scalari, esse non dipendono della scelta delle coordinate. Siano allora

$$\xi^a = \varphi^a(t)$$

le equazioni parametriche della C , con $\frac{d\varphi^1}{dt} \neq 0$. Ne possiamo dedurre

$$t = \psi(\xi^1).$$

Nel sistema (x) delle coordinate

$$'x^1 = \psi(\xi^1), \quad 'x^p = \xi^p - \varphi^p(\xi^1), \quad p = 2, \dots, n$$

le equazioni della curva C si presentano sotto la forma

$$(3) \quad 'x^a = \delta_1^a t.$$

Siano $'u^a = f^a(t)$, $'u_b = f_b(t)$ le componenti dei vettori sopra indicati nel sistema (x) e sia di più

$$(4) \quad 'u_1^a = \frac{d'x^a}{dt} = \delta_1^a.$$

Ne segue subito secondo (1)

$$(5) \quad 'u_1^a = \delta_1^a = f_1(t).$$

2. Ciò premesso, introdurremo il sistema (x^*) delle coordinate x^* , definite dalle posizioni

$$(6) \quad {}^*x^a = 'x^b f_b^a('x^1).$$

Poichè si ha in un punto generico dello spazio ambiente

$$\frac{\partial {}^*x^a}{\partial 'x^b} = f_b^a('x^1) + 'x^c \frac{\partial}{\partial 'x^b} f_c^a('x^1),$$

ne segue in particolare nei punti di C , secondo (3) e (5),

$$\frac{\partial {}^*x^a}{\partial 'x^b} = f_b^a(t) = 'u_1^a,$$

cosicchè il determinante funzionale delle (6) è diverso da zero lungo C (e per conseguenza anche in ogni punto generico dello spazio ambiente). Designando con ${}^*u^a$, ${}^*u^a_b$ le componenti dei vettori $\overset{a}{u}$, $\overset{a}{u}_b$ nel sistema $({}^*x)$, otteniamo lungo C

$$(7) \quad {}^*u^a_c = \frac{\partial {}^*x^a}{\partial {}^*x^b} {}^*u^b_c = \delta^a_c, \text{ donde segue } {}^*u^a_c = \delta^a_c.$$

Vale la pena di rilevare la forma delle equazioni della C nel sistema $({}^*x)$

$${}^*(3) \quad {}^*x^a = \delta^a_t.$$

3. Immaginiamo allora un nuovo sistema (x') di coordinate, definite mediante

$$(8) \quad x'^a = {}^*x^a + \frac{1}{2} {}^*x^b {}^*x^c X^a_{bc} ({}^*x^t),$$

colle funzioni $X^a_{pq} = X^a_{pq}$ arbitrarie. Ne segue per le equazioni parametriche della C nel sistema (x')

$$(3') \quad x'^a = \delta^a_t.$$

Si ha allora lungo C

$$(9) \quad \frac{\partial x'^a}{\partial {}^*x^b} = \delta^a_b = \frac{\partial {}^*x^a}{\partial x'^b}, \quad \frac{\partial^2 x'^a}{\partial {}^*x^b \partial {}^*x^c} = \delta^a_b \delta^a_c X^a_{bc}.$$

Ora designando con u'^a , u'^a_b le componenti dei vettori $\overset{a}{u}$, $\overset{a}{u}_b$ nel sistema (x') abbiamo lungo C secondo (9) e (7)

$$(10) \quad u'^a_b = \frac{\partial x'^a}{\partial {}^*x^c} {}^*u^c_b = \delta^a_b,$$

e per conseguenza anche

$$(10)' \quad u'^a_b = \delta^a_b.$$

Se si designano con ${}^*\Gamma^a_{bc}$ resp. Γ'^a_{bc} i coefficienti della connessione nel sistema $({}^*x)$, resp. (x') valgono notoriamente le relazioni

$$(12) \quad {}^*\Gamma^a_{bc} = \frac{\partial {}^*x^a}{\partial x'^d} \left(\frac{\partial x'^c}{\partial {}^*x^b} \frac{\partial x'^f}{\partial {}^*x^c} \Gamma'^d_{ef} + \frac{\partial^2 x'^d}{\partial {}^*x^b \partial {}^*x^c} \right).$$

(1) Si veda nota 3 in p. 502.

Allora ponendo lungo C

$$(13) \quad a) \quad {}^* \Gamma_{bc}^a = {}^* F_{bc}^a(t) \quad ; \quad b) \quad \Gamma_{bc}'^a = F_{bc}'^a(t)$$

si ha secondo (9) lungo C

$$(14) \quad {}^* F_{bc}^a = F_{bc}'^a + \delta_b^c \delta_c^a X_{pq}^a.$$

Essendo $\Lambda_{bc}^a(x')$ funzioni arbitrarie, comunque assegnate, possiamo scegliere le funzioni X in tal modo che risulti nei punti di C

$$F_{pq}'^a = (\Lambda_{pq}^a)_C = L_{pq}'^a(t).$$

A tale scopo basta porre

$$X_{pq}^a(t) = {}^* F_{pq}^a - L_{pq}'^a.$$

D'altra parte segue dalle (2), (10) e (13)

$$D u_b'^a = \Lambda_b^a = \frac{d u_b'^a}{dt} + \Gamma_{bc}^a u_c'^b = F_{b1}^a.$$

Abbiamo così dimostrato il teorema:

Essendo data una curva generale C, possiamo trovare mediante sole operazioni algebriche un tal sistema (x') di coordinate, nel quale valgono lungo C le formule

$$(15) \quad a) \quad \Gamma_{pq}'^a = L_{pq}'^a \quad b) \quad \Gamma_{b1}'^a = \Lambda_b^a$$

colle funzioni $L_{pq}'^a(t)$ arbitrariamente prefissate.

L'ennupla dei vettori u essendo in un certo grado arbitraria, nè tali possono considerarsi anche i valori Γ_{b1}^a .

4. Vogliamo ora mostrare, come possono attribuirsi i valori arbitrarii $L_{bc}^a(t) = L_{cb}^a(t)$ a tutti i coefficienti della connessione mediante integrazioni. A tale scopo introdurremo gli integrali del sistema

$$(16) \quad \frac{d}{dt} P_b^a = -L_{dc}^a P_1^c P_b^d + \Lambda_b^c P_c^a,$$

supponendo scelte le funzioni L_{dc}^a in tal modo, che il determinante P del sistema P_b^a risulti diverso da zero ⁽¹⁾, e introdurremo nuove coordinate x, definite dalle posizioni

$$(17) \quad x^a = \int P_1^a(x'^1) dx'^1 + x'^2 P_2^a(x'^1) + \\ + x'^3 x'^2 x'^1 (L_{pq}'^a(x'^1) P_p^a(x'^1) - L_{bc}'^a(x'^1) P_p^b(x'^1) P_q^c(x'^1)).$$

(1) Si mostra facilmente l'esistenza del sistema $L_{bc}^a \neq 0$ per il quale $P \neq 0$. Essendo $L_b^a(t) \neq 0$ un sistema arbitrario di funzioni, per il quale

Ne segue lungo C secondo (3')

$$(18) \quad \frac{\partial x^a}{\partial' x^b} = P_b^a,$$

cosicchè il determinante funzionale delle (17) è diverso da zero lungo C. Si ha anche, sempre lungo C

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^a}{\partial' x^b \partial' x^c} &= \delta_b^i \frac{d}{dt} P_c^a + \delta_c^i \frac{d}{dt} P_b^a - \delta_b^i \delta_c^i \frac{d}{dt} P_i^a + \\ &+ \delta_b^p \delta_c^q (F_{pq}^d P_d^a - L_{bc}^a P_p^b P_q^c), \end{aligned}$$

e tenendo conto dalle (16) nonchè dalle (15 b) ne dedurremo lungo C

$$(19) \quad \frac{\partial x^a}{\partial' x^b \partial' x^c} = P_d^a F_{bc}^{d'} - P_b^d P_c^e L_{de}^a.$$

Designando con Γ_{bc}^i i coefficienti dell'assegnata connessione nel sistema (x) si ha notoriamente

$$(20) \quad \Gamma_{bc}^a \frac{\partial x^b}{\partial x'^d} \frac{\partial x^c}{\partial x'^e} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^g} \Gamma_{de}^g - \frac{\partial x^a}{\partial x'^d \partial x'^e}.$$

Sostituendo i valori (13 b), (18), e (19) si ottiene allora lungo C

$$\Gamma_{ef}^a P_b^e P_c^f = L_{ef}^a P_b^e P_c^f.$$

Il determinante del sistema P_b^a è diverso da zero, perciò le ultime relazioni sono equivalenti alle

$$\Gamma_{bc}^a = L_{bc}^a.$$

Data una curva generale C, si può sempre trovare, mediante integrazione di un sistema differenziale ordinario, un sistema di coordinate, nel quale i coefficienti

$$L_{ab}^a = \Lambda_a^a,$$

il determinante P della soluzione del sistema differenziale

$$\frac{d}{dt} P_b^a = -L_d^a P_b^d + \Lambda_b^d P_d^a$$

è diverso da zero (perchè si ha

$$\frac{d}{dt} \log P = -(\Lambda_a^a - \Lambda_a^a))$$

e per conseguenza, ogni soluzione L_{bc}^a ($\neq 0$) delle equazioni

$$L_b^a = L_{bc}^a P_c^i$$

ci fornisce, secondo (16), un sistema P_b^a con determinante P, diverso da zero.

della connessione hanno i valori prefissati $L_{bc}^a(t) = L_{cb}^a(t)$, assegnabili arbitrariamente sotto la sola condizione che il determinante degli integrali del sistema (16) sia diverso da zero.

Un caso particolare nelle possibili scelte delle funzioni L è per esempio

$$L_{bc}^a = 0$$

in cui il nostro teorema si riduce a quello di Fermi.

Osservazione: Essendo Q^a un sistema di n funzioni delle coordinate x' , le quali sieno almeno di terzo grado ed omogenee nelle x'^p (1), i coefficienti della connessione in sistema delle coordinate

$$\bar{x}^a = x^a + Q^a$$

hanno anche gli stessi valori L_{bc}^a lungo C . Ne segue che il sistema delle coordinate, nel quale i coefficienti della connessione hanno i valori prefissati lungo C può essere definito in infiniti modi. Una volta, che si abbia un tale sistema, tutti gli altri possono essere trovati senza integrazione.

II.

In alcuni recenti lavori è stato ripreso in considerazione il teorema di Fermi nello spazio n -dimensionale, dotato della connessione riemanniana. Da una parte questo teorema serve come base per lo studio delle leggi diverse di trasporto (2). D'altra parte è naturale di domandarsi quale è carattere intrinseco delle coordinate di Fermi; questione codesta studiata e risolta da Bortolotti (3).

Qui vogliamo darne un'altra applicazione geometrica, studiando il significato delle curvature (metriche) della C per la costruzione delle coordinate geodetiche lungo C .

1. Supponiamo adesso che la connessione sia riemanniana. In tal caso i suoi coefficienti si riducono ai simboli di Christoffel, spettanti ad un tensore $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ assegnato, di rango n . Senza restringere la generalità supporremo che u sia il versore (4) tangente dell'assegnata curva C . Se tutte le

(1) Si veda la nota 3 in p. 502.

(2) E. BORTOLOTTI, *Leggi di trasporto nei campi di vettori applicati ai punti di una curva o di una V_m in V_n riemanniana*, «Memorie della R. Accademia di Bologna», t. VII (1930), pp. 11-20.

Pia NALLI, *Spostamenti rigidi e derivazioni generalizzate*, questi «Rendiconti», vol. X (1929), pp. 565-569; vol. XI (1930), pp. 265-268; *Sui simboli di Riemann e sulla rappresentazione conforme*, «Bollettino della Unione Matematica Italiana», (1929) pp. 129-132; *Sul parallelismo e le coordinate geodetiche*, ib., (1929), 233-235).

(3) E. BORTOLOTTI, *Sulle coordinate geodetiche lungo una linea*, questi «Rendiconti», vol. X (1929), pp. 486-492, 544-548. Devo ringraziamenti cordialissimi al prof. Levi-Civita, il quale mi ha segnalato questi studi.

(4) Tale supposizione esige - secondo (4) - che t sia l'arco metrico della curva, il che vogliamo sempre sottointendere.

curvature metriche di C , cioè $\underset{1}{k}, \underset{2}{k}, \dots, \underset{m-1}{k}$ sono diverse da zero, i vettori $\underset{1}{u}$ possono essere scelti come versori normali, cosicchè le equazioni (2) diventano

$$(21) \quad D \underset{a}{u} = - \underset{a-1}{k} \underset{a-1}{u} + \underset{a+1}{k} \underset{a+1}{u}^{(1)}, \quad (k = \underset{0}{k} = \underset{n}{k} = 0)$$

il che vale a dire

$$(22) \quad \Lambda_{\alpha}^{\beta} = - \Lambda_{\beta}^{\alpha} = - \delta_{\alpha-1}^{\beta} \underset{\beta}{k} \quad (\text{senza sommazione}).$$

Ponendo ancora $L_{\alpha}^{\alpha} = L_{\alpha}^{\alpha} = 0$, le equazioni (15) ci danno lungo C

$$(15'') \quad a) \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = 0, \quad b) \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = - \underset{\beta}{k} \delta_{\alpha-1}^{\alpha} = - \Gamma_{\alpha-1}^{\alpha}, \quad (\text{senza sommazione})$$

e questi valori possono trovarsi mediante sole operazioni algebriche. Ne segue per il sistema differenziale, il quale definisce lo spostamento per parallelismo (nel senso di Levi-Civita) lungo C

$$(23) \quad \frac{dv_{\alpha}}{dt} = v_{\alpha+1} \underset{\alpha}{k} - v_{\alpha-1} \underset{\alpha-1}{k}, \quad \frac{dv^{\alpha}}{dt} = v^{\alpha-1} \underset{\alpha}{k} - v^{\alpha+1} \underset{\alpha+1}{k}.$$

D'altra parte, sostituendo i valori (15' b) nonchè $L_{\alpha}^{\alpha} = 0$ nelle (16) otteniamo

$$(24) \quad \frac{dP_{\alpha}}{dt} = P_{\alpha+1} \underset{\alpha}{k} - P_{\alpha-1} \underset{\alpha-1}{k}$$

e confrontando le (23) colle (24) vediamo che gli integrali del sistema (24) — cioè del sistema particolare (16) — sono formati dalle componenti (covarianti o controvarianti) degli n -vettori linearmente indipendenti, spostati per parallelismo lungo C . Se le curvature k sono tutte costanti, $= 0$, l'integrazione di questo sistema non esige che operazioni algebriche. Dunque:

Se le curvature di C sono tutte costanti, $= 0$, la costruzione delle coordinate, nelle quali si annullano i simboli di Christoffel lungo C non esige che operazioni algebriche e le n quadrature $\int P_1^{\alpha}(x'^1) dx'^1$.

2. Supponiamo adesso che una delle curvature, p. e. $\underset{m}{k}$ ($m < n$) sia la prima delle curvature $\underset{1}{k}, \dots, \underset{m-1}{k}$ uguale a zero. In tal caso esistono le formule (21) con $\underset{0}{k} = \underset{m}{k} = \underset{n}{k} = 0$, ma $\underset{m}{u}$ è un versore qualsiasi, perpendicolare ai versori $\underset{1}{u}, \dots, \underset{m-1}{u}$, mentre $\underset{m+1}{u}, \dots, \underset{n}{u}$ sono versori normali della congruenza $\underset{m-1}{u}$ e $\underset{m}{k}, \dots, \underset{n}{k}$ sue curvature⁽²⁾.

(1) STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differenzialgeometrie...*, (Berlin, 1922), p. 76.

(2) HLAVATÝ, *Complementi al teorema di riduzione dei sistemi differenziali ortogonali*, « Rendiconti Acc. Lincei », VI (1927), pp. 584-590 (p. 588).

Le equazioni (15) diventano allora

$$(15'') \quad \Gamma'_{pq}{}^a = 0 \quad , \quad \Gamma'_{a1}{}^b = -\Gamma'_{b1}{}^a = -\delta_{a-1}^b k; \\ (k = k_0 = k_m = k_n = 0), \text{ senza sommazione}.$$

Se, in particolare $m = 1$, la curva è geodetica. Vale la pena di rilevare due casi particolari

a) $n = 2$, $m = 1$. In tal caso si ha secondo (15'')

$$\Gamma'_{bc}{}^a = 0$$

e per conseguenza tutti i simboli di Christoffel di una superficie possono annullarsi lungo una sua geodetica mediante sole operazioni algebriche.

b) $n = 3$, $m = 1$. In tal caso il sistema (24) si riduce al

$$\frac{dP_1}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dP_2}{dt} = P_3 k \quad , \quad \frac{dP_3}{dt} = -P_2 k, \quad (k = k_2)$$

cogli integrali

$$P_1^3 = \text{cost.} \quad , \quad P_2^3 = -\cos \int k dt \quad , \quad P_3^3 = \sin \int k dt$$

$$P_1^2 = \text{cost.} \quad , \quad P_2^2 = \sin \int k dt \quad , \quad P_3^2 = \cos \int k dt$$

$$P_a^1 = \delta_a^1$$

e per conseguenza l'annullarsi dei simboli di Christoffel lungo una geodetica dello spazio a tre dimensioni, dotato di connessione riemanniana, non esige che una quadratura.

Matematica. — *Sur la courbure des variétés non-holonomes.* Nota di G. HLAVATÝ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Velocità critiche di masse pesanti su di un binario.*
Nota di G. KRALL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. *Premesse e generalità.* — In una recente Nota in questi « Rendiconti » abbiamo trattato con qualche generalità i fondamenti della dinamica del binario. Ma alla generalità non corrispose allora gran concretezza di risultati.

Convien quindi accostarsi alle circostanze di fatto.

Tra queste la più notevole concerne la determinazione della cosiddetta *velocità critica* di un carico, partendo da schematizzazioni alquanto più precise che non si faccia per il solito. Si tratta in sostanza di ciò: Un carico P in condizioni statiche provoca sotto al suo punto di applicazione uno spostamento w_s . Posto in movimento con velocità uniforme v , raggiunta la stazionarietà, il valore dinamico w_d dello spostamento trasversale vale, in luogo di quello statico w_s ,

$$w_d = \frac{w_s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

In questa relazione c è una velocità limite — evidentemente critica — data da

$$c = \sqrt[4]{\frac{4B\beta}{\mu^2}},$$

dove, con notazioni già adottate, B e β designano il coefficiente di rigidità della rotaia, rispettivamente della fondazione, e μ è la massa dell'armamento per unità di lunghezza.

Introducendo per le suddette costanti dati quali avviene di considerare in pratica, risultano valori per c assai elevati, intorno ai 1000–2000 Km all'ora.

Or invece si osserva come, un binario eseguito ad arte per l'alta velocità, appena questa raggiunga o superi i 250 Km h^{-1} , si trovi in gravi condizioni quanto a stabilità. È ben vero che altre influenze si destano, esaltate dalla velocità stessa, ma sembra comunque che si debba poter giustificare un valore di c di gran lunga inferiore a quello testè assegnato.

Ciò risulta infatti appena si consideri nel fenomeno la massa che — sempre — s'accompagna al carico.

Si presenta allora un problemino meccanico abbastanza interessante di cui ora ci vogliamo occupare.

(1) Nella seduta del 2 novembre 1930.

§ 2. *Masse pesanti mobili con velocità costante. Equazione del moto.* —

Consideriamo una distribuzione di carico $p = p(x)$ mobile di moto rigido con velocità costante $= v$, su di una rotaia di cui le caratteristiche elastiche sono fornite dalle B, β e μ prima nominate.

Come funzione del tempo, una siffatta distribuzione si può rappresentare nella forma

$$p = p(s - vt),$$

la quale esprime evidentemente il suo carattere stazionario per rispetto ad un osservatore mobile con velocità v .

Nella Nota precedente abbiamo stabilita l'equazione del moto della rotaia

$$(1) \quad B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta w = p(x - vt)$$

prescindendo dall'inerzia del carico mobile. Se vogliamo tener conto che, al carico p corrisponde una massa $m = \frac{p}{g}$, dovremo evidentemente sostituire all'equazione (1) la

$$(2) \quad B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta w = p(x - vt) \left\{ 1 - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\}.$$

Tentando una soluzione del tipo

$$w = w(x - vt)$$

convenendo di porre $\zeta = x - vt$, tutto è ridotto a cercare l'integrale dell'equazione differenziale lineare

$$(2a) \quad B \frac{d^4 w}{d\zeta^4} + \mu v^2 \left(1 + \frac{p(\zeta)}{g \cdot \mu} \right) \frac{d^2 w}{d\zeta^2} + \beta w = p(\zeta).$$

Se la distribuzione, ed è questo il caso interessante, si riduce ad un carico concentrato P di massa $\frac{P}{g} = M$, la (2a) prende la forma

$$B \frac{d^4 w}{d\zeta^4} + \mu v^2 \frac{d^2 w}{d\zeta^2} + \beta w \equiv 0$$

per $\zeta \neq 0$, e va integrata con la condizione (comune alle precedenti equazioni) che sia $w = 0$ per $\zeta = \pm \infty$ e che, sotto al carico, cioè in $\zeta = 0$,

vi sia raccordo della linea elastica espresso da $\frac{dw}{d\chi} = 0$, e la w abbia una discontinuità nella derivata terza, tale che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[B \frac{d^3 w}{d\chi^3} \right]_{\chi=0-\varepsilon} - \left[B \frac{d^3 w}{d\chi^3} \right]_{\chi=0+\varepsilon} \right\} = P - M \left[\frac{d^2 w}{d\chi^2} \right]_{\chi=0}$$

ovvero, per evidenti condizioni di simmetria,

$$\left[B \frac{d^3 w}{d\chi^3} \right]_{\chi=0} = \frac{1}{2} \left[P - M \frac{d^2 w}{d\chi^2} \right]_{\chi=0}.$$

Un tale problema si risolve con agilità scegliendo opportunamente le 4 costanti d'integrazione.

Cominciamo a procurarci all'uopo gli integrali di tipo esponenziale.

Posto $w = e^{\lambda \chi}$, l'equazione caratteristica

$$B\lambda^4 + \mu v^2 \lambda^2 + \beta = 0$$

porge subito, ove si ponga

$$\alpha = \sqrt{1 - k} \lambda, \quad = \sqrt{1 + k} \lambda,$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4B}}, \quad k = \frac{v^2}{c^2}, \quad c = \sqrt[4]{\frac{4B\beta}{\mu^2}},$$

$$A_{1,2} = \pm (\alpha + i\gamma) \quad A_{3,4} = \pm (\alpha - i\gamma).$$

Indicando con c, \bar{c}, d, \bar{d} le quattro costanti arbitraie (a due a due complesse coniugate) sarà

$$(3) \quad W = ce^{(\alpha + i\gamma)\chi} + \bar{c}e^{(\alpha - i\gamma)\chi} + d\bar{e}^{(\alpha + i\gamma)\chi} + \bar{d}e^{-(\alpha - i\gamma)\chi}.$$

Passando a valutarle in conformità con le prescritte condizioni, poichè la w sarà simmetrica, consideriamone il ramo nel solo tratto $0, +\infty$.

La condizione $w = 0$ per $\chi = \infty$ porge subito $c = \bar{c} = 0$, mentre la condizione di simmetria $\left[\frac{dw}{d\chi} \right]_{\chi=0} = 0$, associata alla condizione di discontinuità porta a scrivere le due equazioni

$$d(\alpha + i\gamma) + \bar{d}(\alpha - i\gamma) = 0$$

$$d(\alpha + i\gamma)^3 + \bar{d}(\alpha - i\gamma)^3 = \frac{1}{2B} \left\{ P - M[d(\alpha + i\gamma)^2 + \bar{d}(\alpha - i\gamma)^2] \right\}.$$

Risolvendole otteniamo

$$d = \frac{\frac{P}{2B}(\alpha - i\gamma)}{-4\alpha\gamma i(\alpha^2 + \gamma^2) \left(1 - \frac{Mv^2}{4B\alpha} \right)}, \quad \bar{d} = \frac{-\frac{P}{2B}(\alpha + i\gamma)}{-4\alpha\gamma i(\alpha^2 + \gamma^2) \left(1 - \frac{Mv^2}{4B\alpha} \right)}.$$

Introducendo queste determinazioni nella (3) si ricava così in definitiva l'integrale

$$w = \frac{P}{\left(1 - \frac{M\alpha^2}{4B\alpha}\right)} \frac{e^{-\alpha x}}{4B(\alpha^2 + \gamma^2)} \left\{ \frac{1}{\alpha} \cos \gamma x + \frac{1}{\gamma} \sin \gamma x \right\}.$$

Passando a discuterla un momento rileviamo che per $v \rightarrow 0$, w tende alla soluzione statica ben nota

$$w = \frac{P\lambda}{2\beta} e^{-\lambda x} \{ \cos \lambda x + \sin \lambda x \}$$

cui compete, in $x = 0$, lo spostamento massimo

$$w_s = \frac{P\lambda}{2\beta}.$$

Per $M \rightarrow 0$ si ha la soluzione

$$w = \frac{Pe^{-\alpha(x-vt)}}{4B(\alpha^2 + \gamma^2)} \left\{ \frac{1}{\alpha} \cos \gamma(x-vt) + \frac{1}{\gamma} \sin \gamma(x-vt) \right\},$$

dalla quale si deduce lo spostamento massimo in $x = 0$, dunque sotto al carico,

$$(4) \quad w_d = \frac{P\lambda}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \beta} = \frac{w_s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Infine per $M \neq 0$, lo spostamento massimo diviene

$$(5) \quad w_d = \frac{w_s}{\left(1 - \frac{Mv^2}{4B\alpha}\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{w_s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{M}{4B\lambda} v^2}.$$

La velocità critica che per la (4) risulta eguale a c , per la (5) viene assegnata dall'equazione

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{M}{4B\lambda} v^2 = 0.$$

Si ricava da questa

$$c^2 = \frac{\epsilon^2}{2\epsilon^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\epsilon^4}{\epsilon^2}} - \right.$$

essendo

$$\epsilon = \frac{4B\lambda}{M}.$$

Semplificando alquanto si ha anche

$$c^2 = \frac{2B\mu}{M^2} \left(\sqrt{1 + 4 \left(\frac{M\lambda}{\mu} \right)^2} - 1 \right)$$

da cui si vede che, per M molto grande per raffronto a $\mu\lambda^{-1}$ si può anche scrivere

$$c^2 \sim \frac{4B\lambda}{M}.$$

Consideriamo a titolo di apprezzamento un binario per il quale sia $E = 2.10^6 \text{ Kgcm}^{-2}$, $I = 1610 \text{ cm}^4$, $C = 8.00 \text{ Kgcm}^{-3}$, $b_{med} = 30 \text{ cm}$, $\mu g \cong 1.00 \text{ Kgcm}^{-1}$, $g = 980 \text{ cm sec}^{-2}$, $Mg = 5000 \text{ Kg}$. Si ricava, secondo la teoria ordinaria, $c = 2750 \text{ Kmh}^{-1}$ mentre secondo le presenti considerazioni $c \cong 215 \text{ Kmh}^{-1}$.

Meccanica. — *Sur une classe de mouvements centrales.* Nota di N. SAKELLARIOU, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans le périodique grec « Οὐρανία » a été publié par N. Sakellariou l'article suivant: *Sur une propriété de quelque mouvement central*.

« L'on sait que, si un mobile décrit une conique suivant la loi des aires du mouvement central par rapport à un des foyers de la trajectoire, la force Δ est de la forme $\frac{k}{\rho^2}$, ou k représente une constante et ρ la distance du mobile du centre du mouvement au moment qu'on le considère, tandis que k varie avec la trajectoire du mobile. Dans ce qui suit il s'agit de trouver la relation qui relie la force Δ , la distance ρ et la vitesse v du mobile à l'instant t , pour que le mobile décrive une conique, dont un des foyers est le centre du mouvement, en supposant que Δ dépend de deux variables ρ et v .

On sait que s'il s'agit d'un mouvement central attractif vers le centre, on a

$$(1) \quad x'' = -\frac{x}{\rho} \Delta, \quad y'' = -\frac{y}{\rho} \Delta$$

où x, y représentent les coordonnées rectilignes du mobile au moment t et x'', y'' ses dérivées du second ordre par rapport à t . La formule de Bonnet donne $\Delta = k/\rho^2$, k désignant une constante, c'est-à-dire

$$(2) \quad \frac{d}{dt}(\rho^2 \cdot \Delta) = 0.$$

(1) Nella seduta del 16 novembre 1930.

De (2) on trouve, en supposant que $\Delta = \Delta(\rho, v)$, c'est-à-dire fonction des ρ et v :

$$(3) \quad 2\rho\rho'\Delta + \rho^2 \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} \rho' + \rho^2 \frac{\partial \Delta}{\partial v} v' = 0$$

où ρ', v' représentent les dérivées des ρ, v par rapport à t . De l'équation

$$(4) \quad v^2 = x'^2 + y'^2$$

on tire

$$vv' = x'x'' + y'y'',$$

et, à cause de (1),

$$vv' = -\frac{x'x\Delta}{\rho} - \frac{y'y\Delta}{\rho} = -\frac{\Delta}{\rho}(xx' + yy').$$

Mais on a

$$(5) \quad x^2 + y^2 = \rho^2 \text{ et par suite } xx' + yy' = \rho\rho';$$

alors

$$vv' = -\Delta\rho', \quad v' = -\frac{\Delta\rho'}{v}.$$

Ainsi l'équation (3) prend la forme suivante

$$(3') \quad \rho\rho' \left(2\Delta + \rho \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial \Delta}{\partial v} \cdot \frac{\Delta}{v} \right) = 0.$$

Si on pose $\rho' = 0$, on a $\rho = \text{const.}$, c'est à dire la trajectoire est en général une circonférence.

Pour intégrer l'équation différentielle

$$(3'') \quad \rho \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial \Delta}{\partial v} \frac{\Delta}{v} + 2\Delta = 0$$

nous considérons les équations

$$(6) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{v dv}{\rho \Delta} = -\frac{d\Delta}{2\Delta}$$

et nous trouvons pour celles-ci $\rho^2 \Delta = c_1$, $2v dv = \rho d\Delta$.

Mais on a $\Delta d\rho = -v dv$, $2\Delta d\rho = -2v dv$ et par suite

$$-2\Delta d\rho = \rho d\Delta, \text{ ou } 2\rho d\Delta + 2\Delta d\rho = \rho d\Delta = 2v dv$$

$$d(2\rho\Delta) = d(v^2), \quad 2\rho\Delta - v^2 = c_2$$

et l'intégrale de l'équation (3'') est

$$(7) \quad \Phi(\rho^2 \Delta, 2\rho\Delta - v^2) = 0.$$

Réciproquement, si les Δ, ρ, v sont liés par (7), et Δ est une fonction seulement des ρ, v , le mobile décrit une conique dans un mouvement central, tandis que le centre du mouvement est un des foyers. . . ».

*
* *

Dans le même périodique et au numéro suivant a été publié par le même auteur la suite de l'article : *Sur une propriété de quelque mouvement central (suite)*.

« Dans ma Note publiée au numéro précédent (de ce journal) j'ai trouvé l'équation

$$\varphi(\rho^2 \Delta, 2\rho \Delta - v^2) = 0$$

s'il s'agit de mouvement central où le mobile décrit une conique, et si l'on considère que la force dépend de ρ (distance du mobile du centre du mouvement) et v (vitesse).

En effet, si ϵ représente l'excentricité de la trajectoire conique, et si l'équation de sa directrice par rapport aux axes rectangulaires, dont l'origine est le centre du mouvement, est

$$Ax + By + \partial = 0$$

on aura

$$\rho = \epsilon \frac{Ax + By + \partial}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ou en général

$$(1) \quad \lambda x + \mu y + \nu \rho + \sigma = 0$$

tandis que un au moins des A, B est différent de zéro et un au moins des λ, μ, ν , et ceux-ci et σ sont constants par rapport à t . De l'équation dernière on trouve en dérivant par rapport à t

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda x' + \mu y' + \nu \rho' = 0 \\ \lambda x'' + \mu y'' + \nu \rho'' = 0 \\ \lambda x''' + \mu y''' + \nu \rho''' = 0 \end{cases}$$

où les $x', y', \rho'; x'', y'', \rho''; \dots$ représentent les dérivées du 1^{er}, 2^{ème}, . . . ordre des x, y, ρ par rapport à t . À cause de la supposition pour les λ, μ, ν de (1) et (2) on trouve que le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} x' & y' & \rho' \\ x'' & y'' & \rho'' \\ x''' & y''' & \rho''' \end{vmatrix} = 0.$$

Et si ce déterminant est égal à nul, nous aurons une équation $\lambda x' + \mu y' + \nu \rho' = 0$, où λ, μ, ν sont considérés indépendants de t et seulement les x, y, ρ sont fonctions analytiques (comme nous les supposons) de t (voir Bôcher, « Trans. Amer. Math. Soc. », 1901, pp. 139-149). De cette dernière équation on trouve $\lambda x + \mu y + \nu \rho + \sigma = 0$, qui représente une conique. Nous trouvons maintenant les $x''', y''', \rho', \rho'', \rho'''$ des équations $x'' = -\frac{x\Delta}{\rho}, y'' = -\frac{y\Delta}{\rho}, \rho^2 = x^2 + y^2$, où Δ représente la force du mouvement, et en introduisant ces valeurs au déterminant δ , on trouve

$$\delta = -\frac{(xy' - yx')}{\rho^2} (2\rho'\rho''\Delta + \rho\rho''\Delta' + 2\rho'\Delta^2 + \rho\Delta\Delta')$$

où

$$\delta = -\frac{(xy' - yx')^3}{\rho^6} (2\Delta\rho' + \Delta'\rho),$$

et pour qu'il soit égal à nul, il faut et il suffit que $2\Delta\rho' + \Delta'\rho = 0$, où $\frac{d}{dt}(\Delta \cdot \rho^2) = 0$, vu que $xy' - yx'$ a une valeur constante, comme on le voit par l'intégration de l'équation $xy'' - yx'' = 0$.

Alors, nous pouvons supposer la force Δ comme une fonction des ρ et v , comme nous l'avons fait dans notre Note précédente ».

*
* *

Dans le même périodique et au numéro suivant parut une critique des articles précédents publiée par un autre auteur, qui a écrit essentiellement comme il suit :

«.....Mais on sait que, si dans le cas mentionnée la trajectoire est une conique et le centre du mouvement est un des foyers, la force est nécessairement de la forme $\frac{k}{\rho^2}$, et par suite elle est une fonction seulement de ρ et non des ρ et v , comme le veut M^r S., ce qui s'oppose à la proposition connue de Newton. Si on pose $\frac{k}{\rho^2} = \sigma(\rho, v)$, on trouvera v comme une fonction quelconque de ρ , tandis que, comme on sait, v est une fonction parfaitement déterminée de ρ , parce qu'on a $d(v^2) = -2\Delta d\rho$, et dans le cas proposé $d(v^2) = -\frac{2k}{\rho^2} d\rho$ et $v^2 = \frac{2k}{\rho} + c$.

Alors, la position même de la question par M^r S. est absurde ou fausse. De plus la condition $\Phi(\rho^2\Delta, 2\rho\Delta - v^2) = 0$, où Φ désigne une fonction

arbitraire, ne donne absolument aucune relation ou condition; parce que $\rho^2 \Delta$ et $2\rho \Delta - v^2$ sont de quantités constantes :

$$\rho^2 \Delta \equiv k, \quad 2\rho \Delta - v^2 \equiv 2\rho \frac{k}{\rho^2} - v^2 \equiv \frac{2k}{\rho} - v^2 \equiv -c,$$

et entre deux constants on peut poser une infinité de relations, p. ex.

$$\frac{k}{-c} \cdot (-c) = k, \quad k(-c) + (-k) \cdot c = 0, \dots \text{»}.$$

*
**

M^r Sakellariou répondit que: « Si l'on considère Δ comme fonction seulement de ρ , on a la forme $\frac{k}{\rho^2}$; mais on a une relation entre v et ρ , la suivante: $v^2 = \frac{2k}{\rho^2} + c$, et par conséquent on peut transformer la forme $\frac{k}{\rho^2}$ d'une infinité de façons pour obtenir Δ comme fonction des ρ et v (voir P. Appell, « Mécanique Rationnelle », t. I, p. 389, 1909). Par exemple nous avons $\Delta = \frac{k}{\rho^2} = \frac{2k}{2\rho^2} = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{2k}{\rho} + c - c \right) = \frac{v^2 - c}{2\rho}$; on trouve une autre expression de Δ en fonction des ρ et v ainsi: On a $\Delta = \frac{k}{\rho^2}$, $v^2 = \frac{2k}{\rho} + c$, et en posant $c = \pm k$, on trouve $\Delta = \frac{v^2}{\rho(2 \pm \rho)}$.

Mais encore nous avons prouvé qu'en général on peut considérer Δ comme fonction des ρ et v ; parce que l'équation $\frac{d}{dt} (\rho^2 \cdot \Delta) = 0$, que nous avons trouvé à la fin de la deuxième notre Note est vraie, tandis que Δ est prise des équations $x'' = -\frac{x\Delta}{\rho}$, $y'' = -\frac{y\Delta}{\rho}$, sans aucune restriction par rapport à ρ, v , c'est à dire sans la supposer comme fonction d'une seule variable, de ρ . La proposition de Newton se traduit comme il suit: « la force $\Delta(\rho, v)$ est éconcée par $\frac{k}{\rho^2}$; si on remplace v par sa valeur comme fonction de ρ , et non qu'on ne peut considérer Δ comme fonction des ρ, v , ainsi que nous l'avons fait.

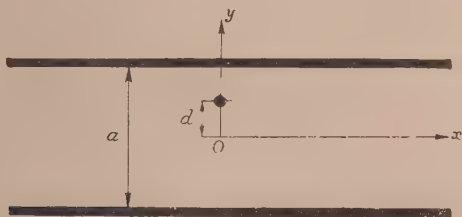
Enfin l'équation $\varphi(\rho^2 \Delta, 2\rho \Delta - v^2) = 0$ est le résultat de l'intégration d'une équation différentielle aux dérivées partielles, comme nous l'avons vu, et elle est aussi vraie ».

Fisica (Elettrostatica). — *Il condensatore elettrico formato da un filo rettilineo fra due piani paralleli.* Nota ⁽¹⁾ di A. MASOTTI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. Il condensatore elettrico che è oggetto di questa Nota è costituito da un filo rettilineo indefinito, avente sezione circolare — prima armatura — compreso fra due piani, paralleli fra loro ed al filo — seconda armatura.

Se il filo è equidistante dai due piani, si ha il condensatore studiato recentemente dai professori Perucca, Fubini e Vallauri ⁽²⁾. Ci proponiamo di esaminare il caso più generale in cui il filo è diversamente distante dai due piani.

Lo studio di un vortice rettilineo in un canale a sponde piane paral-



lele, fatto in una Nota precedente ⁽³⁾, porge subito il potenziale complesso, e permette di scrivere la formula della capacità; in questa rientra, nel caso particolare in cui il filo è equidistante dai due piani, la formula del Perucca. Infine si sono determinate le forze meccaniche sopportate dal filo e da ciascuno dei due piani, utilizzando in questa ricerca le formule, analoghe a quelle del Blasius, messe in luce in una recentissima Comunicazione ⁽⁴⁾.

2. Il problema elettrostatico proposto è un problema piano, perché le caratteristiche del campo sono le medesime su tutti i piani normali alla direzione del filo. Scelto sopra uno di questi piani il sistema di riferi-

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1930.

(2) E. PERUCCA, G. FUBINI, G. VALLAURI, *Studio di un particolare condensatore elettrico*, «L'Elettrotecnica», vol. XVII, 1930, pp. 278-283 e 515-516.

(3) *Vortice rettilineo in un canale a sponde piane parallele*, questi «Rendiconti».

(4) *Calcolo della risultante e del momento risultante dalle pressioni elettrostatiche, in un campo piano, con formule analoghe a quelle idrodinamiche del Blasius*, questi «Rendiconti».

mento $O(x, y)$ indicato dalla figura, il potenziale elettrostatico ψ è funzione armonica delle due variabili x ed y nella striscia $-a/2 \leq y \leq a/2$, esternamente però alla sezione del filo, che è un cerchio col centro nel punto $(0, d)$ ed avente raggio piccolissimo r , che tratteremo come una quantità infinitesima del primo ordine. La funzione ψ deve assumere lo stesso valore costante sulle due rette $y = \pm a/2$, e questo valore è lo zero se supponiamo che l'armatura esterna del condensatore sia in comunicazione con la terra; un altro valore costante q assume il potenziale sulla circonferenza c , contorno della sezione del filo.

A tutte queste condizioni soddisfa il coefficiente dell'unità immaginaria della funzione analitica

$$(1) \quad f = -\frac{iC}{2\pi} \log \frac{\text{Th} \frac{\pi \tilde{z}}{2a} - \text{Th} \frac{\pi \tilde{z}_0}{2a}}{1 + \text{Th} \frac{\pi \tilde{z}_0}{2a} \text{Th} \frac{\pi \tilde{z}}{2a}},$$

nella quale \tilde{z} denota la variabile complessa $x + iy$, $\tilde{z}_0 = id$ è l'affissa del centro di c , e la costante C risulta così definita:

$$(2) \quad C = \frac{2\pi q}{\log \left(\frac{2a}{\pi r} \cos \frac{\pi d}{a} \right)}.$$

La verifica di queste affermazioni è contenuta nella Nota: *Vortice rettilineo in un canale a sponde piane parallele*, testé pubblicata in questi « Rendiconti ».

3. La parte reale della funzione f , che indicheremo con ϕ , è la funzione armonica associata al potenziale elettrostatico. Quando si percorre una volta la circonferenza c in senso antiorario, la funzione ϕ subisce l'incremento C (come è facile verificare direttamente, e come discende subito dal significato idrodinamico della funzione stessa). Ne segue che la carica distribuita sull'unità di lunghezza del cilindro è data da

$$(3) \quad Q = -\frac{\epsilon}{4\pi} C,$$

ϵ indicando la costante dielettrica del coibente interposto fra le armature ⁽¹⁾.

(1) J. H. JEANS, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, p. 265, form 233 (5^a ed., Cambridge, University Press, 1927).

Se $q = -1$ la precedente fornisce la capacità del condensatore, che indicheremo con K . Tenendo presente la (2) si ottiene subito:

$$(4) \quad K = \frac{\epsilon}{2 \log \left(\frac{2a}{\pi r} \cos \frac{\pi d}{a} \right)}.$$

Quando il filo è equidistante dai due piani $d = 0$; la precedente diviene allora la formola del Perucca:

$$(4^{bis}) \quad K = \frac{\epsilon}{2 \log \frac{2a}{\pi r}} \quad (1).$$

4. Non sembra priva di interesse la determinazione delle forze meccaniche subite, per unità di lunghezza, dal filo e da ciascuno dei due piani.

Ciò si può fare utilizzando le formole (11) della Nota: *Calcolo della risultante e del momento risultante delle pressioni elettrostatiche, in un campo piano, con formole analoghe a quelle idrodinamiche del Blasius*, apparsa recentemente in questi « Rendiconti ». Ma queste formole, per la (4) della stessa Nota, possono esser scritte come segue:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_y + iR_x = -\frac{\epsilon}{8\pi} \int_c \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz, \\ M = -\frac{\epsilon}{8\pi} \Re \int_c \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz \end{array} \right.$$

(R_x , R_y e M sono rispettivamente le componenti cartesiane della risultante, ed il momento risultante, rispetto all'origine, delle pressioni elettrostatiche subite dall'unità di lunghezza di un conduttore cilindrico; c è il contorno della sezione retta di questo conduttore, e viene percorso in senso antiorario; \Re indica « parte reale di »). Ora si osserva che compaiono nelle (5) gli stessi integrali che si debbono calcolare per determinare le azioni idrodinamiche nel problema trattato nei nn. 4-6 della Nota: *Vortice rettilineo in un canale a sponde piane parallele*; dai risultati allora ottenuti discendono quindi le proposizioni seguenti:

Il filo è attratto dal piano più vicino; la forza che ne sollecita l'unità di lunghezza vale

$$(6) \quad \frac{\pi Q^2}{\epsilon a} \operatorname{tg} \frac{\pi d}{a}.$$

(1) Si osservi che la formula del PERUCCA è applicabile anche quando d non è nullo, ma abbastanza piccolo, tanto che si possano ritenere trascurabili di fronte all'unità le potenze superiori alla prima del rapporto $\pi d/a$, perchè allora è assimilabile all'unità il $\cos(\pi d/a)$.

I piani sono attratti verso il filo; le forze che ne sollecitano l'unità di lunghezza valgono

$$(7) \quad \frac{Q^2}{\varepsilon a} \left[1 + \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2d}{a} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi d}{a} \right] \quad \text{e} \quad \frac{Q^2}{\varepsilon a} \left[1 - \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2d}{a} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi d}{a} \right],$$

rispettivamente per il piano più vicino e per quello più lontano dal filo ⁽¹⁾.

Fisica. — *L'effetto Raman nell'acqua pura e in alcune soluzioni* ⁽²⁾.
Nota di R. BRUNETTI e Z. OLLANO, presentata ⁽³⁾ dal Socio A. GARBASSO.

1. Nello studio di un sistema così delicato di bande quali quelle che presenta l'effetto Raman dell'acqua ha grande importanza la disposizione spettroscopica e la qualità delle lastre sensibili adoperate.

Abbiamo avviata la ricerca con uno spettrografo di Fuess munito di prisma a deviazione costante e apertura degli obbiettivi di 1/10. Ma, poichè questa disposizione non ci metteva in condizioni migliori di quelle usate da altri ricercatori, l'abbiamo scartata in favore di altro spettrografo più luminoso (apertura degli obbiettivi 1/8) e munito di un grosso prisma triangolare di flint dal lato di 10 cm. La sua dispersione è di 34 Å/mm in media fra 4550 e 4750 Å e di 21 Å/mm fra 4170 e 4220 Å. Con lastre Agfa-Andresa (800 H e D) esso dava, per esposizioni fra 6 e 12 ore, bande dell'acqua molto dolci e ben sfumate.

La cella per il liquido da studiare (diametro da 2 a 3 cm., lunghezza utile 10 cm.) era di vetro sottile ed argentata sulla parete esterna, nella parte non investita dalla luce della lampada a vapori di mercurio. L'estremo di essa opposto alla fenditura dello spettrografo era invece annerita con nerofumo.

Serviva per l'illuminazione della cella una lampada a mercurio Gallois di quarzo, funzionante con corrente alternata. La luce del bruleur era concentrata sulla cella con un condensatore di vetro, trasparente anche alla 3550 Å del mercurio, e la massima parte della luce diffusa dalla cella era concentrata sulla fenditura dello spettroscopio con una lente a corto fuoco.

La regione registrata dalla lastra si estendeva fra 3800 e 5900 Å. Accanto alla spettrografia dell'effetto Raman veniva fotografato sopra e sotto lo spettro del ferro per la lettura degli spettrogrammi. Questa è stata ese-

(1) Agli stessi risultati si perviene, com'è naturale, assoggettando successivamente i tre corpi costituenti il condensatore ad opportuni spostamenti virtuali, e scrivendo ogni volta l'eguaglianza fra il lavoro delle forze meccaniche e la diminuzione di energia (JEANS, loc. cit., n. 118; ved. anche M. ABRAHAM, *Theorie der Elektrizität*, I. Bd., § 42 (6ª ed., Leipzig, Teubner, 1921).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Cagliari.

(3) Nella seduta del 2 novembre 1930.

guita per mezzo di un piccolo oculare micrometrico di Fraunhofer costruito da Steinheil, disposto alla maniera di un comparatore. Le lastre sono state inoltre fotometrate con un microfotometro di Kipp e Zonen, messo gentilmente a nostra disposizione dal prof. L. Rolla dell'Università di Firenze.

2. Per effetto Raman l'acqua sottoposta all'irraggiamento totale di una lampada a vapori di mercurio dà luogo nella regione spettrale visibile a tre bande: una verde (fra 5050 e 5150 Å); una azzurra (fra 4645 e 4745 Å), una violetta (fra 4135 e 4220 Å) eccitate rispettivamente dalle righe 4358, 4047 e 3650 Å del mercurio.

Ognuna di queste bande si compone di almeno due elementi ⁽¹⁾, questo è ormai ammesso da tutti gli autori. Noi, e con noi sono gli autori indiani ⁽²⁾, riconosciamo in esse tre elementi per le cui differenze di frequenza dalla riga eccitante leggiamo 3225, 3469, 3589 cm⁻¹. Le prime due sono le frequenze sicure, la seconda è la più intensa di tutte. Omettiamo qui la discussione relativa alla terza banda, più debole delle tre, che riprenderemo solo più avanti.

Effetto Raman dell'acqua pura.

Radiazione eccitante		Radiazione Raman		Differenze di frequenza in cm^{-1}				
λ	ν in cm^{-1}	λ_R	ν_R in cm^{-1}					
3650.1	27 389	4140	24 155	3234				debole
		4182	23 912		3479			forte
		4200	23 810			3579		debolissima
		4820?	20 747			6642?		debolissima
4046.6	24 705	4655	21 482	3223				media
		4704	21 259		3446			forte
		4738	21 106			3599		debole
4358.2	22 938	5070	19 724	3214				debolissima
		5140	19 455		3483			media
5461	18 308	—	—			—		illeggibile
		4820?	20 747		3439?			antistokes
Media delle letture				3225	3469	3589	6642?	
λ in μ				3.10	2.88	2.79	4.67	

(1) GERLACH, «Phys. ZS», 31, 695, 1930; PRINGSHEIM e SCHLIVITCH, «ZS f. Phys», 60, 581, 1930; MEYER, «Phys ZS», 31, 510, 1930; 31, 695, 1930.

(2) GANESAN e VENKATESWARAN, «Ind. Journ. of Phys», Vol. IV, III, 236, 1929; RAMAKRISHNA RAO, «Nat.», 121, 762, 1929.

Le lunghezze d'onda infrarosse dei primi due componenti sono 3.1 e 2.88μ . Generalmente è detto che esse rappresentano la banda d'assorbimento infrarossa prossima a 3μ dell'acqua liquida, e, poichè la frequenza 3225 cm^{-1} scompare ad alta temperatura ⁽¹⁾, che essa appartiene a un polimero della molecola dell'acqua più elevato di quello a cui appartiene la 2.88μ .

Ora la molecola dell'acqua H_2O corrisponde a un modello non ancora oggi ben definito, ma con molta probabilità triangolare e deve quindi possedere tre frequenze fondamentali ⁽²⁾. Lo spettro d'assorbimento del vapor d'acqua e quello dell'acqua liquida d'altra parte si possono ricostruire facendo uso solo di due frequenze fondamentali, che per l'acqua sono la $\nu_1 = 1640 \text{ cm}^{-1}$ e la $\nu_2 = 3360 \text{ cm}^{-1}$ ($\lambda = 6.1 \mu$ e 2.97μ rispettivamente). Questo fa supporre che la terza frequenza sia poco attiva o del tutto inattiva dal punto di vista spettrale.

Se questo è vero, essa dovrebbe precisamente comparire in effetto Raman, come compaiono le frequenze inattive di CO_2 ed NO_3 . Ora per questa frequenza Mecke ⁽³⁾ ha calcolato un valore superiore, ma poco lontano da quello della seconda frequenza pel vapor d'acqua. Anche nell'acqua liquida tale frequenza non differirà molto dalla frequenza corrispondente alla banda infrarossa a 3μ . Le bande Raman che si osservano nello spettro dell'acqua sono dunque corrispondenti alle frequenze inattive o alle attive dei diversi polimeri dell'acqua? Per escludere la seconda ipotesi bisogna: o dimostrare l'assenza assoluta dallo spettro Raman dell'acqua delle frequenze fondamentali note, o identificarle come indipendenti dalle bande osservate.

Cominciamo colla prima frequenza, 1640 cm^{-1} . Essa, se eccitata dalla 3650 Å del mercurio, cade a circa 3883 Å cioè al bordo dei nostri spettrogrammi, dove noi non abbiamo notato nulla di segnalabile. D'altra parte Meyer ⁽⁴⁾ che ha esaminato lo spettro Raman dell'acqua anche nell'ultravioletto non indica nel suo lavoro di aver notato una frequenza corrispondente alla citata.

La stessa radiazione, se eccitata dalla 4358 Å deve invece cadere proprio sul bordo violetto della banda azzurra più intensa dell'acqua, la 3469 cm^{-1} . Kinsey ⁽⁵⁾ sopprimendo la eccitazione della 3469 cm^{-1} con uno schermo che toglieva la radiazione 4047 Å del mercurio, ma lasciava passare la 4350 Å , non è riuscito a ottenere traccia della banda 1640 cm^{-1} nel punto indicato.

(1) MEYER, loc. cit.; PRINGSHEIM e SCHLIVITCH, loc. cit.; GANESAN e VENKATESWARAN, loc. cit.

(2) SCHAEFER und MATOSI, *Das Ultrarote Spektrum*, Berlin, 1930, p. 239 e sgg.

(3) MECKE, «Phys. ZS», 30, 907, 1929.

(4) MEYER, loc. cit.

(5) KINSEY, «Phys. Rev.», 24, n. 3, 1929.

Essa quindi, se esiste, è molto debole nello spettro Raman dell'acqua distillata a temperatura ambiente.

Nell'acqua liquida la banda 6.1μ è alquanto meno intensa di quella prossima a 3μ . La differenza, delle due intensità non è tuttavia così forte da indurre nella convinzione che l'assenza della 6.1μ possa essere giustificata senza l'assenza contemporanea della seconda frequenza fondamentale nell'effetto Raman dell'acqua liquida.

Allo stato attuale della questione sembra quindi necessario concludere che le bande a lunghezza d'onda prossima a 3μ messe in evidenza nell'effetto Raman dell'acqua distillata rappresentano la terza frequenza fondamentale della molecola dell'acqua, non osservabile in assorbimento. Essa ha valore diverso a seconda del polimero a cui appartiene in dipendenza delle diverse condizioni del campo intramolecolare creato dalla costituzione del polimero stesso.

Nello spettro dell'acqua, a 4820 \AA circa, fra due righe secondarie del mercurio, sembra di riconoscere la presenza di una debolissima banda. Essa se eccitata dalla 4358 \AA potrebbe rappresentare la frequenza propria dell'acqua liquida (2190 cm^{-1} , $\lambda = 4.7 \mu$). Essa tuttavia si può anche considerare come una frequenza antistokes eccitata dalla riga verde del mercurio, corrispondente sempre alla banda più intensa dell'acqua 3469 cm^{-1} .

3. Nella fotometria della banda azzurra dell'acqua (Ia) i tre elementi di cui essa si compone non appaiono risolti. La componente di media intensità è tuttavia francamente riconoscibile nella forte dissimmetria che la banda presenta dalla parte del violetto, mentre il più debole si manifesta solo con un ingrossamento della banda stessa dalla parte del rosso.

La banda violetta (Ib) presenta poi un aspetto alquanto diverso da quello della azzurra, ma la eccitazione di questa banda è meno pura di quella della banda azzurra. Infatti presso la 3650 \AA esistono altre due radiazioni di intensità non trascurabile, le 3654 e 3663 \AA . Alla loro presenza, e quindi alla eccitazione di deboli elementi secondari irrisolubili, è dovuta la forma della banda violetta, tozza e priva di dettagli ben definiti ⁽¹⁾.

Confrontiamo la fotometria delle due bande citate ottenute in acqua pura e in soluzioni di acido cloridrico. In esse tali bande sono divenute singolarmente simili fra loro (IIa IIb). Inoltre ambedue si presentano prive sia della forte dissimmetria dalla parte del violetto come del lieve ingrossamento dalla parte del rosso. La parte centrale della banda anche a occhio appare limpida e intensa come nel caso dell'acqua pura.

Si può quindi concludere che il terzo elemento delle bande dell'acqua non è determinato nè da righe lievi del mercurio nè da eccitazioni secondarie, come suppone Gerlach ⁽²⁾. Mentre con le soluzioni cloridriche queste

(1) GERLACH, loc. cit.

(2) Loc. cit.

cause perturbatrici persistono, l'elemento in questione manca, come manca l'elemento simmetrico rispetto alla banda più intensa dell'acqua.

Mentre a causa del suo comportamento termico la banda 3225 cm^{-1} è attribuita a un polimero più elevato della molecola dell'acqua di quello a cui appartiene la banda 3469 cm^{-1} , per analogia la debole banda 3589 cm^{-1} , di cui abbiamo ora riconosciuta l'esistenza, va attribuita a un terzo polimero più basso dei due precedenti contenuto in esigua proporzione nell'acqua liquida. Esso potrebbe coincidere con la molecola H_2O senz'altro. In effetto le frequenze attive e la inattiva del vapor d'acqua prossime a $3\text{ }\mu$ hanno valore superiore a quello della banda 3589 cm^{-1} (1). Questo potrebbe tuttavia provenire dalle particolari condizioni del campo intramolecolare a cui soggiace la molecola H_2O nel liquido, molto diverse da quelle che si hanno nel caso del vapore.

4. Le osservazioni contenute nel paragrafo precedente ci dicono che presso le soluzioni in cui è presente lo jone Cl' esaminate (HCl 50% e 25%, CeCl_3 con 2.6 e 1.3 Mol per litro):

1° le bande dell'acqua 3225 e 3589 cm^{-1} , diminuiscono di intensità;

2° la banda centrale 3460 cm^{-1} , che rimane isolata, sembra intensificata.

In base alla attribuzione fatta delle due bande che diminuiscono di intensità possiamo dire che il solvente nelle soluzioni in cui è presente lo jone Cl' subisce un doppio processo: di depolimerizzazione in primo luogo (scomparsa della 3225 cm^{-1}) e di lieve polimerizzazione (scomparsa della 3589 cm^{-1}); cosicchè esso diviene alla fine più omogeneo, per quanto riguarda la composizione delle sue molecole acquose, di quello che non sia l'acqua distillata pura. Le sue molecole infatti si concentrano intorno a un'unica forma molecolare.

Possiamo esprimere i risultati della nostra ricerca in una forma generale, come quella usata, perchè le nostre osservazioni concordano con quelle ottenute da altri autori con soluzioni clorate diverse (2) (LiCl , CaCl_2).

5. Abbiamo esaminato le soluzioni nitriche e nitrate seguenti: HNO_3 (6.5; 3.5; 2.6 Mol per litro), NaNO_3 (9.8 Mol per litro), NH_4NO_3 (12.5 Mol per litro), KNO_3 (3.96; 1.98 Mol per litro), $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$ (0.64 Mol per litro), $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ (1.86 Mol per litro), $\text{La}(\text{NO}_3)_3$ (1.67 Mol per litro), $\text{Ce}(\text{NO}_3)_3$ (3.1; 1.5 Mol per litro), $\text{Th}(\text{NO}_3)_4$ (1.65 Mol per litro). Non esponiamo qui tutti i risultati ottenuti e ci limitiamo a segnalare quelli che riguardano veramente le bande dell'acqua:

1° la banda 3589 cm^{-1} a differenza che presso le soluzioni cloridriche e clorate si intensifica, cosicchè spesso la banda prossima 3469 cm^{-1} perde ogni risalto rispetto ad essa;

(1) Vedere libro citato, p. 237, 243.

(2) GERLACH, « Naturw », 68, 1930; MEYER, loc. cit.

2° la banda 3225 cm^{-1} si indebolisce lentamente ed è assente solo nelle soluzioni a maggior concentrazione.

Il solvente acquoso, quando è presente il gruppo NO_3 , si depolimerizza, ma non diviene omogeneo, perchè conserva anche nei casi limite considerati l'equilibrio fra i due polimeri a minor numero di molecole d'acqua.

Le bande dell'acqua sono state citate in quanto precede con le frequenze che esse hanno in acqua pura, cioè facendo astrazione da eventuali spostamenti che esse possano subire nelle soluzioni e di cui è stato parlato da Gerlach⁽¹⁾, in quanto per varie ragioni, fra cui il loro aspetto non ben definito e la presenza di elementi estranei nelle loro vicinanze, non ci è parso che tali spostamenti potessero da noi essere dati per certi.

Ai risultati enunciati non si perviene però con la stessa facilità con cui sono stati ottenuti quelli delle soluzioni in cui è presente lo jone Cl' . Infatti fra le frequenze proprie di NO_3' ne esiste una a circa 1400 cm^{-1} ($\lambda = 7.2\ \mu$) molto intensa e larga come dimostra la curva di trasparenza ottenuta nell'ultravioletto con NaNO_3 da Schaefer e Bormuth⁽²⁾. Essa sulle lastre ottenute con soluzioni concentrate di NaNO_3 è presente a 4741 e $4290\ \text{\AA}$ (eccitanti 4358 e $4047\ \text{\AA}$) ed appare intensa più della banda 3225 cm^{-1} dell'acqua, ma larga e sfumata come questa. Con la stessa 3225 cm^{-1} spostata alquanto verso il violetto essa potrebbe essere identificata, se non si vedesse chiaramente che nel violetto l'elemento corrispondente alla reale 3225 cm^{-1} è quasi svanito.

Le fotometrie (IIIa, IIIb) dimostrano appunto questo fatto per la soluzione di NaNO_3 a 9.8 Mol per litro. La parte della lastra corrispondente alla regione azzurra è disgraziatamente coperta da spettro continuo fino a circa $4750\ \text{\AA}$ sicchè nella fotometria la banda dell'acqua e la successiva del gruppo NO_3' sono annegate in un fondo alquanto denso che smorza i risalti. Esse tuttavia appaiono come a occhio di intensità forte e comparabile. Nella regione violetta si nota invece una unica banda, che ha l'aspetto della analoga banda delle soluzioni cloridriche dalla parte delle lunghezze d'onda minori, mentre dalla parte del rosso essa è più larga e piatta così come vuole la presenza della terza banda dell'acqua.

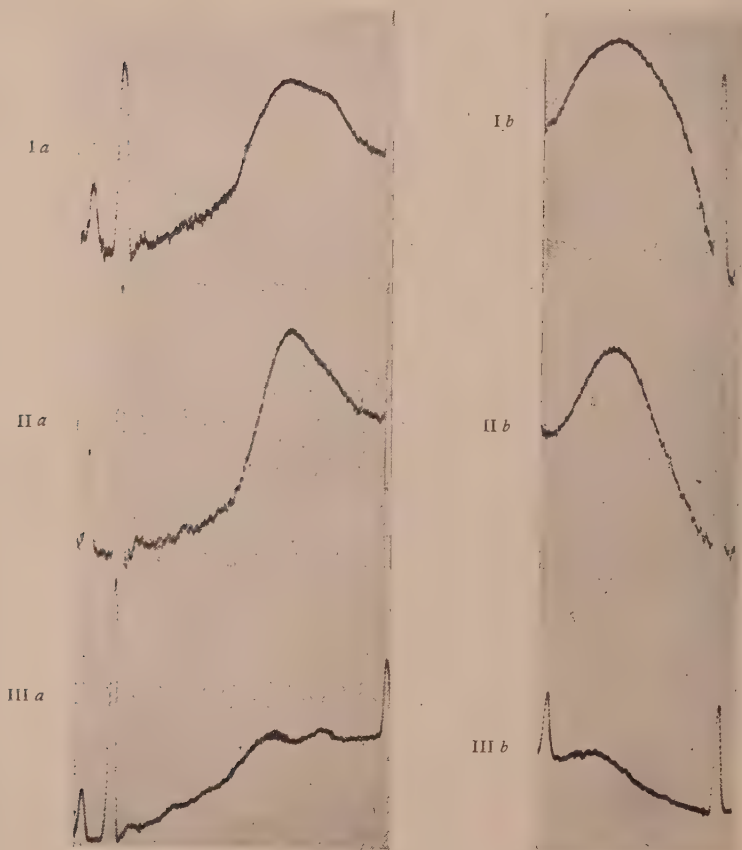
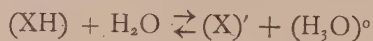
Sulle lastre ottenute con NH_4NO_3 la banda 1400 cm^{-1} è più estesa dalla parte del rosso forse per la presenza della banda Raman corrispondente alla lunghezza d'onda $7.0\ \mu$ del gruppo molecolare NH_4 . Presso gli altri nitrati che erano in soluzione meno concentrata la banda 1400 cm^{-1} cambia un pò posizione, ma è di difficile lettura a causa della 3225 cm^{-1} non del tutto assente.

6. La modificata condizione di equilibrio del sistema acquoso, conseguente alle modificate condizioni del campo elettrico intramolecolare, può

(1) «Phys. ZS.», 31, 695, 1930.

(2) «ZS. für Phys.», 62, 508, 1930.

giustificare i fenomeni osservati presso l'acqua pura e le soluzioni acquose di acidi e sali. Ma forse una interpretazione più precisa si ricava ricordando che, secondo la moderna teoria degli acidi sostenuta da Hantzsch ⁽¹⁾, nelle loro soluzioni acquose si verifica l'equilibrio



I a Banda azzurra dell'acqua distillata.

II a Banda azzurra della soluzione acquosa di HCl al 25 %.

III a Banda azzurra della soluzione acquosa di $NaNO_3$ (9,8 Mol per litro).

I b Banda violetta dell'acqua distillata.

II b Banda violetta della soluzione acquosa di HCl al 25 %.

III b Banda violetta della soluzione acquosa di $NaNO_3$ (9,8 Mol per litro).

(1) GEIGER und SCHEELE, «Handb. der Phys.», Bd. XXI, p. 78; HANTZSCH, «ZS. f. Phys. Chem.», 134, 406, 1928; HANTZSCH e DÜRINGEN, «ZS. f. Phys. Chem.», 134, 413, 1928.

ove (X)' rappresenta il radicale negativo dell'acido e (H₃O)· è il cosiddetto jone idroxonio. La formazione di questo jone richiede evidentemente la depolimerizzazione delle molecole complesse dell'acqua.

In questo ordine di idee dalle nostre osservazioni si deve concludere che la depolimerizzazione avverrebbe specialmente a spese del polimero più elevato.

Una parziale idrolisi presso alcuni sali, con conseguente formazione di acido, o una idratazione della molecola salina nel senso indicato da Hantzsch, può spiegare l'analogo effetto verificato nelle soluzioni saline. Bisogna in questo caso concludere che i polimeri idratanti sono prossimi a quelli di cui il solvente puro è più ricco. Non abbiamo infatti notato nelle soluzioni esaminate il formarsi di bande dell'acqua diverse da quelle presenti in acqua liquida pura.

La teoria chimica degli acidi ha avuto fin qui come fondamento lo studio dell'assorbimento delle soluzioni saline e acide nell'ultravioletto e misure di refrattività molecolare. Essa è tuttavia sempre in discussione. I risultati dedotti dallo studio dell'effetto Raman dell'acqua usata come solvente per ora non contraddicono le conseguenze di tale teoria.

Sono tuttavia in corso ricerche dirette a mettere alla prova appunto le premesse di essa.

Biologia (Microbiologia). — *Differenziamento morfologico di alcune specie di Attinomiceti confuse sotto la denominazione di « Actinomyces bovis » Harz.* Nota di V. PUNTONI presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

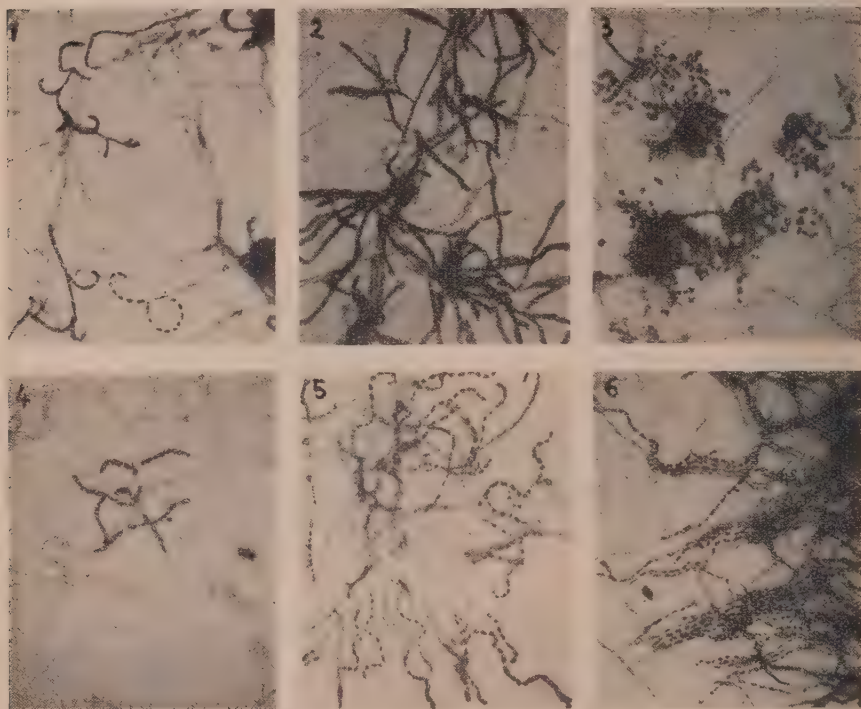
È noto che gli attinomiceti formano un gruppo di funghi tuttora imperfettamente studiato. Le singole specie sono spesso mal definite ed il loro differenziamento non è facile.

Poichè sino ad oggi si è data la massima importanza ai caratteri colturali e si è invece trascurato lo studio morfologico ritenendo che esso offra scarsi caratteri differenziali, l'A. ha voluto indagare se effettivamente questo ultimo criterio non sia utilizzabile per la diagnosi di specie, ed a tale scopo ha studiato le cinque specie di attinomiceti altra volta confuse fra loro sotto la denominazione di *A. bovis*, e precisamente: *A. solphureus*, *A. albus*, *A. chromogenus*, *A. albedo-flavus* ed *A. carneus*, tutti aerobi ed appartenenti alla sezione *Majora*.

È noto che le colture degli attinomiceti aerobi della sezione *Majora*, di aspetto cereo in primo tempo, assumono più tardi un aspetto secco e polverulento che viene considerato come l'esponente della sporificazione.

(1) Nella seduta del 2 novembre 1930.

L'A. adottando la tecnica delle colture a secco su vetrini e colorando con ematossilina ferrica, ha potuto stabilire che ciò non è esatto: il cambiamento di aspetto non è infatti determinato dalla produzione di spore, ma bensì dalla formazione di un micelio aereo, che si origina dal micelio vegetativo, e che prelude alla formazione delle spore, la quale avviene senza ulteriori modificazioni di aspetto.



La sporificazione degli attinomiceti ha luogo a spese dei filamenti del micelio aereo, nei quali si osserva da prima la formazione di granuli cromatici che si dispongono a corona di rosario lungo gli interi filamenti aerei; poi si ha la frammentazione.

Il processo di sporificazione si accosta pertanto da un lato al tipo artrosporigo, ma se ne discosta pel fatto che non avviene nello intero micelio, sibbene in una parte differenziata qual'è l'apparecchio aereo, similmente alla fruttificazione conidiale. Per tal motivo l'A. pensa che le spore degli attinomiceti non sono nè artrospore nè conidiospore e propone di denominarle *actinospore*.

Mentre lo studio del micelio vegetativo non offre sicuri caratteri differenziali fra i vari attinomiceti, l'A. studiando il processo di formazione del micelio aereo e la sporificazione nelle specie suddette, ha potuto stabilire dei caratteri differenziali:

Actinomyces sulphureus Gasperini.

La formazione del micelio aereo dà alle colture un aspetto giallozolfo secco, il che ha valso a questo attinomicete la sua denominazione.

Tipicamente il micelio aereo è costituito da filamenti eretti, assai più grossi ed assai più colorabili dei filamenti vegetativi, scarsamente ramificati ed aventi la caratteristica tendenza ad avvolgersi ad uncino. In un secondo tempo si ha frammentazione di alcuni filamenti in actinospore, ma una gran parte del micelio aereo rimane indivisa (n. 1 della fig.).

Actinomyces albus (Rossi Doria) ed *Actinomyces chromogenus* Gasperini.

Questi due attinomiceti, considerati spesso come due specie diverse, sono piuttosto due varietà della stessa specie; si differenziano solo perchè la seconda produce un pigmento nero diffusibile nei terreni colturali, che non è invece prodotto dalla prima.

La produzione del micelio aereo è molto abbondante ed imprime alla superficie colturale un aspetto bianco gessoso in ambedue questi attinomiceti. La morfologia del micelio aereo e la sporificazione avvengono pure in modo eguale.

Tipicamente il micelio aereo è costituito di filamenti molto ramificati, assai più grossi e più colorabili dei filamenti vegetativi e formanti folti cespugli a pennello. La frammentazione del micelio aereo avviene facilmente e diffusamente, cosicchè in un tempo avanzato di sviluppo il micelio aereo è trasformato in un ammasso di actinospore (n. 2 e 3 della fig.).

Actinomyces albido-flavus (Rossi Doria).

La formazione del micelio aereo è molto scarsa ed incostante, cosicchè assai spesso le colture non cambiano di aspetto. Quando il micelio aereo si forma, l'ordinaria superficie giallastra della coltura si opaca per una lieve impolveratura superficiale.

Nelle colture a secco utilizzate per lo studio, non si è mai rinvenuto un micelio aereo ben sviluppato, ma solo dei filamenti rudimentali eretti, più grossi e più colorabili delle ife vegetative, disposti disordinatamente a guisa di frammenti e senza una decisa tendenza alla risoluzione in actinospore (n. 4 della fig.).

Actinomyces carneus (Rossi Doria).

Il micelio aereo di questa specie si manifesta in forma di una impolveratura bianca superficiale che opaca il color rosso-arancione della vegetazione. Inoltre tutto attorno alla vegetazione si osserva la formazione di un alone bianco.

Tipicamente il micelio aereo è costituito da filamenti eretti più grossi e più colorabili delle ife vegetative, con scarsa tendenza alle ramificazioni e

con un caratteristico decorso ondulato, a guisa spirillare. La risoluzione dei filamenti in actinospore è precoce e completa (n. 5 della fig.).

Quanto all'alone bianco periferico, esso è costituito da numerosi filamenti riuniti in coremi e risolti in spore, ma struscianti, anzichè eretti, e con caratteri intermedi, per grossezza e tingibilità, fra quelli del micelio aereo e quelli del micelio vegetativo (n. 6 della fig.).

L'*A. carneus* (Rossi Doria) è identificabile col primo attinomicete coltivato da Bostroem dall'attinomicosi bovina.

Fisiologia. — *Il ricambio materiale del sistema nervoso centrale.* III: *La eliminazione della colesterina totale*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di M. MITOLO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Il tessuto nervoso centrale, pur essendo fra i più ricchi di colesterina, non è stato tuttavia tenuto in gran conto dai vari Autori sia come eventuale centro di colesterinogenesi, sia come tessuto regolatore del tasso colesterinamico. Anche il ricambio colesterinico del sistema nervoso non è stato studiato con l'attenzione che esso merita, forse per le numerose incognite che ancor oggi offre questo lato del metabolismo.

È noto che la colesterina è un componente chimico di tutti i tessuti; nel sistema nervoso centrale essa può raggiungere il tasso del 20 : 1000. In alcune determinazioni da me eseguite sull'asse cerebro-spinale di *Bufo v.*, la quantità media di colesterina totale trovata è stata di 15.45 : 1000.

Per studiare la eliminazione della colesterina da parte del sistema nervoso centrale, ho sperimentato sul *preparato centrale* Baglioni, che si presta egregiamente per le ricerche sul metabolismo del tessuto nervoso, per le ragioni addotte in miei precedenti lavori⁽³⁾.

L'asse cerebro-spinale del preparato è stato immerso per 2 ore in 10 cc. di soluzione fisiologica di NaCl al 0.7 %, contenuti in una capsulina di Petri; le condizioni sperimentali sono state le più differenti. Nei 10 cc. della soluzione, al termine dell'esperimento, è stata ricercata la colesterina totale (c. libera + c. esterificata) mediante il metodo di Grigaut (4), saponificando la porzione esterificata con alcoolato sodico; il dosaggio è stato eseguito per via colorimetrica, con l'apparecchio di Hellige. Il valore di colesterina così trovato si riferiva al peso dell'asse cerebro-spinale del preparato; con un ulteriore calcolo si otteneva il valore in mgr. della colesterina eliminata da 1 gr. di sostanza nervosa centrale, in 2 ore di esperimento.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma

(2) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1930.

(3) MITOLO, *Il ricambio materiale del sistema nervoso centrale*. I: *Il consumo delle sostanze azotate*, « Fisiol. e Medic. », I, 445, 1930; II: *La eliminazione di alcuni sali*, « ibid. », I, 1930 (in corso di stampa).

(4) GRIGAUT, « Cpt. Rend. Soc. de Biol. », 1910-11-12.

TABELLA.

*Valori di colesterina totale eliminata da 1 gr. di sostanza nervosa centrale,
in 2 ore di esperimento.*

Numero dell'esperimento	T° Celsius	Colesterina totale mgr.	Condizioni sperimentali
1	19°	0.7692	A riposo
2	19°	0.7407	
3	19°	1.1653	
4	20°	0.7299	
5	19°	1.2333	
media 1-5	19°-20°	0.9276	Asse cerebro-spinale morto
6	22°	0.4173	
7	22°	0.4567	
media 6-7	22°	0.4370	Durante l'attività riflessa (stimolazione meccanica della cute del preparato ogni 10')
8	20°	0.9200	
9	20°	0.9166	
10	20°	0.9333	
media 8-10	20°	0.9233	Azione del solfato neutro di stricnina (sol. al 2.5 : 10.000, in sol. fisiol. di NaCl al 0.7 %) (convulsioni tetaniche)
11	19°	0.8571	
12	19°	1.2244	
13	19°	1.6800	
14	20°	1.7120	
15	20°	1.6235	
media 11-15	19°-20°	1.4194	Azione dell'alcool etilico (miscela di alcool etil. ass. cc. 0.5 con sol. fisiol. di NaCl cc. 9.5) (narcosi)
16	19°	0.7318	
17	19°	0.8201	
18	20°	0.5602	
19	20°	0.7364	
media 16-19	19°-20°	0.7121	

Segue TABELLA.

Numero dell'esperimento	T Celsius	Colesterina totale mgr.	Condizioni sperimentali
20	22°	0.8513	Azione dell'ossigeno gasoso (che gorgoglia nella sol. fisiol.).
21	22°	0.9583	
media 20-21	22°	0.9048	
22	20°	a - 0.7299	Rinnovazione della sol. fisiologica di 2 in 2 ore
		b - 0.7065	
		c - 0.6978	
23	19°	a - 1.2333	
		b - 0.8283	
		c - 0.8100	

Adunque, nelle condizioni di riposo, l'asse cerebro-spinale di *Bufo v.* elimina una quantità ragguardevole di colesterina totale (in media, mgr. 0.9276). La scarsa eliminazione da parte del sistema nervoso morto, dovuta probabilmente a fenomeni di diffusione postmortale, indica che la normale escrezione di colesterina è connessa con la vitalità del tessuto. Durante l'attività riflessa, la quantità di colesterina eliminata, rispetto alle condizioni di riposo, non varia. L'ossigeno non provoca una maggiore escrezione, la quale pertanto è indipendente da processi ossidativi o connessi con questi. Una stimolazione chimica abnorme dei centri per opera della stricnina induce un aumento della eliminazione colesterinica; questa, al contrario, è assai ridotta durante la narcosi da alcool etilico. Finalmente, rinnovando di 2 in 2 ore la soluzione fisiologica intorno al medesimo asse cerebro-spinale, la quantità di colesterina eliminata va progressivamente diminuendo: di pari passo diminuisce la eccitabilità riflessa del preparato.

Si può, in conclusione, asserire che la eliminazione della colesterina totale da parte del sistema nervoso centrale sopravvivate è un fenomeno rilevabile in ogni condizione sperimentale, ed intimamente connesso coi processi del ricambio materiale del tessuto. Questo, assieme ai surreni, al corpo luteo, alla milza, all'apparato reticolo-endoteliale in genere, ha molta importanza nel metabolismo della sterina, forse anche come centro di colesterinogenesi; ed assai probabilmente deve spiegare molta influenza nella regolazione del tasso colesterinamico.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 7 dicembre 1930 (Anno IX)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sezioni piane di un corpo e direttrici ortobariche.* Nota ⁽¹⁾ del Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia S un campo (finito) a tre dimensioni. Pensandolo occupato da materia omogenea, consideriamo i baricentri delle sue ∞^3 sezioni piane. Si è condotti a distinguere tre casi, secondochè i detti baricentri invadono un campo a tre dimensioni, o soltanto superficiale, o stanno tutti sopra una linea. Ci proponiamo di mostrare che in ognuna delle tre eventualità esistono *direttrici ortobariche*, cioè linee D (necessariamente interne ad S quando si tratta di un campo convesso) tali che, guidando per un loro punto generico G il piano normale alla curva, la sezione τ di S con questo piano ha precisamente G come baricentro: si intende, baricentro geometrico, cioè in quanto si riguardi τ come un'area piana omogenea.

La caratterizzazione delle D è immediata, allorchè i centri delle sezioni piane si localizzano tutti sopra una linea, che è allora (essa ed essa soltanto) direttrice ortobarica. In generale la determinazione dipende essenzialmente da un sistema di equazioni differenziali ordinarie: di rango 2, se i baricentri invadono un campo a tre dimensioni; di rango 1 nel caso intermedio in cui i baricentri stanno sopra una superficie.

Per quanto la localizzazione dei baricentri G sopra una linea possa apparire e sia effettivamente un caso assai particolare, esso ha tuttavia interesse, perchè, come vedremo (n. 4), si presenta sempre per i *tubi sottili*.

Un esempio del caso intermedio (baricentri delle ∞^3 sezioni piane sopra una superficie) è offerto dalle piastre cilindriche di spessore piccolissimo (n. 5).

(1) Presentata nella seduta del 7 dicembre 1930.

I. — CLASSIFICAZIONE. — CASO BAROGRAMMICO.

Le sezioni piane τ di un corpo generico S sono ∞^3 , quanti i piani seganti: dovendosi ciò intendere colla specificazione che i tre parametri i quali individuano un piano (p. es., coordinate plückeriane) possono variare non illimitatamente, ma in quell'ambito cui corrispondono piani non tutti esterni ad S . Comunque, i baricentri G delle rispettive sezioni τ (essendo ∞^3 e variando con continuità assieme al piano secante) riempiranno *in generale* un certo campo, tutto interno al corpo S allorchè questo è convesso. Se il luogo dei punti G è proprio un campo Γ a tre dimensioni, diremo che il corpo S è *barosterico* [da $\beta\alpha\rho\acute{o}\varsigma$, donde baricentro e $\tau\acute{o}$ $\sigma\tau\epsilon\rho\acute{\epsilon}\omicron\nu$ (spazio)].

Ma può accadere che, pur essendo ∞^3 le sezioni piane τ , i loro baricentri non invadano un campo a tre dimensioni, ma stiano tutti sopra una superficie γ : dico una e non eventualmente più, perchè, attesa la continuità della distribuzione, se pur γ consta di più falde, queste sono di necessità connesse tra loro. Il corpo S potrà dirsi in tale caso *baropipedo* [da $\tau\acute{o}$ $\epsilon\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\omicron\nu$ (superficie)]. Essendovi soltanto ∞^2 baricentri G per ∞^3 sezioni τ , un punto G della γ deve essere, in generale, baricentro di ∞^1 sezioni τ . I loro piani (passanti naturalmente per G) inviluppano un certo cono; e le normali a tali piani, spiccate dal vertice G , costituiscono alla lor volta un certo altro cono N . Di questa circostanza ci varremo più innanzi.

Per completare ora la nostra classificazione rimane soltanto da contemplare l'eventualità che la molteplicità dei baricentri G sia appena ∞^1 : al disotto non si può andare perchè sono certo distinti i baricentri delle ∞^1 sezioni di S praticate con un fascio di piani paralleli. In tal caso i baricentri G formano una linea D , unica, come sopra, per ragione di continuità; e il corpo S sarà a dirsi *barogrammico* [da $\gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}$ (linea)].

L'importante si è che la linea D è senz'altro *ortobarica*, in quanto ogni G è baricentro di ∞^2 sezioni piane, quindi anche della sezione normale a D : almeno in senso locale, volendo dire con ciò che, se un punto G_0 della D è baricentro di tutte le sezioni prossime alla normale, lo stesso certo si verifica in tutto un arco di D circostante a G_0 . Come si vede, il problema (locale) della determinazione della direttrice ortobarica si presenta qui già automaticamente risolto.

2. — CORPI BAROSTERICI.

In corrispondenza ad ogni punto G del campo Γ (luogo dei baricentri delle varie sezioni piane del corpo S) rimane individuata una giacitura (almeno): quella della sezione normale τ di cui G è baricentro. Se vi

fossero più τ distinte, ne fisseremo una, designando con \mathbf{u} il versore della direzione ortogonale. Si ha così in Γ (nell'intorno di un suo punto generico) un ben determinato *campo di vettori*, anzi di versori $\mathbf{u}(G)$. Se si designano con x, y, z le coordinate cartesiane del punto generico G e con $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$, $u_3(x, y, z)$ le componenti (coseni direttori di \mathbf{u}), le equazioni

$$(1) \quad \frac{dx}{u_1} = \frac{dy}{u_2} = \frac{dz}{u_3}$$

definiscono le *linee del campo* Γ , e ognuna di queste è senz'altro una *direttrice ortobarica* D del campo Γ . Infatti da un lato, per definizione di \mathbf{u} , il piano normale ad \mathbf{u} per G taglia il campo S secondo un'area τ che ha G per baricentro. D'altro lato, lungo una linea (1), il piano normale ad \mathbf{u} è, per ciò stesso, normale alla linea. Più precisamente si può affermare, per semplice applicazione alle (1) dei classici teoremi di esistenza, che i *solidi barosterici* (tali cioè che i baricentri delle loro sezioni piane invadono tutto un campo Γ a tre dimensioni) ammettono ∞^2 *direttrici ortobariche* D , le quali rimangono univocamente individuate dalla condizione di passare per un punto prefissato G_0 di Γ . La determinazione effettiva di queste D dipende dalla integrazione delle (1), cioè da una operazione di rango 2.

Caso di una sfera. — Se S è una sfera di centro O , ogni suo punto interno G è ovviamente baricentro del cerchio minore, secondo cui la sfera è tagliata dal piano per G perpendicolare ad OG . Abbiamo così un esempio caratteristico di solido barosterico, il campo Γ , invaso dai baricentri delle sezioni piane, coincidendo collo stesso S . I versori \mathbf{u} sono radiali; analogo andamento hanno quindi le linee del campo, le quali si identificano per conseguenza cogli ∞^2 raggi spiccati da O .

In definitiva la direttrice ortobarica passante per un dato punto G_0 non è altro che il diametro della sfera guidato per G_0 .

3. — CORPI BAROPIEDI.

I baricentri G delle ∞^3 sezioni piane occupano in questo caso un campo a sole due dimensioni, cioè un pezzo di superficie γ . Abbiamo già notato (n. 1) che ogni punto G di γ è baricentro per ∞^1 sezioni piane τ , le cui normali costituiscono un certo cono N (di vertice G). Partiamoci da un punto G^* in cui il cono N tagli γ . Esisterà allora (per ragione di continuità) almeno una generatrice del cono che tocca la superficie: ne indicheremo il versore con \mathbf{u} . Sempre per continuità, lo stesso comportamento si verificherà in tutto un intorno γ^* di G^* , rimanendo così definito, in ogni punto G di questo intorno, un ben determinato versore *tangenziale* \mathbf{u} .

Assunte, per referenza, sulla superficie γ , coordinate curvilinee qualsivogliono x^1, x^2 , il versore u potrà ritenersi caratterizzato su γ dai suoi parametri λ^1, λ^2 , funzioni del posto, cioè di x^1, x^2 .

Le equazioni

$$(2) \quad \frac{dx^1}{\lambda^1} = \frac{dx^2}{\lambda^2}$$

definiscono (entro γ^*) una congruenza di linee D , dirette in ciascun punto come u . È subito visto che tali linee D sono *ortobariche*. Infatti, in un punto generico G (della regione γ^* di γ), il versore u appartiene al cono N ; perciò siamo sicuri che il piano normale ad u per G taglia S secondo un'area che ha proprio G per baricentro. D'altra parte questo piano normale ad u è senz'altro normale anche alla linea D , che ha, per (2), la direzione di u , c. d. d.

Segue in questo caso da (2) che una direttrice ortobarica D rimane individuata dalla condizione di passare per un assegnato punto G_0 della superficie γ , o, più precisamente, della porzione γ^* cui si riferiscono le precedenti considerazioni. La effettiva determinazione dipende dalla integrazione di (2), cioè da una operazione differenziale di rango 1, mentre nel caso generale barosterico il rango era 2.

4. — TUBI SOTTILI.

Per i tubi (anche grossi), come per le travi, l'esistenza di una linea ortobarica si trova di solito inclusa nella loro definizione di corpi generati da un'area piana (di forma variabile), la quale si muove mantenendosi sempre normale alla linea ed avendo altresì il proprio baricentro sulla linea stessa.

Un tubo, nella sua accezione generale, si definisce geometricamente come sopra, lasciando però cadere la restrizione relativa al baricentro. Con tutto ciò, se si tratta di tubi molto *sottili*, appare ancora intuitivamente plausibile l'esistenza di un'unica linea ortobarica; ma non è certo superfluo di darne una giustificazione matematica.

In relazione a quanto si è detto or ora un tubo sottile si caratterizzerà come segue:

Si fissa una linea interna C che ne segua l'andamento generale, immaginando C rappresentata parametricamente da

$$(3) \quad P = P(s),$$

o, in forma cartesiana equivalente, da

$$(3') \quad x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad z = z(s),$$

dove con s si designa l'arco di C .

Si associa poi ad ogni punto P il piano $\tilde{\omega}$ normale alla C in P e la sezione σ del tubo praticata da detto piano. Sarà σ una certa regione del piano $\tilde{\omega}$ circostante a P , l'ipotesi che si tratta di tubo *sottile*, rispecchiandosi nella circostanza che σ è piccola, ossia che la sua massima dimensione lineare si può trattare come infinitesima, o, più specificamente, si può porre sotto la forma $\epsilon\Delta$, essendo Δ sempre finito, cioè comparabile colla lunghezza l del tubo, ed ϵ un fattore numerico di cui è lecito trascurare il quadrato.

Ogni σ possiede un baricentro G , il quale per altro non coincide in generale con P . Si può soltanto affermare che la linea D , luogo dei baricentri G , è prossima alla C , nel senso che il divario $G - P$ di due punti corrispondenti (cioè appartenenti alla medesima sezione σ) contiene ϵ a fattore. Questo implica (in quanto naturalmente si ammetta che resta pure finita la derivata rapporto ad s di $\frac{G - P}{\epsilon}$) che riescono prossime anche le direzioni delle rispettive tangenti in G e in P .

Ciò premesso, sia $t = \frac{dP}{ds}$ il versore della tangente alla C in P , il quale è, per definizione della sezione σ , ad essa perpendicolare. Consideriamo d'altra parte un qualsiasi versore u poco diverso da t , tale cioè che $u - t$ si possa trattare come infinitesimo (per es. contenga a fattore quel tale ϵ). Sia χ il piano normale ad u in G ; τ la sezione del nostro tubo col piano χ . Questo intersecherà $\tilde{\omega}$ secondo una retta g passante per G . Da $\tilde{\omega}$ a χ si può passare con una rotazione elementare attorno a g .

Diremo ω il vettore infinitesimo (per es. affetto dal fattore ϵ , o da altro η di cui si possano trascurare così il quadrato come il prodotto per ϵ), che rappresenta tale rotazione elementare. Ogni punto Q di $\tilde{\omega}$ si trasferirà, a rotazione compiuta, in un punto Q_1 di χ , dato, come è ben noto, da

$$(4) \quad Q_1 - G = Q - G + \omega \wedge (Q - G).$$

Se Q varia entro la sezione σ , Q_1 varierà entro l'area corrispondente (e congruente) σ_1 di χ , la quale — notiamolo bene — differisce da τ per un'area infinitesima rispetto alla stessa τ , o, ciò che è lo stesso, rispetto a σ . Lo si riconosce ovviamente pensando che (per tubi di spessore qualsivoglia, purchè soltanto gradualmente variabile) il rapporto incrementale $\frac{\tau - \sigma}{\sigma}$ ha lo stesso ordine di grandezza di ω .

Indichiamo con \bar{G} il baricentro della sezione τ . Si ha per definizione, qualunque sia il punto G ,

$$(5) \quad \bar{G} - G = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} (Q_1 - G) d\tau.$$

Potremo poi ritenere, in quanto si seguiti ad attribuire a G il significato di baricentro della sezione σ ,

$$(6) \quad \int_{\sigma} (G - Q) d\sigma = 0.$$

Il campo τ , a meno di infinitesimi rispetto al campo stesso, può essere sostituito con σ_1 , il quale proviene da σ mediante la rotazione elementare ω . Per la rigidità di tale rotazione, è altresì $d\sigma_1 = d\sigma$. Perciò, nella (5), si può sostituire addirittura σ a τ , scrivendo

$$\bar{G} - G = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} (Q_1 - G) d\sigma.$$

Segue di qui, in virtù delle (4) e (6),

$$\bar{G} - G = 0,$$

a meno di infinitesimi d'ordine superiore alle dimensioni trasversali del tubo, ossia G , definito inizialmente quale baricentro di σ , lo è altresì per la sezione τ , la quale, salvo la restrizione qualitativa di stare nell'immediata prossimità di σ , è una sezione piana *qualunque* del tubo, condotta per G . Si può in particolare assumere per σ la sezione normale alla curva D in G , in quanto, come si è avuto cura di rilevare, la D è prossima a C in senso stretto, cioè anche per la direzione delle tangenti in punti corrispondenti G e P .

Rimane così provato che D è *ortobarica*; d'altra parte (nell'ambito infinitesimo di cui si tratta) essa è anche il luogo in cui stanno i baricentri di *tutte* le sezioni piane del nostro *tubo sottile*. Un tale tubo offre pertanto *tipico esempio di corpo barogrammico*.

5. — PIASTRE CILINDRICHE DI SPESSORE PICCOLISSIMO.

Fissiamo l'attenzione sul caso particolarmente semplice di un cilindro retto, circolare, di altezza infinitesima. Sia a l'asse del cilindro, γ la sezione mediana, n il versore perpendicolare alle basi, cioè parallelo alle generatrici.

Ogni piano ω parallelo ad n , il quale seghi il cilindro, lo taglia in un rettangolo, il cui baricentro G appartiene al cerchio γ . Reciprocamente ogni punto G di γ è senz'altro baricentro della sezione fatta col piano per G perpendicolare al piano assiale (o, se si vuole, meridiano) G, a . Il cerchio γ si presenta così come luogo di ∞^2 baricentri G . Ma esso contiene altresì (a meno di infinitesimi d'ordine superiore) anche i baricentri delle sezioni praticate con piani χ prossimi ai piani ω . Per rendersene conto, basta considerare la rotazione elementare con cui si passa da un piano ω

a un generico χ vicinissimo, condotto per G (baricentro del rettangolo secondo cui $\tilde{\omega}$ sega il cilindro), e applicare considerazioni analoghe a quelle svolte al numero precedente per due sezioni assai prossime di un tubo sottile.

Rimane così acquisito che appartengono a γ non solo i baricentri delle ∞^2 sezioni parallele ad n , ma anche (a meno di infinitesimi di secondo ordine) quelli spettanti alle ∞^3 sezioni piane che hanno una giacitura poco diverse dalle prime.

In questo ambito il luogo dei baricentri è puramente superficiale, essendo appunto costituito dalla sezione mediana γ , sicchè (n. 1) *la piastra circolare sottile è baropipeda. Lo stesso vale più generalmente per ogni cilindro di piccolo spessore, qualunque sia la forma della base.*

Tornando al cilindro circolare va rilevato che sono direttrici ortobariche i diametri della sua sezione mediana.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle forme differenziali quadratiche specializzate.*

Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Lo studio delle forme differenziali quadratiche *non specializzate*, o irriducibili, è stato condotto, come è ben noto, a un alto grado di perfezione, soprattutto ad opera del Ricci, con la creazione del *calcolo differenziale assoluto* rispetto a una tale forma. Non altrettanto si può dire delle quadriche differenziali *specializzate*, o riducibili, che ben raramente finora sono state prese in considerazione ⁽²⁾. In effetto lo studio delle varietà riemanniane, che della teoria delle forme differenziali quadratiche costituisce il più notevole campo di applicazioni e interpretazioni, non aveva richiesto finora l'esame del caso riducibile. Ma cercando, recentemente, di applicare allo studio degli intorni d'ordine superiore ad 1 di un punto su di una varietà riemanniana la generalizzazione del calcolo differenziale assoluto del Ricci

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(2) Mi limito a citare, in proposito, i seguenti lavori a cui dovrò più volte riferirmi nel seguito: G. RICCI: *Riducibilità delle quadriche differenziali e ds^2 della Statica einsteiniana*, «Rendiconti Accad. dei Lincei», ser. 5^a, vol. 31, 1922, 1° sem., pp. 65-71, e R. WEITZENBÖCK, *Over de differentiaalvarianten van een enkelvoudig-singulieren tensor g_{ik}* , «Verslag Koninklijke Akad. v. Wetenschappen», Amsterdam, vol. 35, 1926, pp. 225-228. A vedute assai diverse dalle nostre s'ispira il lavoro: *Ueber ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratischen Differentialformen mit verschwindender Determinante*, di J. LENSE, «Jahresbericht. Deut. Mathem. Verein.», 35 B., 1926, pp. 280-294.

ideata dal Vitali ⁽¹⁾ mi si è presentata l'opportunità, direi quasi la necessità, di estendere il calcolo di Ricci (e analogamente, quello generalizzato del Vitali) al caso in cui la forma quadratica fondamentale sia *specializzata*, una o più volte. Ho constatato che, a parte l'indeterminazione di alcuni elementi — indeterminazione la cui natura però è perfettamente determinata — tale estensione riesce senza difficoltà, conservando anche tutte le particolarità più essenziali del calcolo di Ricci. Ciò limitatamente al caso di quelle forme che dirò, secondo il Ricci, *assolutamente specializzate* ⁽²⁾: le quali sole, d'altra parte, mi sembrano presentare un effettivo interesse per le applicazioni geometriche. In questa Nota, di carattere preliminare, riprenderò tuttavia dall'inizio lo studio delle quadriche differenziali specializzate, completando alcuni risultati del Ricci e del Weitzenböck (loc. cit.) e giungendo fino a stabilire le condizioni perchè l'estensione del calcolo assoluto di Ricci risulti possibile. A questa fa seguito un'altra Nota ⁽³⁾ (che verrà prossimamente pubblicata in questi « Rendiconti »); nella quale anzitutto espongo, per sommi capi, la *parte algebrica* del calcolo assoluto rispetto a una forma assolutamente specializzata q volte ($0 \leq q \leq n-1$), indi ne svolgo la *parte analitica*; soffermandomi, naturalmente, soltanto ove si presenta qualche novità nel caso generale rispetto al caso classico, già noto, $q=0$. Indicherò infine, in una terza Nota, un'ulteriore generalizzazione, tale da comprendere anche il calcolo assoluto del Vitali, e atta allo studio, nelle ipotesi più generali, degli intorni dei vari ordini di un punto su di una varietà riemanniana; studio che però viene altrove sviluppato ⁽⁴⁾.

2. Diciamo, secondo Ricci (loc. cit., p. 65) *algebricamente specializzata* q volte una forma quadratica differenziale

$$(1) \quad a_{rs} du^r du^s \quad (p, r, s, t, v = 1, 2, \dots, n)$$

se, mediante un cambiamento delle variabili u^r , essa può ridursi a contenere i differenziali di $n-q$ variabili soltanto; diciamo poi che la (1) è *assolutamente specializzata* q volte, se ciò può farsi in modo che i coefficienti della forma ridotta si esprimono *esclusivamente* per quelle $n-q$ variabili. La condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) sia q volte ($1 \leq q \leq n-1$) algebricamente specializzata è (cfr. Ricci, loc. cit., pp. 66-67) che le equazioni nelle ω^r

$$(2) \quad a_{rs} \omega^r = 0 \quad (5)$$

(1) Ved. spec. VITALI: *Geometria nello spazio hilbertiano*, Bologna, Zanichelli, 1929, e il mio lavoro: *Calcolo assoluto generalizzato di Pascal-Vitali e intorni dei vari ordini di un punto su di una varietà riemanniana*, in corso di pubblicazione negli « Atti R. Istituto Veneto ».

(2) RICCI, loc. cit., p. 65. Il Ricci parla di forme *riducibili* anzichè *specializzate*.

(3) *Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata*.

(4) Nel mio già cit. lavoro: *Calcolo assoluto generalizzato*, ecc.

(5) Intendiamo, qui e nel seguito, che in ogni espressione monomia, rispetto ad un

ammettano q (e q soltanto) sistemi $\omega^r(a, b, c = 1, 2, \dots, q)$ linearmente indipendenti di soluzioni proprie⁽¹⁾, tali che insieme alle

$$(3) \quad a_{rs} \omega_a^r = 0$$

sussistano, con opportuni valori dei coefficienti h_{ab}^c , anche le relazioni

$$(4) \quad \omega_a^r \frac{\partial}{\partial u^r} \omega_b^s - \omega_b^r \frac{\partial}{\partial u^r} \omega_a^s = h_{ab}^c \omega_c^s,$$

o — che è lo stesso, in forza delle ipotesi fatte sulle ω_a^r —

$$(5) \quad \left(\omega_a^r \frac{\partial}{\partial u^r} \omega_b^s - \omega_b^r \frac{\partial}{\partial u^r} \omega_a^s \right) a_{si} = 0.$$

Si noti che le (3), (5) hanno forma invariante per qualsiasi trasformazione lineare,

$$(6) \quad \omega_a^{r'} = \tau_a^{b'} \omega_b^r,$$

(ove i coefficienti $\tau_a^{b'}$ sono funzioni arbitrariamente assegnate delle u^r , tali soltanto che sia $|\tau_a^{b'}| \neq 0$) eseguita sulle ω_a^r . È naturale che anche le $\omega_a^{r'}$ siano, come le ω_a^r , q soluzioni indipendenti delle (2); ma di più, esse soddisfano, come le ω_a^r , anche alle (5).

Le (3) danno, in particolare, che $\|a_{rs}\|$ deve avere caratteristica $n - q$, come è ben naturale⁽²⁾. Questa è condizione *necessaria*, dunque, ma in ge-

indice che sia ripetuto due volte, salvo avviso contrario debba eseguirsi la somma, percorrendo l'intervallo di variabilità preventivamente assegnato a quell'indice.

(1) Cioè, non identicamente nulle.

(2) Sotto questa condizione, il più generale sistema di soluzioni delle (3) si può così esprimere: per $q = 1$

$$(a) \quad \omega^r = \rho \alpha^{rs} u_s,$$

e analogamente, per $q > 1$,

$$(b) \quad \omega^r = \rho \alpha^{(r, r_1, \dots, r_{q-1})(s_1, s_2, \dots, s_q)} v_{r_1, \dots, r_{q-1}} u_{s_1, s_2, \dots, s_q},$$

ove α^{rs} è il complemento algebrico di a_{rs} in $|a_{rs}|$, e più in generale $\alpha^{(r, r_1, \dots, r_{q-1})(s_1, s_2, \dots, s_q)}$ è, in questo determinante, il complemento algebrico del minore $a_{(r, r_1, \dots, r_{q-1})(s_1, s_2, \dots, s_q)}$ (ossia: il complemento algebrico del minore formato dalle righe di posto r, r_1, \dots, r_{q-1} e dalle colonne di posto s_1, s_2, \dots, s_q , moltiplicato per $(-1)^{i_r + i_{s_1} + \dots + i_{s_q}}$, ove i_r ed i_s sono i numeri delle inversioni nelle permutazioni r, r_1, \dots, r_{q-1} ed s_1, s_2, \dots, s_q . Si noti che $\alpha^{(r, r_1, \dots, r_{q-1})(s_1, s_2, \dots, s_q)}$ è un *effettivo tensore* (relativo) controvariante d'ordine $2q$ e di

nerale non sufficiente perchè la (1) sia q volte algebricamente specializzata. Rispetto ad a_{rs} si potranno, anche nell'attuale ipotesi, costruire, con la nota formula

$$(7) \quad \begin{bmatrix} r & s \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{rt}}{\partial u^s} + \frac{\partial a_{st}}{\partial u^r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial u^t} \right)$$

i simboli di Christoffel di 1^a specie per la (1). Avendo le ω_a^r il significato detto poco sopra, in corrispondenza ad esse possiamo costruire i q sistemi simmetrici

$$(8) \quad A_{rs} = \begin{bmatrix} r & s \\ t \end{bmatrix}_a \omega_a^t,$$

che sono ⁽¹⁾ q tensori relativi covarianti del 2° ordine e di peso $2q$, determinati, come le ω_a^r , a meno di una sostituzione lineare arbitraria. Troviamo subito, in conseguenza delle (5), che si ha anche

$$(9) \quad A_{rs} \omega_a^r = 0 \quad (a, b = 1, 2, \dots, q)$$

il che ci mostra che anche le q forme quadratiche $A_{rs} du^r du^s$ sono (almeno) q volte algebricamente specializzate ⁽²⁾ come la (1). In relazione con la (1) hanno effettivo significato, naturalmente, non proprio queste q forme, ma le equazioni

$$(10) \quad \lambda_a^a A_{rs} du^r du^s = 0$$

ottenute eguagliando a zero una loro combinazione lineare arbitraria.

peso $2q$ (supponendosi $q \leq n-1$), emisimmetrico rispetto a r, r_1, \dots, r_{q-1} e ad s_1, s_2, \dots, s_q). Poi: ρ è un'arbitraria funzione scalare delle u^r , w_s è un arbitrario vettore covariante, e così w_{s_1, s_2, \dots, s_q} è un q — vettore covariante arbitrario e $v_{r_1, r_2, \dots, r_{q-1}}$ è un $(q-1)$ — vettore covariante arbitrario. (Si tratta qui di vettori e multivettori dell' E_n rappresentativo: ved. più innanzi, n. 2, fine). Tutte le possibili soluzioni delle (3) si hanno dalle (a) e (b) disponendo degli enti arbitrari ora detti, o anche soltanto di ρ e di $v_{r_1, r_2, \dots, r_{q-1}}$. Le (a), date in questa forma da WEITZENBÖCK (loc. cit., p. 225) sono note e immediate; ritengo nuove, e forse non prive di interesse, le (b).

(1) Come risulta ad es. dalle (b) della nota precedente e dal carattere tensoriale, ivi precisato, dalle $\alpha^{(r, r_1, \dots, r_{q-1})(s_1, s_2, \dots, s_q)}$. Pel caso $q=1$ ved. WEITZENBÖCK, loc. cit., p. 226.

(2) In generale, lo sono appunto q volte. Ciò può vedersi (cfr. WEITZENBÖCK, loc. cit., p. 227, pel caso $q=1$) considerando l'esempio particolare offerto dalla forma $a_{rs} du^r du^s = \varphi_1(u^{\mu+1}, \dots, u^n)(du^1)^2 + \varphi_2(u^{\mu+1}, \dots, u^n)(du^2)^2 + \dots + \varphi_\mu(u^{\mu+1}, \dots, u^n)(du^\mu)^2$, ove $\mu = n-q$ e le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ sono μ funzioni arbitrarie delle sole $u^{\mu+1}, u^{\mu+2}, \dots, u^n$. Essendo in questo caso sempre $a_{rs} = 0$ quando uno almeno degli indici r, s assume uno dei valori $\mu+1, \mu+2, \dots, n, q$ sistemi indipendenti di soluzioni delle (2) soddisfacenti

Geometricamente, se per ciascun punto P di una varietà su cui le u^r siano coordinate curvilinee e di cui la (1) fissi la metrica, s'interpretano le du^r come coordinate cartesiane del punto $P + dP$ su di uno spazio affine n -dimensionale (E_n) contenente P (che diremo l' E_n rappresentativo dell'intorno di P) le (10) rappresenteranno le equazioni di un sistema lineare di coni (di vertice P) $(n-1)$ -dimensionali di direzioni. Questo ha significato, s'intende, nel caso generale in cui esistano dei tensori A_{rs} non nulli:

e può servire di base, in questa ipotesi, per lo studio degli invarianti differenziali della (1); che però risulta essenzialmente diverso da quello relativo al caso irriducibile. Non proseguiremo qui tale ricerca⁽¹⁾ venendo invece ad occuparci, d'ora in poi, proprio del caso in cui i tensori A_{rs} sono tutti nulli.

3. Questo caso si presenta appunto quando la forma (1) è, secondo il Ricci, assolutamente specializzata q volte, e allora soltanto. Ossia: condizione necessaria e sufficiente perchè la forma (1) sia assolutamente specializzata q volte è che si annullino identicamente i tensori A_{rs} corrispondenti a un sistema (e quindi anche, ad ogni altro sistema) di soluzioni indipendenti ω^r delle (2)

soddisfacenti alle (5). E infatti: come già dal Ricci è stato osservato pel caso $q = 1$ (loc. cit., p. 68) così anche per q qualunque è agevole verificare direttamente che la (1) può ridursi a forma $a_{\rho\sigma} du^\rho du^\sigma$ ($\rho, \sigma, \tau = 1, 2, \dots, \mu = n - q$) con $\frac{\partial a_{\rho\sigma}}{\partial u^\pi} = 0$ ($\pi = \mu + 1, \mu + 2, \dots, n$)

allora e solo che esistano q sistemi linearmente indipendenti di soluzioni comuni, ω^r , delle equazioni

alle (5) si hanno ponendo $\omega_a^r = 0$ per $1 \leq r \leq \mu$, $\omega_a^r = \delta_a^{r-\mu}$ per $\mu + 1 \leq r \leq n$. Ne consegue subito che è (non sommando rispetto ad r): $A_{rr} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_r}{\partial u^a}$ per $1 \leq r \leq \mu$, $A_{rr} = 0$ per $\mu + 1 \leq r \leq n$, e sempre $A_{rs} = 0$ per $r \neq s$. Ciò prova quanto volevamo.

(1) Ci limiteremo a pochi cenni preliminari: le (9) e (3) mostrano anzitutto che, nell' E_n rappresentativo, gli ∞^{q-1} coni del sistema lineare (10) hanno tutti a comune col cono $a_{rs} du^r du^s = 0$ una q -direzione singolare, quella definita (in tale E_n) dai vettori ω^r . Potremo eliminare questa, riducendo, simultaneamente, la forma (1) e ciascuna delle forme $\lambda^a A_{rs} du^r du^s$ a contenere $\mu = n - q$ differenziali soltanto. Allora la ricerca

degli invarianti differenziali del 1° ordine della (1) sarà ricondotta a quella degli eventuali invarianti simultanei di un cono $(n - q - 1)$ -dimensionale e di un sistema lineare ∞^{q-1} di coni pure $(n - q - 1)$ -dimensionali di direzioni, col vertice P comune, in un E_{n-q} dell' E_n rappresentativo. Tale ricerca è agevole nel caso $q = 1$, che è stato studiato dal WEITZENBÖCK (loc. cit., pp. 227-228): in questo caso si trova che in generale esistono $n - 2$ invarianti scalari assoluti del 1° ordine. Cosicchè fino dal primo ordine si hanno differenze sostanziali tra questo caso $q = 1$ e il caso irriducibile, $q = 0$.

$$(11) \quad a_{rs} \omega^s = 0, \quad \begin{bmatrix} r & s \\ t \end{bmatrix} \omega^t = 0,$$

soddisfacenti alle (5): ma ciò equivale all'annullarsi dei tensori A_{rs} .

A questo risultato si può arrivare anche per via geometrica. Notiamo che la metrica definita da una forma differenziale quadratica assolutamente specializzata, ad es. q volte, potrà sempre realizzarsi su di una varietà ricmanniana $(n - q)$ -dimensionale esistente in un ambiente euclideo R_N , quale metrica subordinata alla metrica euclidea dell'ambiente ⁽¹⁾. Ora: sia

$$(12) \quad P = P(u^1, u^2, \dots, u^n)$$

la rappresentazione parametrica (ad n parametri) della supposta V_{n-q} in R_N a cui corrisponde la forma (1) pel ds^2 : onde avremo

$$(13)_a \quad a_{rs} = \frac{\partial P}{\partial u^r} \times \frac{\partial P}{\partial u^s}, \quad (13)_b \quad \begin{bmatrix} r & s \\ t \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^r \partial u^s} \times \frac{\partial P}{\partial u^t}.$$

Ma pel fatto che la varietà definita dalla (12) si suppone $(n - q)$ -dimensionale, tra gli n vettori $\frac{\partial P}{\partial u^r}$ ($r = 1, 2, \dots, n$) di R_N ad essa tangenti dovranno sussistere q relazioni lineari indipendenti

$$(14) \quad \omega^r_a \frac{\partial P}{\partial u^r} = 0: \quad (a, b = 1, 2, \dots, q)$$

ora da queste segue subito, corrispondentemente, per le (13),

$$(15)_a \quad \omega^r_a a_{rs} = 0, \quad (15)_b \quad A_{rs} = \begin{bmatrix} r & s \\ t \end{bmatrix}_a \omega^t = 0,$$

e d'altra parte insieme alle (14) dovranno valere le loro conseguenze differenziali

$$(16) \quad \left(\omega^r_a \frac{\partial}{\partial u^r} \omega^s_b - \omega^r_b \frac{\partial}{\partial u^r} \omega^s_a \right) \frac{\partial P}{\partial u^s} = 0,$$

onde seguono le (5). Viceversa se, data la forma (1), esistono q sistemi di soluzioni linearmente indipendenti ω^r_a delle (2) soddisfacenti alle (5), per

(1) Una forma (1) soltanto *algebricamente* specializzata q volte potrà realizzarsi su di una V_j , con $j > n - q$, contenente uno o più sistemi di linee *isotrope*. Vedi E. BOMPIANI: *Sur l'élément linéaire des hypersurfaces*, « Comptes Rendus de l'Acad. », t. 160, 1915, pp. 760-763, pel caso $q = 1, N = n + 1$.

le quali si annullino i corrispondenti tensori A_{rs} , le $(13)_a$ e (14) , considerate come equazioni differenziali nella funzione $P(u^1, u^2, \dots, u^n)$, formano un sistema completo, e quindi esiste, per un punto e in una $(n - q)$ -direzione assegnati ad arbitrio, almeno una V_{n-q} di R_N che ha la forma assegnata (1) come espressione del ds^2 .

L'annullarsi dei tensori A_{rs} esprime che le equazioni $\left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ t \end{smallmatrix} \right\}_{dir} = \left[\begin{smallmatrix} r & s \\ p \end{smallmatrix} \right]$ nelle $\left\{ \begin{smallmatrix} r & s \\ t \end{smallmatrix} \right\}$ sono *compatibili*, e quindi che possono costruirsi enti atti a tenere il ruolo degli usuali simboli di Christoffel di 2ª specie, per una derivazione covariante: infine, è proprio la condizione perchè l'estensione diretta dal calcolo di Ricci a una forma (1) specializzata risulti possibile, come nella seguente Nota verrà precisato.

Matematica. — *Metrica e fondamenti di calcolo differenziale assoluto in uno spazio funzionale continuo.* Nota di F. CONFORTO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

§ 1. — Con la teoria delle funzioni di linea si è incominciato a trattare lo studio dello spazio funzionale, estensione naturale degli iperspazi ordinari, nel caso che si passi da un numero finito ad un numero infinito di variabili. Nello spazio funzionale infatti fungono da coordinate di un punto tutti i valori che una funzione assume in un certo intervallo di variabilità. Le funzioni di linea nel senso di Volterra appaiono come delle quantità scalari definite in ogni punto di detto spazio.

Nello spazio funzionale si può parlare anche della distanza di due punti e dell'angolo di due direzioni e per determinare questi elementi ci si serve della estensione delle formule notissime, che danno questi stessi elementi nel caso degli iperspazi euclidei.

Io mi sono ora proposto di estendere al caso dello spazio funzionale l'osservazione fondamentale che in un ambiente qualsiasi non preesiste alcuna metrica naturale, ma si può invece determinarne una ogniqualvolta si fissi una forma quadratica differenziale. Questa osservazione è il fondamento della Geometria differenziale e del Calcolo Differenziale Assoluto.

Dall'idea di questa estensione io sono stato tratto a definire nello spazio funzionale come distanza fra due punti infinitamente vicini, rappresentati dalle due funzioni $q(x)$ e $q(x) + \delta q(x)$ la formula:

$$ds^2 = \int_0^1 \int_0^1 a(q(x) \xi_1 \xi_2) \delta q(\xi_1) \delta q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

Tutte le funzioni si intendono definite tra 0 e 1. Le $a(q(\overset{1}{x})\xi_1, \xi_2)$ sono funzioni di linea note, contenenti inoltre i due parametri ξ_1 e ξ_2 capaci di variare con continuità tra 0 e 1.

Posta questa definizione della distanza elementare si definiscono in modo del tutto analogo a quanto si fa nel Calcolo Assoluto il modulo di un vettore e l'angolo di due direzioni. Un vettore nel nostro spazio sarà naturalmente definito da una funzione di linea contenente un parametro e al variare di questo parametro, ferma restando la linea, si daranno origine a tutte le infinite componenti del vettore.

In quanto segue si cercherà di estendere allo spazio funzionale il trasporto parallelo di Levi-Civita, si troverà l'equazione delle linee autoparallele e nel caso molto particolare di spazi funzionali euclidei si farà vedere che le linee autoparallele coincidono con le linee geodetiche.

§. 2. — Sia dunque dato il quadrato dell'elemento lineare sotto la forma:

$$(1) \quad ds^2 = \int_0^1 \int_0^1 a(q(\overset{1}{x})\xi_1, \xi_2) \delta q(\xi_1) \delta q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Sia dato un vettore nel punto $q(x)$, che si indicherà con $\psi(q(\overset{1}{x})\lambda)$. Consideriamo il punto $q(x) + \delta q(x)$ e vediamo che cosa si debba intendere per vettore parallelo nel punto $q(x) + \delta q(x)$ al vettore $\psi(q(\overset{1}{x})\lambda)$. Il vettore parallelo sarà della forma $\psi(q(\overset{1}{x})\lambda) + \delta\psi(q(\overset{1}{x})\lambda)$ e si tratta di definire il $\delta\psi(q(\overset{1}{x})\lambda)$.

Per arrivare a questo non è certo da pensare al metodo seguito dal Levi-Civita, ma invece si presta bene il metodo di Weyl. Si pone $\delta\psi(q(\overset{1}{x})\lambda)$ lineare tanto nelle $\psi(q(\overset{1}{x})\lambda)$ quanto nelle $\delta q(\lambda)$, si pone cioè:

$$(2) \quad \delta\psi(q(\overset{1}{x})\lambda) = - \int_0^1 \int_0^1 \Gamma(q(\overset{1}{x})\tau\sigma\lambda) \psi(q(\overset{1}{x})\tau) \delta q(\sigma) d\tau d\sigma$$

e si cerca di determinare le incognite $\Gamma(q(\overset{1}{x})\tau\sigma\lambda)$ in modo che nel trasporto parallelo si conservi il modulo del vettore.

Il modulo del vettore è dato da:

$$(3) \quad M^2 = \int_0^1 \int_0^1 a(q(\overset{1}{x})\xi_1, \xi_2) \psi(q(\overset{1}{x})\xi_1) \psi(q(\overset{1}{x})\xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Calcolando la sua variazione, quando le $\delta\psi(q(\overset{1}{x})\lambda)$ sono definite dalla (2), deve venir zero. Ora la variazione è data da:

$$(4) \quad \delta M^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 a'(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2 \xi_3) \psi(q(\overset{1}{x})\xi_1) \psi(q(\overset{1}{x})\xi_2) \delta q(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 - \\ - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 a(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2) \psi(q(\overset{1}{x})\tau) \psi(q(\overset{1}{x})\xi_2) \Gamma(q(\overset{1}{x})\tau \sigma \xi_1) \delta q(\sigma) d\tau d\sigma d\xi_1 d\xi_2 - \\ - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 a(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2) \psi(q(\overset{1}{x})\xi_1) \psi(q(\overset{1}{x})\tau) \Gamma(q(\overset{1}{x})\tau \sigma \xi_2) \delta q(\sigma) d\tau d\sigma d\xi_1 d\xi_2 = 0.$$

Ponendo:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^1 a(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2) \Gamma(q(\overset{1}{x})\tau \sigma \xi_1) d\xi_1 &= G(q(\overset{1}{x})\xi_2 \tau \sigma) \\ \int_0^1 a(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2) \Gamma(q(\overset{1}{x})\tau \sigma \xi_2) d\xi_2 &= G(q(\overset{1}{x})\xi_1 \tau \sigma) \end{aligned} \right.$$

con qualche cambiamento di variabili negli integrali della (4) questa si trasforma in:

$$(6) \quad \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [a'(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2 \xi_3) - G(q(\overset{1}{x})\xi_2 \xi_1 \xi_3) - G(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2 \xi_3)] \times \\ \times \psi(q(\overset{1}{x})\xi_1) \psi(q(\overset{1}{x})\xi_2) \delta q(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = 0$$

che per la arbitrarietà del vettore ψ e dello spostamento $\delta q(\sigma)$ fornisce:

$$a'(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2 \xi_3) = G(q(\overset{1}{x})\xi_2 \xi_1 \xi_3) + G(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2 \xi_3)$$

e le analoghe:

$$a'(q(\overset{1}{x})\xi_3 \xi_2 \xi_1) = G(q(\overset{1}{x})\xi_3 \xi_1 \xi_2) + G(q(\overset{1}{x})\xi_2 \xi_1 \xi_3)$$

$$a'(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_3 \xi_2) = G(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2 \xi_3) + G(q(\overset{1}{x})\xi_3 \xi_1 \xi_2)$$

che si ottengono supponendo le $a(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2)$ e le $\Gamma(q(\overset{1}{x})\xi_1 \xi_2 \lambda)$ simmetriche rispetto a ξ_1 e ξ_2 , con il che le $G(q(\overset{1}{x})\mu \tau \sigma)$ risultano simme-

triche rispetto a τ e σ . Sommando le prime due delle ultime relazioni e sottraendone la terza si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [a' (q(\overset{1}{x}_0) \xi_1 \xi_2 \xi_3) + a' (q(\overset{1}{x}_0) \xi_3 \xi_2 \xi_1) - a' (q(\overset{1}{x}_0) \xi_1 \xi_3 \xi_2)] = \\ = G (q(\overset{1}{x}_0) \xi_2 \xi_1 \xi_3). \end{aligned}$$

Da questa relazione risulta il fatto che date le funzioni $a(q(\overset{1}{x}_0) \xi_1 \xi_2)$, che determinano la metrica, sono completamente definite le funzioni G a tre parametri, le quali si esprimono per mezzo delle derivate nel senso di Volterra delle funzioni di linea $a(q(\overset{1}{x}_0) \xi_1 \xi_2)$ a due parametri.

Se ora dalla conoscenza delle G si possono ricavare le Γ , si vede come i coefficienti del nostro ds^2 determinino i coefficienti del parallelismo. In generale però le Γ non si potranno ricavare dalle G , poichè le Γ sono legate alle G attraverso le relazioni (5) che sono equazioni integrali di Fredholm di prima specie.

Supponendo però che le Γ sieno completamente determinate si ha per il trasporto parallelo la formula:

$$\delta \psi (q(\overset{1}{x}_0) \lambda) = - \int_0^1 \int_0^1 \Gamma (q(\overset{1}{x}_0) \tau \sigma \lambda) \psi (q(\overset{1}{x}_0) \tau) \delta q (\lambda) d\tau d\lambda.$$

§ 3. - In particolare si può applicare questa formula al vettore $\delta q (\sigma)$ stesso. Si troverà allora:

$$(7) \quad \delta^2 q (\lambda) = - \int_0^1 \int_0^1 \Gamma (q(\overset{1}{x}_0) \tau \sigma \lambda) \delta q (\tau) \delta q (\sigma) d\tau d\sigma.$$

Da questa relazione, ove si noti che nel nostro spazio funzionale una linea è determinata da una funzione di due variabili, giacchè ogni qualvolta si fissa la seconda variabile, che funge da parametro, rimane determinata una linea e quindi un punto del nostro spazio funzionale, discende immediatamente l'equazione delle linee autoparallele, che hanno cioè in ogni punto una tangente parallela alla tangente del punto precedente. Indicando con $q(\lambda s)$ l'equazione della linea, questa sarà autoparallela, se soddisfa all'equazione integro differenziale:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 q (\lambda s)}{\partial s^2} + \int_0^1 \int_0^1 \Gamma (q(\overset{1}{x}_0 s) \tau \sigma \lambda) \frac{\partial q (\tau s)}{\partial s} \frac{\partial q (\sigma s)}{\partial s} d\tau d\sigma = 0.$$

§ 4. — Se come caso particolarissimo la varietà funzionale fosse euclidea, se il suo elemento lineare fosse cioè rappresentato da:

$$(9) \quad ds^2 = \int_0^1 [\delta q(\xi)]^2 d\xi$$

come risulta dalle formule precedenti tutte le $a' (q(\overset{1}{x}) \xi_1, \xi_2)$ e quindi tutte le funzioni G e le Γ sono nulle e l'equazione soprascritta diventa semplicemente:

$$(10) \quad \frac{\partial^2 q(\lambda s)}{\partial s^2} = 0$$

il cui integrale generale è

$$q(\lambda s) = \Phi(\lambda) + s \Psi(\lambda)$$

con $\Phi(\lambda)$ e $\Psi(\lambda)$ funzioni arbitrarie.

Si può infine notare, sempre rimanendo nello spazio funzionale euclideo, che alla medesima equazione differenziale alle derivate parziali (10) si arriva, cercando di determinare le geodetiche.

In questo caso si è tratti ad annullare la variazione dell'integrale (1):

$$(11) \quad \delta \int_0^{s_1} ds = \delta \int_0^{s_1} \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial q(\lambda s)}{\partial s} \right)^2 d\lambda} ds$$

s funge da arco e si ha quindi:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial q(\lambda s)}{\partial s} \right)^2 d\lambda = 1$$

Operando la variazione si ritrova immediatamente l'equazione (10)

$$\frac{\partial^2 q(\lambda s)}{\partial s^2} = 0$$

e quindi si può dire che negli spazi euclidei linee geodetiche e linee auto-parallele coincidono.

Si possono scegliere $\Phi(\lambda)$ e $\Psi(\lambda)$ in modo che la geodetica passi per due punti qualsiasi dello spazio funzionale. Se per $s = 0$ si deve avere $q(\lambda) = \varphi(\lambda)$ e per $s = s_1$, si deve avere $q(\lambda) = \psi(\lambda)$, basta porre

$$q(\lambda s) = \varphi(\lambda) + \frac{1}{s_1} [\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)] s$$

basta cioè porre:

$$\Phi(\lambda) = \varphi(\lambda) \quad , \quad \Psi(\lambda) = \frac{1}{s_1} [\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)]$$

Gli integrali dell'equazione (10) si possono considerare come le rette dello spazio ordinario. Il Vitali ⁽¹⁾ nello studio della geometria dello spazio hilbertiano, li ha chiamati infatti « spazi lineari ad una dimensione » o « rette ».

È da notare però una sostanziale differenza fra lo spazio funzionale, nel quale sono state fatte le considerazioni che precedono e lo spazio hilbertiano. Nello spazio hilbertiano le coordinate di un punto non sono date dagli infiniti valori che assume una funzione quando la variabile varia in un campo determinato, ma dai coefficienti dello sviluppo di questa funzione in una serie di funzioni ortogonali. La considerazione dello spazio hilbertiano è appunto ispirata dai lavori di Hilbert, nei quali, ove si tratti di questioni funzionali, la funzione si ritiene sempre individuata dai coefficienti del suo sviluppo in una serie di funzioni ortogonali.

Il nostro spazio funzionale è invece ispirato ai lavori di Volterra e corrisponde perfettamente al concetto del passaggio dal finito all'infinito, attraverso l'integrale, mentre lo spazio hilbertiano corrisponde a questo stesso passaggio attraverso la serie.

Ciò non impedisce che l'insieme di funzioni definito da un integrale dell'equazione (10), qualora si siano fissate le funzioni $\Phi(\lambda)$ e $\Psi(\lambda)$, insieme che noi siamo stati condotti a definire come una « retta » del nostro spazio funzionale euclideo, non coincida con la « retta » definita dal prof. Vitali.

(1) VITALI, *Geometria dello spazio hilbertiano* (Bologna 1929), p. 86.

Matematica. — *Sulle funzioni metaarmoniche in n variabili.*
 Nota di MIRON NICOLESCO, presentata⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. Sia u una funzione reale, metaarmonica, del punto $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ variabile in un certo dominio D dello spazio euclideo ad n dimensioni, cioè una soluzione dell'equazione seguente alle derivate parziali

$$(1) \quad \Delta u = \lambda u,$$

dove λ è una costante arbitraria, e dove si è posto, come al solito,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

In una recente Nota che porta lo stesso titolo della presente⁽²⁾, il prof. F. Sbrana stabilisce per una tale funzione una formula analoga a quella di Green per le funzioni armoniche, da cui deduce una proprietà di media caratteristica per le funzioni metaarmoniche in n variabili. Il suo risultato può enunciarsi nel modo seguente:

Sia $H_n(r)$ la soluzione di (1), funzione della sola distanza del punto fisso $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ al punto variabile $A(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, che soddisfa inoltre alle condizioni iniziali

$$(2) \quad H_n(0) = 1, \quad \left(\frac{dH_n}{dr} \right)_{r=0} = 0.$$

Si ha allora, per la media dei valori di u sull'ipersfera $\sigma(P, R)$, col centro in P e di raggio R , la seguente formula

$$(3) \quad \frac{1}{\sigma_n(R)} \int_{\sigma(P, R)} u(A) d\sigma(A) = H_n(R) \cdot u(P),$$

dove $\sigma_n(R)$ è la misura dell'area dell'ipersfera $\sigma(P, R)$.

Inversamente: Se, per una funzione $u(P)$, limitata e integrabile in D , e sopra ogni ipersfera contenuta in D , vale la formula (3), dove $H_n(R)$ è la

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(2) F. SBRANA, *Sulle funzioni metaarmoniche in n variabili*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LIII, 1929, pp. 428-436.

soluzione suddetta di (1), tale che non esistono in D soluzioni reali dell'equazione $H'_n(R) = 0$ (esclusa, naturalmente, l'origine), allora la funzione $u(P)$ è metaarmonica in D .

2. Mi propongo, in primo luogo, di ritrovare i risultati precedenti in un modo diretto, molto più semplice, e senza passare per la formula di Green, dimostrando anche un teorema più generale che si può enunciare così:

Se la funzione $u(P)$, limitata e integrabile in D e sopra ogni ipersfera contenuta in D , soddisfa alla relazione seguente

$$(4) \quad \frac{1}{\sigma_n(R)} \int_{\sigma(P,R)} u(A) d\sigma(A) = \Phi_n(R) \cdot u(P)$$

dove $\Phi_n(R)$ è una serie potenziale a raggio di convergenza non nullo, allora la funzione $u(A)$ è metaarmonica in D ⁽¹⁾.

Si riconosce, al comparare i due teoremi, che non è necessario, per dedurre la metaarmonicità di u in D , di supporre nella formula (4) che $\Phi_n(R)$ sia una soluzione determinata di (1), neanche che si abbia $\Phi'_n(R) \neq 0$ in D .

Negli ultimi paragrafi dimostrerò che se il prolungamento di una funzione metaarmonica $u(P)$ all'esterno di un dominio D è possibile, esso è unico.

3. Per la dimostrazione della prima proprietà di Sbrana, ricordiamo una notevole formula del prof. P. Pizzetti ⁽²⁾, estesa da N. Cioranescu ⁽³⁾ al caso di $n > 3$, che dice che per ogni funzione $u(A)$, ammettente derivata di qualunque ordine, si ha

$$(5) \quad \frac{1}{\sigma_n(R)} \int_{\sigma(P,R)} u(A) d\sigma(A) = u(P) + \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{R^{2p}}{2^p \cdot p! \cdot n(n+2) \cdots (n+2p-2)} \Delta^p u(P) \cdot (\Delta^p = \Delta(\Delta^{p-1}), \Delta^1 = \Delta).$$

Ora, questa formula vale in particolare per una funzione u metaarmonica, che ha derivate continue dei primi due ordini. L'equazione (1) mostra,

(1) La proprietà analoga per $n = 2$ è stata da me dimostrata nel 1929, supponendo la funzione reale $u(P)$ analitica in D . Cfr.: MIRON NICOLESCO, *Applications d'un développement en série*, « Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți », vol. III, 1929, pp. 109-110.

(2) P. PIZZETTI, *Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera*, « Rendiconti dei Lincei », vol. XVIII, 1909, pp. 182-185; *Sul significato del secondo parametro differenziale di una funzione sopra una superficie qualunque* (Ibid., pp. 309-316).

(3) N. CIORANESCU, *Sur quelques valeurs moyennes des fonctions et leurs applications*, « Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences », vol. 31, pp. 175-181.

infatti, che in questo caso i Δ^p esisteranno per ogni p . D'altra parte risulta dall'equazione (1)

$$\Delta^2 u = \lambda \cdot \Delta u = \lambda^2 u, \dots, \Delta^p u = \lambda^p u, \dots$$

e quindi, dalla (5) ne risulta la formula di media

$$\frac{1}{\sigma_n(R)} \int_{\sigma(P, R)} u(A) d\sigma(A) = H_n(R) \cdot u(P)$$

nella quale la funzione $H_n(R)$ è data dalla espressione

$$(6) \quad H_n(R) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{R^{2p} \cdot \lambda^p}{2^p \cdot p! n(n+2) \dots (n+2p-2)}.$$

Ora, il fatto interessante è che la $H_n(R)$ soddisfa automaticamente alle condizioni imposte *a priori* dal prof. F. Sbrana⁽¹⁾.

4. Colla stessa facilità si dimostra anche il teorema enunciato al n. 2. Infatti, supposto che $u(P)$ verifichi la relazione (4), ne risulta che la $\Phi_n(R)$ è una funzione sola di R^2 e perciò abbiamo

$$\Phi_n(R) = a_0 + a_1 R^2 + a_2 R^4 + \dots + a_p R^{2p} + \dots$$

e quindi, in virtù della (4),

$$(7) \quad \frac{1}{\sigma_n(R)} \int_{\sigma(P, R)} u(A) d\sigma(A) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p R^{2p} \cdot u(P).$$

D'altra parte, ragionando come al n. 6 della Nota citata di F. Sbrana, troveremo che la $u(P)$ ammette derivate di qualunque ordine, e quindi, vale per questa funzione lo sviluppo (5).

Identificando le formule (5) e (7), troviamo

$$(8) \quad a_0 = 1, \quad a_1 u = \frac{1}{2n} \Delta u, \quad a_2 u = \frac{1}{2^2 \cdot n(n+2)} \Delta^2 u, \dots$$

perciò, dalla seconda di queste relazioni risulta che la u è metaarmonica colla costante λ uguale a $2na_1$.

La costante λ non può essere zero, il che implicherebbe che a_1 sia

(1) F. SBRANA, Nota citata, p. 429.

zero. Infatti, dalle (8) risulterebbe che sono nulle tutte le a e perciò la $\Phi_n(R)$ sarebbe una costante.

Ne segue senz'altro che $\Phi_n(R)$ è la soluzione di (1), soddisfacente alle condizioni iniziali (2). Questa osservazione ci permetterà di enunciare il risultato sotto una forma più espressiva e appena più generale:

Conservate le ipotesi d'integrabilità di u nel dominio D , si ha che:
Se la media dei valori di u sopra ogni ipersfera $\sigma(P, R)$ col centro in P e il raggio R , è il prodotto di una funzione $\varphi_n(R)$ per una funzione $v(P)$, saranno le tre funzioni $u(P)$, $\varphi_n(R)$, $v(P)$ metaarmoniche del medesimo parametro λ e di più si avrà $\frac{v(P)}{u(P)} = \text{cost.}$

5. La formula di media (3) ci servirà a stabilire un teorema d'unicità pel prolungamento delle funzioni metaarmoniche, seguendo lo stesso metodo che il prof. D. Pompeiu ha utilizzato per dare una nuova dimostrazione di un teorema analogo per le funzioni armoniche ⁽¹⁾:

Se una funzione $u(P)$ è metaarmonica entro un dominio D dello spazio euclideo ad n dimensioni e se essa si può prolungare all'esteriore di D , il prolungamento è unico.

Sia, infatti, D_1 un dominio avente con D una porzione π di frontiera comune, e sia v una funzione definita in D_1 , metaarmonica di medesimo parametro λ che la u , e tale che $v = u$ in tutti i punti di π . Voglio dimostrare che non possono esistere due tali funzioni $v(P)$.

Infatti, se il prolungamento della u in D_1 fosse possibile con due funzioni v , diciamo v e v_1 , si otterrebbe per sottrazione una funzione $g(P)$, metaarmonica nel dominio $(D + D_1)$ e tale che

$$\begin{aligned} g(P) &\equiv 0 \quad \text{in } D \text{ e su } \pi, \\ g(P) &\equiv v_1(P) - v(P) \quad \text{in } D_1. \end{aligned}$$

Si tratta di dimostrare che la funzione $g(P)$ è identicamente nulla anche in D_1 .

6. Per questo, ricordiamo in primo luogo una proprietà trovata dal prof. Pompeiu ⁽²⁾, cioè: *Considerata una funzione $F(x, y)$, definita in tutto il piano e continua, se per ogni cerchio Γ , di centro arbitrario e di raggio costante r , si ha*

$$(9) \quad \int_{\Gamma} F(x, y) dx dy = \text{cost.}$$

la funzione F è una costante.

(1) D. POMPEIU, *Sur l'unicité du prolongement des fonctions harmoniques*, « Rendiconti dei Lincei », to. IX, serie 6^a, pp. 631-632.

(2) D. POMPEIU, *Sur une propriété intégrale des fonctions de deux variables réelles*, « Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences », 5^e série, to. XV, pp. 265-269.

Per la dimostrazione, il prof. Pompeiu premette il lemma: *Supposta la (9) verificata sopra ogni cerchio Γ , la funzione F prende lo stesso valore in due punti diametralmente opposti di Γ .*

Ora, questo lemma vale anche per un numero qualunque di dimensioni e si può enunciare così: *Se la media dei valori di una funzione $g(P)$ all'interno di ogni ipersfera $\sigma(P, R)$ di raggio costante e contenuta in D , è costante, allora la funzione $g(P)$ prenderà gli stessi valori in due punti diametralmente opposti di $\sigma(P, R)$.*

Supponendo questo lemma vero per un numero n di dimensioni, è facile dimostrarlo per $n + 1$ dimensioni. Dimostriamolo, per es., per $n = 3$:

Faremo vedere, in primo luogo, che il lemma di Pompeiu ($n = 2$) è vero anche pei cerchi Γ di una sfera. Prendendo, allora, due sfere vicine dedurremo al limite che la media dei valori $g(P)$ sopra ogni emisfera di $\sigma(P, R)$ è costante e perciò $g(P)$ prende gli stessi valori nei punti diametralmente opposti di ogni cerchio massimo di $\sigma(P, R)$ vale a dire nei punti diametralmente opposti della $\sigma(P, R)$ stessa.

In modo analogo si passa da $n = 3$ ad $n = 4$ ecc.

7. Ritorniamo adesso per dimostrare che la $g(P)$ è zero in D_1 . Prendiamo un punto A in D e un punto arbitrario B in D_1 e uniamo questi punti con una linea K contenuta in $(D + D_1)$. Si può evidentemente trovare un numero positivo ρ , assai piccolo perchè ogni ipersfera, di raggio ρ e avente il centro su K , sia contenuta nel dominio $(D + D_1)$ e, di più, la ipersfera Σ , di centro A di raggio ρ , sia contenuta in D . All'interno e sulla periferia di quest'ultima ipersfera si avrà per ipotesi $g = 0$. La linea K taglia la ipersfera Σ in un punto A' . Consideriamo la ipersfera Σ' di centro A' e di raggio ρ . Questa ipersfera può essere completamente interna a D , oppure contenere punti del dominio D_1 . In tutti casi si può mostrare facilmente che g è anche nulla all'interno di Σ' . Basterà mostrarlo per la porzione L' di volume di questa ipersfera esterna a Σ . Osserviamo per questo, che ogni punto C' di L' ha il suo simmetrico C , rispetto alla ipersfera Σ , all'interno di Σ . Allora, denotando con C'' il punto medio della retta CC' e con $\sigma(C'', r)$ la ipersfera di diametro $CC' = 2r$, si avrà, per la formula (3),

$$\frac{1}{\sigma_n(r)} \cdot \int_{\sigma(C'', r)} g d\sigma = H_n(r) \cdot g(C'') = 0$$

perchè il punto C'' è sull'ipersfera Σ . Si ha dunque, in virtù del lemma dimostrato al numero precedente,

$$g(C') = g(C) = 0.$$

La ipersfera Σ' taglia la linea K in un punto A'' . Indicando con Σ'' la ipersfera di centro A'' e di raggio ρ , la g sarà, per le stesse ragioni, nulla

anche all'interno di Σ'' , e così via: Si otterrà in questo modo una successione di ipersfere $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \dots, \Sigma^{(n)}$, in numero evidentemente finito, entro una delle quali si troverà il punto B. Come all'interno di tutte le ipersfere g è nulla, sarà anche

$$g(B) = 0$$

e il teorema d'unicità è dimostrato.

Matematica. — *Sur quelques problèmes aux limites de la théorie du potentiel logarithmique.* Nota di E. OKHLOPKOVA, presentata ⁽¹⁾ dal corrisp. U. CISOTTI.

Le but de cette Note est l'application de la théorie des fonctions de la variable complexe à la solution de quelques problèmes aux limites de la théorie du potentiel logarithmique pour le cercle.

La question concerne la construction de la fonction $U(x, y)$ harmonique à l'intérieur du cercle C de rayon un et ayant pour centre l'origine, satisfaisant sur la circonférence γ de ce cercle à certaines conditions.

Je considère les deux types de conditions. Les conditions du premier type sont de la forme:

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial u} + l \frac{\partial U}{\partial s} + kU = f$$

qui contiennent la dérivée normale, la dérivée tangentielle et la fonction même $U(x, y)$. Les conditions aux limites de la forme (1) ont été considérées par H. Poincaré dans la théorie des marées (*Leçons de Mécanique Céleste*, t. III, p. 258). Le fait que la dérivée tangentielle entre dans les conditions aux limites, change le caractère du problème en comparaison avec des cas plus étudiés, quand les conditions aux limites n'enferment que la dérivée normale. En particulier, le problème homogène peut avoir des solutions distinctes du zéro, tandis que le problème non homogène aura les solutions sans aucunes conditions concernant le dernier membre f .

Dans la série de mes exemples je pousse la solution jusqu'au bout en mettant en évidence les circonstances différentes relatives à la possibilité et le degré de l'indétermination du problème. Un des exemples considérés était étudié par M. Blondel ⁽²⁾.

(1) Nella seduta del 2 novembre 1930.

(2) « Comptes rendus », t. 152, 1911, pp. 1287-1290.

Les conditions du second type sont les conditions aux limites qui contiennent des dérivées du second ordre. Un cas particulier de ces conditions aux limites a été considéré par M. Bottasso ⁽¹⁾. Je considère le cas étudié par M. Bottasso et encore un cas des conditions aux limites du second ordre.

En résolvant les problèmes je me sers de la méthode due à M. N. Muskhelishvili (Mouskhelichvili) ⁽²⁾.

L'application de cette méthode donne la possibilité d'introduire l'uniformité dans la solution des problèmes pour les formes différentes des conditions aux limites. Voilà pourquoi je me suis arrêtée non seulement sur les cas nouveaux, mais j'expose aussi l'application de la méthode indiquée aux problèmes considérés par M. M. Blondel et Bottasso.

1. Supposons que dans la condition (1) on a

$$l = a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \sin \vartheta, \quad k = b_0 + b_1 \cos \vartheta + b_2 \sin \vartheta,$$

a_0, a_1, \dots, b_2 désignant des constantes données et que $f = f(\vartheta)$ est une fonction donnée de l'arc ϑ du contour γ .

Soit $2U = \varphi(\xi) + \bar{\varphi}(\bar{\xi})$ ⁽³⁾. En exprimant la condition (1) par la fonction $\varphi(\xi)$, en multipliant l'égalité ainsi obtenue par $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi}$ et en intégrant le long de γ , nous obtenons pour la fonction $\varphi(\xi)$ l'équation différentielle ⁽⁴⁾:

$$\begin{aligned} & [A\xi^3 + 2(1 + a_0 i)\xi^2 - \bar{A}\xi]\varphi'(\xi) + [\bar{B}\xi^2 + 2b_0\xi + B]\varphi(\xi) = B\alpha_0 + \\ & + (A - \bar{B})(\alpha_1 - i\beta_1)\xi - 2b_0\alpha_0\xi + \frac{2\xi}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2fd\xi'}{\xi' - \xi} - \bar{B}\alpha_0\xi^2 = F(\xi) \end{aligned}$$

où $A = a_2 + ia_1$, $\bar{A} = a_2 - ia_1$, $B = b_1 + ib_2$, $\bar{B} = b_1 - ib_2$ et $\alpha_0, \alpha_1 + i\beta_1$ sont les deux coefficients premiers du développement de la fonction $\varphi(\xi)$ en série du Maclaurin.

(1) «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino», 1915, vol. L, disp. 9^a, pp. 645-668, *Sopra un nuovo problema dei valori al contorno per un cerchio*.

(2) *Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique*, Tiflis, Édition de l'Université, 1922; *Sur le problème fondamental d'hydrodynamique à deux dimensions*, «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. VII, serie 6^a, 1^o sem. 1928, pp. 995-1002.

(3) $\bar{\varphi}(\bar{\xi})$ est par définition l'expression conjuguée à $\varphi(\xi)$.

(4) Comparez N. MOUSKHELICHVILI, loc. cit.

La solution de cette équation est la forme :

$$(2) \quad \varphi(\xi) = e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\bar{B}\xi^2 + 2b_0\xi + B}{A\xi^3 + 2(1+a_0i)\xi^2 - \bar{A}\xi} d\xi} \left\{ C + \int_{\xi_0}^{\xi} e^{\int_{\xi_0}^{\eta} \frac{\bar{B}\xi^2 + 2b_0\xi + B}{A\xi^3 + 2(1+a_0i)\xi^2 - \bar{A}\xi} d\xi} \frac{F(\xi)}{A\xi^3 + 2(1+a_0i)\xi^2 - \bar{A}\xi} d\xi \right\}.$$

La formule (2) contient linéairement 4 constantes arbitraires C, α_0, α_1 et β_1 , qui sont à déterminer.

Pour que l'expression (2) soit effectivement la solution de notre problème, il faut qu'elle soit holomorphe à l'intérieur de γ et que les deux premiers coefficients du développement de la fonction $\varphi(\xi)$ soient égaux respectivement aux valeurs α_0 et $\alpha_1 + i\beta_1$.

Ecrivons le développement de $\varphi(\xi)$ au voisinage du point $\xi = 0$:

$$(3) \quad \varphi(\xi) = \xi^{\frac{B}{A}} \mathfrak{P}(\xi) \left\{ C + \int_{\xi_0}^{\xi} \xi^{-\frac{B}{A}-1} \mathfrak{P}(\xi) \left[B\alpha_0 + (A - \bar{B})(\alpha_1 - i\beta_1)\xi - \right. \right. \\ \left. \left. - 2b_0\alpha_0\xi + \frac{2\xi}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2fd\xi'}{\xi' - \xi} - \bar{B}\alpha_0\xi^2 \right] \cdot \left[-\frac{1}{A} - \frac{2(1+a_0i)\xi}{\bar{A}^2} - \dots \right] d\xi \right\},$$

où le symbole $\mathfrak{P}(\xi)$ indique la série de Maclaurin.

En comparant les premiers coefficients des deux membres de cette égalité nous obtenons l'identité $\alpha_0 = \alpha_0$; en comparant les coefficients auprès de ξ , nous obtenons l'égalité :

$$(4) \quad \alpha_1(a_2 - b_1) + \beta_1(a_1 + b_2) = 2b_0\alpha_0 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta.$$

Si $\frac{B}{A}$ est un nombre positif entier ou 0, dans le développement (3) de la fonction $\varphi(\xi)$ entre un terme contenant $\log \xi$. En annulant son coefficient, nous obtenons une relation nouvelle entre les constantes inconnues α_0, α_1 , et β_1 . Si au contraire $\frac{B}{A}$ n'est pas un nombre positif entier ou 0, pour que la fonction $\varphi(\xi)$ soit holomorphe au point $\xi = 0$, il est nécessaire de poser que la valeur $C + C''$ est égale à zero, C'' étant le terme indépendant de ξ dans la série, obtenu par l'intégration dans le deuxième membre de l'égalité (3).

Il faut écrire ensuite le développement de la fonction $\varphi(\xi)$ au voisinage du point $\xi = a$, où a est la racine de l'équation : $A\xi^2 + 2(1+a_0i)\xi - \bar{A} = 0$.

inférieure en module à l'unité : Ce développement nous donnera les résultats analogues aux précédents.

Par exemple, si $\lambda = \frac{\bar{B}a^2 + 2b_0a + B}{A(a^2 + \bar{A})}$ est égale à un nombre négatif entier ou 0, dans le développement de la fonction $\varphi(\xi)$ entre le terme contenant $\log(\xi - a)$ et il faut annuler son coefficient.

Nous excluons provisoirement le cas $A = 0$.

2. En appliquant la théorie générale, exposée ci-dessus, considérons, comme exemple, quelques problèmes particuliers.

Considérons le cas où $k(\vartheta) = l'(\vartheta) = -a_1 \sin \vartheta + a_2 \cos \vartheta$. L'équation (4) sera :

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta = 0$$

ce qui donne la condition nécessaire pour la solution du problème. Dans ce cas nous aurons encore $\lambda = +1$.

Faisons tous les calculs, concernant le cas particulier suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial u} + \sin \vartheta \cdot \frac{\partial U}{\partial S} + \cos \vartheta \cdot U = f(\vartheta).$$

Si nous posons

$$\varphi(\xi) = \alpha_0 + \xi \psi(\xi),$$

nous aurons pour $\psi(\xi)$ l'équation :

$$(5) \quad (\xi^2 + 2\xi - 1) \psi'(\xi) + (2\xi + 2) \psi(\xi) = -2\alpha_0 + \omega(\xi)$$

où $\omega(\xi)$ est la série ordonnée suivant les puissances de ξ aux coefficients connus.

La solution de l'équation (5) est :

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 2\xi - 1} \left\{ C + \int_0^\xi [\omega(\xi) - 2\alpha_0] d\xi \right\}$$

et il faut poser $C = - \int_0^a [\omega(\xi) - 2\alpha_0] d\xi$, où a est la racine de l'équa-

tion $\xi^2 + 2\xi - 1 = 0$. La constante α_0 reste arbitraire.

Le problème homogène dans le cas actuel admet une solution distincte du zéro. Nous obtenons cette solution, en posant $\omega(\xi) = 0$.

Dans le cas des conditions aux limites de la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial s} + U = f(\vartheta),$$

la solution est fournie par la partie réelle de la fonction :

$$\varphi(\xi) = \left(\frac{\xi - b}{\xi - a} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ C + \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{\xi - a}{\xi - b} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(\xi) - i\beta_1}{\xi^2 + 2\xi - 1} d\xi \right\},$$

où a et b sont les racines de l'équation $\xi^2 + 2\xi - 1 = 0$ et $\omega(\xi)$ est la fonction connue. L'égalité :

$$C + \int_0^a \left(\frac{\xi - a}{\xi - b} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(\xi) - i\beta_1}{\xi^2 + 2\xi - 1} d\xi = 0$$

détermine la constante C . La solution contient une constante arbitraire.

Le problème homogène a aussi dans ce cas la solution distincte du zéro, quoique en résolvant le problème non homogène nous n'avons imposé nulles conditions particulières à la fonction $f(\vartheta)$.

3. Le cas $A = 0$ présente des difficultés en fait de calcul. Indiquons sommairement la méthode de la résolution.

Dans ce cas nous obtenons pour la fonction $\varphi(\xi)$ l'équation différentielle,

$$(6) \quad 2(1 + a_0 i) \xi^2 \varphi'(\xi) + [\bar{B} \xi^2 + 2b_0 \xi + B] \varphi(\xi) = B \alpha_0 - \bar{B}(\alpha_1 - i\beta_1) \xi - 2b_0 \alpha_0 \xi + \frac{2\xi}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2fd\xi'}{\xi' - \xi} - \bar{B} \alpha \xi^2,$$

dont la solution est de la forme :

$$\varphi(\xi) = \xi^{\frac{1}{2} + m_2} e^{-m_1 \xi + m_3 \frac{1}{\xi}} \left\{ C + \int_{\xi_0}^{\xi} \xi^{m_2 - 2} e^{m_1 \xi - m_3 \frac{1}{\xi}} \frac{F(\xi)}{2(1 + a_0 i)} d\xi \right\}$$

où

$$F(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s \xi^s, \quad \gamma_0 = B \alpha_0, \quad \gamma_1 = -\bar{B}(\alpha_1 - i\beta_1) - 2b_0 \alpha_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta.$$

Nous obtenons la solution de l'équation (6) en forme de la série de Laurent. Déterminons les relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients

de cette série. Posons pour ce but dans l'équation (6) $\varphi(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mu_n \xi^n$ et comparons les coefficients des puissances égales de ξ . Nous obtenons ainsi les relations suivantes:

$$-2(1 + a_0 i) \mu_{-1} + \bar{B} \mu_{-2} + 2b_0 \mu_{-1} + B \mu_0 = B \alpha_0$$

$$\bar{B} \mu_{-1} + 2b_0 \mu_0 + B \mu_1 = -\bar{B}(\alpha_1 - i\beta_1) - 2b_0 \alpha_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta$$

$$-4(1 + a_0 i) \mu_{-2} + \bar{B} \mu_{-3} + 2b_0 \mu_{-2} + B \mu_{-1} = 0.$$

Si nous posons dans ces égalités $\mu_{-1} = 0$ et $\mu_{-2} = 0$, les coefficients de toutes les puissances négatives seront égaux à zéro et $\mu_0 = \alpha_0$. Il reste encore la condition pour que μ_1 coïncide avec $(\alpha_1 + i\beta_1)$, ce qui donne la relation suivante:

$$2b_0 \alpha_0 + b_1 \alpha_1 + b_2 \beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta.$$

Comme un cas particulier de la théorie précédente, on peut examiner la condition:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + l \frac{\partial u}{\partial s} + kU = f(\vartheta)$$

où l et k sont les constantes.

Si la fonction $f(\vartheta)$ est une fonction périodique continue à variation bornée, on peut la donner sous la forme de la série de Fourier: $f(\vartheta) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta \text{ et en ce cas nous aurons:}$$

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left[\frac{A_n(k+n) - nl B_n}{(k+n)^2 + n^2 l^2} \cos n\vartheta + \frac{B_n(k+n) + nl A_n}{(k+n)^2 + n^2 l^2} \sin n\vartheta \right].$$

4. Etudions maintenant les conditions aux limites du second ordre:

$$(7) \quad Ax^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2Bxy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + Cy^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(\vartheta)$$

où A, B, C sont constantes et $f(\vartheta)$ est une fonction donnée sur le contour γ . Soit

$$A = p + q + 1, \quad B = p - 1, \quad C = p - q + 1,$$

où p et q satisfont aux conditions:

$$p \neq 0, \quad q \neq 0, \quad p^2 \neq 1, \quad q^2 \neq 1, \quad q^2 - 4p \neq 0.$$

Ce problème a été résolu par M. Bottasso (1). La condition (7) donne pour la fonction $\varphi(\xi)$:

$$(8) \quad \varphi''(\xi) = \frac{F(\xi)}{p\xi^4 + q\xi^2 + 1},$$

où

$$F(\xi) = 2(\alpha_2 + i\beta_2) + 2 \cdot 3(\alpha_3 + i\beta_3)\xi - [2q(\alpha_2 - i\beta_2) + 3 \cdot 4(\alpha_4 - i\beta_4)]\xi^2 - \\ - 2 \cdot 3(\alpha_3 - i\beta_3)\xi^3 - 2(\alpha_2 - i\beta_2)\xi^4 + \frac{\xi^2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2fd\xi'}{\xi' - \xi}.$$

Développons maintenant les deux membres de l'égalité (8) en série suivant les puissances de ξ .

En comparant les coefficients de ξ^2 dans les deux membres de cette égalité, nous obtenons:

$$12(\alpha_4 + i\beta_4) = -2q(\alpha_2 - i\beta_2) - 12(\alpha_4 - i\beta_4) - 2q(\alpha_2 + i\beta_2) + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta.$$

Nous voyons, que la partie imaginaire $12i\beta_4$ est arbitraire. Désignons par ih cette partie. La comparaison des parties réelles donne:

$$24\alpha_4 + 4q\alpha_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta,$$

par conséquent:

$$\varphi''(\xi) = \frac{2(\alpha_2 + i\beta_2) + 2 \cdot 3(\alpha_3 + i\beta_3)\xi - ih\xi^2 - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta \xi^2 - \\ - 2 \cdot 3(\alpha_3 - i\beta_3)\xi^3 - 2(\alpha_2 - i\beta_2)\xi^4 + \frac{\xi^2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2fd\xi'}{\xi' - \xi}}{p\xi^4 + q\xi^2 + 1}.$$

(1) Voir BOTTASSO, loc. cit.

Désignons :

$$\varphi''(\xi) = \Phi(\xi) \quad , \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f \frac{\xi' + \xi}{\xi' - \xi} d\xi' = F_1(\xi),$$

Nous avons maintenant :

$$\Phi(\xi) = \frac{\Phi_0 + \Phi_1 \xi + \bar{\Phi}_0 \xi^+ - \bar{\Phi}_1 \xi^+ + i b \xi^2 + \xi^2 F_1(\xi)}{p \xi^4 + q \xi^2 + 1}$$

où Φ_0 et Φ_1 sont les valeurs de la fonction $\Phi(\xi)$ et de sa première dérivée au point $\xi = 0$, et $\bar{\Phi}_0, \bar{\Phi}_1$, — les valeurs conjuguées.

Nous avons obtenu pour la fonction $\Phi(\xi)$ l'expression tout identique à celle qu'a obtenue M. Bottasso, en résolvant le problème posé. La détermination des constantes Φ_0, Φ_1 et b , qui entrent dans la solution, est exposée en détail dans l'ouvrage de M. Bottasso.

Étudions maintenant le cas général des conditions aux limites du second ordre avec des coefficients constants :

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} + kU = f(\vartheta).$$

Nous obtenons pour la fonction $\varphi(\xi)$ l'équation différentielle :

$$a\varphi''(\xi) + b\varphi'(\xi) + k\varphi(\xi) = F(\xi)$$

où

$$\begin{aligned} a &= A - C + 2Bi \quad , \quad b = D + Ei \quad \text{et} \quad F(\xi) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2fd\xi'}{\xi' - \xi} 2\bar{a}(\alpha_2 - i\beta_2) - \bar{b}(\alpha_1 - i\beta_1) - k(\alpha_0 - i\beta_0). \end{aligned}$$

L'intégrale générale de cette équation est de la forme :

$$\varphi(\xi) = M_1 e^{m_1 \xi} + M_2 e^{m_2 \xi}$$

où

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ak}}{2a} \quad , \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ak}}{2a}$$

$$M_1 = \int \frac{F(\xi)}{a(m_1 - m_2)} e^{-m_1 \xi} d\xi + c \quad , \quad M_2 = - \int \frac{F(\xi)}{a(m_1 - m_2)} e^{-m_2 \xi} d\xi + c_2.$$

Dans le cas particulier : $f(\vartheta) = A_0 + A_1 \cos \vartheta + B_1 \sin \vartheta$ nous obtenons la solution du problème sous forme :

$$\varphi(\xi) = \frac{2A_0 - 2\bar{a}(\alpha_2 - i\beta_2) - \bar{b}(\alpha_1 - i\beta_1) - k(\alpha_0 - i\beta_0)}{k} - \frac{b(A_1 - iB_1)}{k^2} + \frac{A_1 - iB_1}{k}\xi + c_1 e^{m_1 \xi} + c_2 e^{m_2 \xi}.$$

Pour la détermination des constantes $(\alpha_0 - i\beta_0)$, $(\alpha_1 - i\beta_1)$, $(\alpha_2 - i\beta_2)$ qui entrent dans le solution, nous obtenons les égalités suivantes:

$$k^2(\alpha_0 + i\beta_0) = 2kA_0 - 2\bar{a}k(\alpha_2 - i\beta_2) - \bar{b}k(\alpha_1 - i\beta_1) - k^2(\alpha_0 - i\beta_0) - b(A_1 - iB_1) + (c_1 + c_2)k^2,$$

$$k(\alpha_1 + i\beta_1) = A_1 - iB_1 + k(c_1 m_1 + c_2 m_2),$$

$$2(\alpha_2 + i\beta_2) = c_1 m_1^2 + c_2 m_2^2.$$

Les constantes c_1 et c_2 sont complètement arbitraires.

Matematica. — *Sur la courbure des variétés non-holonomes.*
Nota di V. HLAŤATÝ, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans la Note présente, j'étudie quelques questions qui concernent la courbure d'une variété non-holonyme. Les résultats ne sont pas tous nouveaux, comme on peut s'en persuader, en lisant le travail de M. Schouten⁽²⁾, d'où j'emprunte aussi la notation. Je les publie quand même, car ils se présentent sous un aspect nouveau, ce qui est dû à la méthode. On verra que le même algorithme qui nous permet d'étudier les questions intrinsèques de la géométrie des variétés holonomes est aussi capable de résoudre les questions analogues de la géométrie des variétés non-holonomes.

1. Désignons par L_n une variété à n dimensions, douée d'une connexion linéaire générale, aux coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ et par L_m^m une variété à m (> 1) dimensions, dans L_n , douée de la connexion induite par L_n . Sans restreindre la généralité, on peut supposer que L_m^m soit formée par m champs vectoriels u^a ($a, b, c, d \dots = 1, \dots, m$) linéairement indépendants et on peut construire $n - m$ champs vectoriels u^e ($e, f, g, h \dots = m + 1, \dots, n$) de telle manière, que les vecteurs u_i^v ($i, j, k, l \dots = 1, \dots, n$) soient linéairement indépendants.

(1) Nella seduta del 16 novembre 1930.

(2) SCHOUTEN, *Ueber nicht-holonome Übertragung in einer L_n* (« Math. Ztschr. », Bd. 30, (29), 149-172).

Cela nous permet de trouver n champs vectoriels u_λ^i linéairement indépendants qui satisfont les conditions

$$u_{\lambda}^i u_{\lambda}^j = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ 1 & \text{pour } i = j. \end{cases}$$

En désignant par A_λ^v et B_λ^v les affineurs d'unité de L_n et L_n''' on peut poser

$$A_\lambda^v = \sum_i u_{\lambda}^v u_{\lambda}^i, \quad B_\lambda^v = \sum_{i,a} u_{\lambda}^v u_{\lambda}^a$$

et

$$C_\lambda^v = A_\lambda^v - B_\lambda^v = \sum_{i,e} u_{\lambda}^v u_{\lambda}^e.$$

Soit ∇_μ le symbole de la dérivée covariante de L_n et ∇'_μ celui de la dérivée covariante de L_n''' ainsi que l'on a pour un affineur $v_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{v_1 \dots v_s}$ dans L_n'''

$$(1) \quad \nabla'_\mu v_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{v_1 \dots v_s} = B_{\mu \lambda_1 \dots \lambda_p}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_p} v_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{v_1 \dots v_s} \nabla_\alpha v^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}, \quad B_{\mu \lambda_1 \dots \lambda_p}^{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_p} v_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{v_1 \dots v_s} = \\ = B_\mu^\alpha B_{\lambda_1}^{\alpha_1} \dots B_{\lambda_p}^{\alpha_p} v_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{v_1 \dots v_s}$$

Plus tard nous aurons encore besoin des affineurs

$$(2) \quad \begin{cases} H_{\mu\lambda}^{\cdot v} = B_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha B_\beta^v, & L_{\mu\lambda}^{\cdot v} = B_{\mu\beta}^{\alpha v} \nabla_\alpha B_\lambda^\beta, \\ S_{\lambda\mu}^{\cdot v} = \Gamma_{[\lambda\mu]}^v, & S_{\lambda\mu}^{\prime \cdot v} = B_{\lambda\mu\gamma}^{\alpha\beta v} S_{\alpha\beta}^{\cdot v} \\ Z_{\mu\lambda}^{\cdot v} = H_{[\mu\lambda]}^{\cdot v} + B_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} C_\gamma^v S_{\alpha\beta}^{\cdot v}. \end{cases}$$

On constate facilement que l'anneur $Z_{\mu\lambda}^{\cdot v}$ est indépendant de la connexion L_n (Voir l'équation (12)_c). Si p est un champ scalaire, on a d'après (1)

$$(3) \quad \nabla'_{[\mu} \nabla'_{\lambda]} p = B_{[\mu\lambda]}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha B_\beta^v \nabla_v p = H_{[\mu\lambda]}^{\cdot v} \nabla_v p + B_{[\mu\lambda]}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta p.$$

Mais en raison de l'équation

$$B_{[\mu\lambda]}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta p = B_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{\cdot v} \nabla_v p = (B_{[\mu\lambda]}^{\alpha\beta} C_\gamma^v S_{\alpha\beta}^{\cdot v} + S_{\mu\lambda}^{\prime \cdot v}) \nabla_v p$$

et de (2), la relation (3) peut être écrite

$$(3)' \quad \nabla'_{[\mu} \nabla'_{\lambda]} p = (S_{\mu\lambda}^{\prime \cdot v} + Z_{\mu\lambda}^{\cdot v}) \nabla_v p \quad (1).$$

(1) SCHOUTEN, loc. cit., éq. (58).

Remarque: En comparant la définition de l'affineur Z avec la formule, déduite par moi ⁽¹⁾ pour une L_m dans L_n

$$(4) \quad B_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + H_{[\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\nu} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$$

on trouve immédiatement que la condition suffisante et nécessaire pour qu'une variété à m dimensions soit holonome dans L_n est $Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$. Pour une variété non-holonome, l'équation (4) devient

$$(4)' \quad B_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = B_{\mu\lambda\gamma}^{\alpha\beta\nu} S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} + B_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} C_{\gamma}^{\nu} S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - H_{[\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\nu} + Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\gamma}.$$

2. Les formules auxiliaires, déduites jusqu'alors et l'identité généralisée de Ricci pour un vecteur v_{λ} arbitraire ⁽²⁾

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} v_{\lambda} = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} v_{\nu} + 2 S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} \nabla_{\alpha} v_{\lambda} \\ R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\lambda\omega}^{\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\omega}} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \Gamma_{\omega\mu}^{\alpha} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} \Gamma_{\lambda\omega}^{\alpha} \end{array} \right.$$

nous permettent de transcrire le dernier membre de l'équation suivante, valable d'après (1) pour un vecteur arbitraire de L_n^m

$$(6) \quad \nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} w_{\lambda} = B_{[\omega\mu]\lambda}^{\alpha\beta\gamma} \nabla_{\alpha} B_{\beta\gamma}^{\delta\epsilon} \nabla_{\delta} w_{\epsilon}.$$

En effet on a

$$\begin{aligned} B_{[\omega\mu]\lambda}^{\alpha\beta\gamma} \nabla_{\alpha} B_{\beta\gamma}^{\delta\epsilon} \nabla_{\delta} w_{\epsilon} &= B_{[\omega\mu]\lambda}^{\alpha\beta\gamma} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} w_{\gamma} + B_{[\omega\mu]\lambda}^{\alpha\beta\gamma} (\nabla_{\alpha} B_{\gamma}^{\epsilon}) \nabla_{\beta} w_{\epsilon} + \\ &+ B_{[\omega\mu]\lambda}^{\alpha\beta\gamma} (\nabla_{\alpha} B_{\beta}^{\epsilon}) \nabla_{\epsilon} w_{\gamma} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_{[\omega\mu]\lambda}^{\alpha\beta\gamma} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} w_{\gamma} &= 1/2 B_{\omega\mu\lambda}^{\alpha\beta\gamma} (R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\epsilon} w_{\epsilon} + 2 S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\epsilon} \nabla_{\epsilon} w_{\gamma}) \\ B_{[\omega\mu]\lambda}^{\alpha\beta\gamma} (\nabla_{\alpha} B_{\gamma}^{\epsilon}) \nabla_{\beta} w_{\epsilon} &= B_{[\mu}^{\beta} H_{\omega]\lambda}^{\cdot\cdot\gamma\epsilon} \nabla_{\beta} w_{\epsilon} = \\ &= B_{[\mu}^{\beta} H_{\omega]\lambda}^{\cdot\cdot\varphi} C_{\varphi}^{\epsilon} \nabla_{\beta} w_{\epsilon} = H_{[\omega|\lambda]}^{\cdot\cdot\alpha} L_{\mu]\alpha}^{\cdot\cdot\nu} w_{\nu} \\ B_{[\omega\mu]\lambda}^{\alpha\beta\gamma} (\nabla_{\alpha} B_{\beta}^{\epsilon}) \nabla_{\epsilon} w_{\gamma} &= H_{[\omega\mu]}^{\cdot\cdot\varphi} B_{\lambda}^{\gamma} \nabla_{\varphi} w_{\gamma}, \end{aligned}$$

ainsi qu'en raison de (4)', l'équation (6) peut être écrite

(1) HLAVATÝ, *Contribution au calcul différentiel absolu* (« Věstník Král. České Spol. Nauk », Prague 1926), éq. (12).

(2) SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül* (Berlin, 1924), éq. (115), p. 85.

$$\nabla'_{[\omega} \nabla'_{\mu]} w_{\lambda} = \left(\frac{1}{2} B_{\omega\mu\lambda}^{\alpha\beta\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{\dots\nu} + H_{[\omega} \dot{\lambda}^{\alpha} L_{\mu]}^{\nu\alpha} \right) w_{\nu} + \left(S'_{\omega\mu}^{\dots\alpha} + Z_{\omega\mu}^{\dots\alpha} \right) B_{\lambda}^{\gamma} \nabla_{\alpha} w_{\gamma},$$

ou bien

$$\nabla'_{[\omega} \nabla'_{\mu]} w_{\lambda} - S'_{\omega\mu}^{\dots\alpha} \nabla_{\alpha} w_{\lambda} - Z_{\omega\mu}^{\dots\alpha} B_{\lambda}^{\beta} \nabla_{\alpha} w_{\beta} = \left(\frac{1}{2} B_{\omega\mu\lambda}^{\alpha\beta\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{\dots\nu} + H_{[\omega} \dot{\lambda}^{\alpha} L_{\mu]}^{\nu\alpha} \right) w_{\nu}.$$

Il s'ensuit que l'afineur à gauche est une fonction linéaire de w_{λ}

$$(7) \quad \nabla'_{[\omega} \nabla'_{\mu]} w_{\lambda} - S'_{\omega\mu}^{\dots\alpha} \nabla_{\alpha} w_{\lambda} - Z_{\omega\mu}^{\dots\alpha} B_{\lambda}^{\beta} \nabla_{\alpha} w_{\beta} = \frac{1}{2} V_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} w_{\nu}.$$

Mais, le vecteur arbitraire w_{λ} étant dans L_n''' on en déduit

$$(8) \quad \frac{1}{2} V_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} = \frac{1}{2} B_{\omega\mu\lambda\delta}^{\alpha\beta\gamma\nu} R_{\alpha\beta\gamma}^{\dots\delta} + H_{[\omega} \dot{\lambda}^{\alpha} L_{\mu]}^{\nu\alpha}.$$

3. Nous sommes ainsi parvenus à l'afineur $V_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu}$ dans L_n''' , dont la définition (8) est formellement la même que la définition de l'afineur de courbure d'une variété holonome dans L_n , mais qui en raison de (7) dépend encore de la connexion de L_n' . Nous en déduisons un autre afineur R' qui jouit des propriétés suivantes:

a) Sa définition formelle est la même que pour l'afineur de courbure d'une variété holonome dans L_n , mais

b) il ne dépend pas de la connexion de L_n (1).

Soumettons à cet effet le connexion de L_n à une transformation qui n'altère pas la connexion de L_n''' et cherchons l'afineur correspondant à $V_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu}$. La transformation la plus générale de la connexion aux paramètres $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ est

$$(9) \quad \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + P_{\lambda\mu}^{\dots\nu},$$

$P_{\lambda\mu}^{\dots\nu}$ étant un afineur arbitraire. En désignant par ∇'_{μ} le symbole de la dérivée covariante de la nouvelle connexion on trouve donc pour des vecteurs arbitraires v^{ν}, w_{λ}

$$(10) \quad \nabla'_{\mu} v^{\nu} = \nabla_{\mu} v^{\nu} + P_{\lambda\mu}^{\dots\nu} v^{\lambda}, \quad \nabla'_{\mu} w_{\lambda} = \nabla_{\mu} w_{\lambda} - P_{\lambda\mu}^{\dots\nu} w_{\nu}.$$

La nouvelle connexion induit une nouvelle connexion dans la variété non-holonome et nous désignerons le symbole de sa dérivée covariante par ∇'_{μ} . Or, si les vecteurs qui figurent dans (10) sont dans cette variété, on a à cause de (1)

$$\nabla'_{\mu} v^{\nu} = \nabla_{\mu} v^{\nu} + B_{\lambda\mu\gamma}^{\alpha\beta\nu} P_{\alpha\beta}^{\dots\gamma} v^{\lambda}, \quad \nabla'_{\mu} w_{\lambda} = \nabla_{\mu} w_{\lambda} - B_{\lambda\mu\gamma}^{\alpha\beta\nu} P_{\alpha\beta}^{\dots\gamma} w_{\nu}.$$

(1) C'est-à-dire que l'afineur cherché est invariant par rapport à toutes les transformations de la connexion de L_n , qui ne changent pas celle de L_n''' .

Il s'ensuit que la condition suffisante et nécessaire, pour que la transformation (9) ne change pas la connexion de L_n^m est

$$(11) \quad B_{\lambda\mu\gamma}^{\alpha\beta\nu} P_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = 0.$$

En désignant par accent avant-posé les grandeurs de la nouvelle connexion qui correspondent aux grandeurs dépourvues de l'accent avant-posé de la connexion originaire, on a

$$(12)_a \quad 'H_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} = B_{\omega\mu}^{\alpha\beta} ' \nabla_{\alpha} B_{\beta}^{\nu} = H_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} + B_{\omega\mu}^{\alpha\beta} C_{\gamma}^{\nu} P_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma}$$

$$(12)_b \quad 'S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + P_{[\mu\lambda]}^{\cdot\nu},$$

et par conséquent

$$(12)_c \quad 'Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 'H_{[\omega\mu]}^{\cdot\cdot\nu} + B_{\omega\mu}^{\alpha\beta} C_{\gamma}^{\nu} 'S_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = H_{[\omega\mu]}^{\cdot\cdot\nu} + B_{\omega\mu}^{\alpha\beta} C_{\gamma}^{\nu} S_{\alpha\beta}^{\cdot\gamma} = Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu}.$$

Cette équation étant valable pour toute transformation (9), on voit qu'en effet l'anneau Z ne dépend pas de la connexion de L_n . Il s'ensuit

$$'Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} B_{\lambda}^{\beta} ' \nabla_{\alpha} w_{\beta} = Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} B_{\lambda}^{\beta} \nabla_{\alpha} w_{\beta} - Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varphi} B_{\lambda\alpha}^{\gamma\beta} C_{\varphi}^{\gamma} P_{\gamma\nu}^{\cdot\alpha} w_{\beta}$$

pour toute transformation (9), tandis que pour la transformation spécialisée par (11) on a

$$(13) \quad ' \nabla_{[\omega} ' \nabla_{\mu]} w_{\lambda} - 'S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} ' \nabla_{\alpha} w_{\lambda} = \nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} w_{\lambda} - S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} \nabla_{\alpha} w_{\lambda}.$$

Or, en tenant compte de l'équation (7) on déduit pour la transformation spéciale

$$(14) \quad 1/2 'V_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\beta} = 1/2 V_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\beta} + Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varphi} B_{\lambda\alpha}^{\gamma\beta} C_{\varphi}^{\gamma} P_{\gamma\nu}^{\cdot\alpha}.$$

Le dernier membre à droite peut être transcrit. En effet, on a

$$(12)_d \quad 'L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu} = B_{\mu\beta}^{\alpha\gamma} ' \nabla_{\alpha} B_{\lambda}^{\beta} = L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\nu} - B_{\mu\beta}^{\alpha\gamma} C_{\lambda}^{\beta} P_{\gamma\alpha}^{\cdot\nu}$$

et par cette raison

$$(15) \quad \begin{aligned} B_{\lambda\alpha}^{\gamma\beta} C_{\varphi}^{\nu} P_{\gamma\nu}^{\cdot\alpha} &= B_{\lambda\alpha}^{\gamma\beta} C_{\varphi}^{\nu} (P_{\gamma\nu}^{\cdot\alpha} + 2 'S_{\gamma\nu}^{\cdot\alpha} - 2 S_{\gamma\nu}^{\cdot\alpha}) = \\ &= L_{\lambda\cdot\varphi}^{\cdot\beta} - 'L_{\lambda\cdot\varphi}^{\cdot\beta} + 2 B_{\lambda\alpha}^{\gamma\beta} (S_{\gamma\nu}^{\cdot\alpha} - 'S_{\gamma\nu}^{\cdot\alpha}) C_{\varphi}^{\nu}. \end{aligned}$$

L'équation (14) devient donc

$$1/2 V_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} = 1/2 V_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} + Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\delta} (L_{\lambda\cdot\delta}^{\cdot v} - L_{\lambda\cdot\delta}^{\cdot v} + 2B_{\lambda\beta}^{\alpha v} C_{\delta}^{\gamma} S_{\gamma\alpha}^{\cdot\cdot\beta} - 2B_{\lambda\beta}^{\alpha v} C_{\delta}^{\gamma} S_{\gamma\alpha}^{\cdot\cdot\beta}).$$

Or, l'affineur

$$(16) \quad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} = V_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} + 2Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\delta} L_{\lambda\cdot\delta}^{\cdot v} + 4Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\delta} S_{\delta\alpha}^{\cdot\cdot\beta} B_{\lambda\beta}^{\alpha v}$$

est invariant par rapport à la transformation de la connexion de L_n qui n'altère pas la connexion de L_n^m . La condition (b) est donc satisfaite. De plus l'affineur $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v}$, défini par (16) pour une variété holonome, devient $V_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v}$ et celui-ci satisfait la condition (a) et par cette raison l'affineur $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v}$ la satisfait à son tour. On peut aussi écrire à cause de (8)

$$(17) \quad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} = B_{\omega\mu\lambda\delta}^{\alpha\beta\gamma v} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} + 2H_{[\omega\lambda]}^{\cdot\cdot\alpha} L_{\mu]\cdot\alpha}^{\cdot v} + 2Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} L_{\lambda\cdot\alpha}^{\cdot v} + 4Z_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} S_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\delta} B_{\lambda\delta}^{\gamma v}$$

et cette équation devient celle de Gauss pour une variété holonome. L'affineur $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v}$ est donc analogue à l'affineur de courbure d'une variété holonome dans $L_n^{(1)}$.

4. Cherchons maintenant le mode de transformation de l'affineur $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v}$ par rapport à la transformation générale (9).

En désignant par $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v}$ l'affineur de courbure de la nouvelle connexion on trouve facilement

$$1/2 B_{\omega\mu\lambda\delta}^{\alpha\beta\gamma v} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = 1/2 B_{\omega\mu\lambda\delta}^{\alpha\beta\gamma v} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} + B_{\omega\mu\lambda\delta}^{\alpha\beta\gamma v} (\nabla_{\beta} P_{\gamma\alpha}^{\cdot\cdot\delta} + P_{\gamma\alpha}^{\cdot\cdot\delta} P_{\delta\beta}^{\cdot\cdot\delta})$$

On a donc à cause de (17) et (12)

$$(18) \quad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} + 2W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v},$$

où

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} = B_{[\omega\mu]\lambda\delta}^{\alpha\beta\gamma v} (\nabla_{\beta} P_{\gamma\alpha}^{\cdot\cdot\delta} + P_{\gamma\alpha}^{\cdot\cdot\delta} P_{\delta\beta}^{\cdot\cdot\delta} B_{\delta}^{\sigma} + L_{\beta\cdot\delta}^{\cdot\sigma} P_{\gamma\alpha}^{\cdot\cdot\delta} - H_{\alpha\gamma}^{\cdot\cdot\delta} P_{\delta\beta}^{\cdot\cdot\delta} + Z_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\delta} P_{\gamma\delta}^{\cdot\cdot\delta}).$$

Or, la plus générale transformation, qui ne change pas R' est la transformation (9), spécialisée par

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} = 0.$$

(1) Les équations (8), (16) correspondent aux équations (68) (69)_c chez SCHOÛTEN, loc. cit.

Si $P_{\lambda\mu}^{\dots\nu}$ est de la forme

$$P_{\mu\lambda}^{\dots\nu} = B_{\mu}^{\nu} p_{\lambda} + B_{\lambda}^{\nu} p_{\mu}, \quad (p_{\lambda} = B_{\lambda}^{\alpha} p_{\alpha}),$$

l'anneur W devient

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} = B_{\lambda}^{\nu} p_{[\mu\omega]} + B_{[\omega}^{\nu} p_{\mu]\lambda}, \quad (\nabla'_{\mu} p_{\lambda} - p_{\mu} p_{\lambda} = p_{\mu\lambda})$$

d'où il suit

$$2W_{\omega\mu\alpha}^{\dots\alpha} = 2(m+1)p_{[\mu\omega]}, \quad 2W_{\alpha\mu\lambda}^{\dots\alpha} = 2p_{[\mu\lambda]} + (m-1)p_{\mu\lambda}$$

et par conséquent

$$2p_{[\mu\omega]} = 1/(m+1)(R'_{\omega\mu\alpha}^{\dots\alpha} - R'_{\omega\mu\alpha}^{\dots\alpha}),$$

$$2p_{\mu\lambda} = 2(m-1)[R'_{\alpha\mu\lambda}^{\dots\alpha} - R'_{\alpha\mu\lambda}^{\dots\alpha} - 1/(m+1)(R'_{\lambda\mu\alpha}^{\dots\alpha} - R'_{\lambda\mu\alpha}^{\dots\alpha})].$$

L'équation (18) devient donc

$$(19) \quad R'_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} + 1/(m+1)(B_{\lambda}^{\nu} R'_{\omega\mu\alpha}^{\dots\alpha} - B_{\omega}^{\nu} R'_{\mu\lambda\alpha}^{\dots\alpha}) + \\ + 2/(m-1)B_{[\omega\mu]}^{\nu\beta}[R'_{\alpha\beta\lambda}^{\dots\alpha} - R'_{\alpha\beta\lambda}^{\dots\alpha} - 1/(m+1)(R'_{\lambda\beta\alpha}^{\dots\alpha} - R'_{\lambda\beta\alpha}^{\dots\alpha})].$$

Or, l'anneur

$$P_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} = R'_{\omega\mu\lambda}^{\dots\nu} - 1/(m+1)B_{\lambda}^{\nu} R'_{\omega\mu\alpha}^{\dots\alpha} - 2(m-1)B_{[\omega\mu]}^{\nu\beta}[R'_{\alpha\beta\lambda}^{\dots\alpha} - 1/(m+1)R'_{\lambda\beta\alpha}^{\dots\alpha}]$$

est invariant par rapport aux transformations

$$(9') \quad T_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + B_{\lambda}^{\nu} p_{\mu} + B_{\mu}^{\nu} p_{\lambda},$$

où p_{λ} est un vecteur arbitraire dans L_n^m

$$(20) \quad p_{\lambda} = B_{\lambda}^{\alpha} p_{\alpha}.$$

Ce résultat a une interprétation géométrique que nous allons maintenant exposer.

5. Une courbe au vecteur tangent v^{ν} dans L_n^m est dite géodésique dans L_n^m , si

$$(21) \quad v^{\mu} \nabla'_{\mu} v^{\nu} = a v^{\nu},$$

(a = fonction arb. de position).

Supposons maintenant que la connexion de L_n soit sans torsion ($S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma} = 0$) et cherchons parmi les transformations (9) celles qui conservent les lignes géodésiques de L_n''' ainsi que la torsion nulle. On doit avoir avant tout

$$(22) \quad P_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma} = P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\gamma}$$

et de plus

$$v^\mu \nabla'_\mu v^\gamma = b v^\gamma,$$

(b = fonction arb. de position).

Mais, à cause de (21), cette dernière équation est équivalente à

$$c v^\gamma = v^\lambda v^\mu B_{\lambda\mu\gamma}^{\alpha\beta\gamma} P_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma},$$

(c = fonction arb. de position).

Il s'ensuit en raison de (22)

$$B_{\lambda\mu\gamma}^{\alpha\beta\gamma} P_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = B_\lambda^\gamma p_\mu + B_\mu^\gamma p_\lambda$$

avec le vecteur arbitraire p_λ dans L_n''' . Or, la transformation (9') conserve les géodésiques (ainsi que la torsion), mais elle n'est pas la plus générale de telle sorte. En désignant par $Q_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma} = Q_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\gamma}$ un affineur arbitraire, dont la L_n''' -composante est nulle

$$(23) \quad B_{\lambda\mu\gamma}^{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = 0,$$

la plus générale des transformations cherchées peut s'écrire

$$(9'') \quad {}''\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma = {}'\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma + Q_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma} = \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma + B_\lambda^\gamma p_\mu + B_\mu^\gamma p_\lambda + Q_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma}.$$

En effet, la connexion aux paramètres ${}''\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma$ est — à cause de (23) — la plus générale des celles qui n'altèrent pas la connexion de la variété non-holonyme, appartenante aux paramètres ${}'\Gamma$ et celle-ci conserve les géodésiques (ainsi que la torsion nulle).

D'après ce que nous avons dit plus haut, l'anneur $P_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\gamma}$ est invariant par rapport aux transformations

$${}''\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma = {}'\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma + Q_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\gamma} \quad \text{et} \quad {}'\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma = \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma + B_\lambda^\gamma p_\mu + B_\mu^\gamma p_\lambda$$

Il est donc invariant par rapport à la transformation (9''). Dans la géométrie des variétés holonomes l'anneur P est donc « l'anneur projectif de courbure »

de M. Weyl. Nous sommes ainsi parvenus à l'affineur $P_{\omega\mu\lambda}^{\nu}$ qu'on pourrait appeler, « l'affineur projectif de courbure de L_n''' ». Il est invariant par rapport à la plus générale transformation de la connexion (sans torsion) de L_n''' qui, en conservant la torsion nulle, n'altère pas les géodésiques de la variété non-holonyme L_n''' .

Matematica. — *Sull'applicazione del calcolo degli operatori funzionali alla riduzione di equazioni integrali di Volterra.* Memoria di F. SBRANA, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo delle Memorie.

Matematica. — *Sur les courbes des variétés non-holonomes.* Nota di V. HLAVATÝ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Application de la construction de Cantor-Minkowski à l'analyse des ensembles discontinus.* Nota di G. BOULIGAND e G. RABATÉ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Une simple démonstration de la formule de l'écart géodésique.* Nota di A. WUNDHEILER, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Una osservazione sull'equazione del moto di un corpo di massa variabile.* Nota di D. GRAFFI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In alcune Note pubblicate di recente in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ il prof. Levi-Civita ha studiato le equazioni del moto di un corpo di massa variabile. Riferendosi al caso particolarmente interessante di un pianeta la cui massa vari per caduta su di esso di corpuscoli, il Levi-Civita perviene alla relazione:

$$(1) \quad d(mv) = F dt + \sum \mu w$$

In questa equazione m e v sono rispettivamente la massa e la velocità del pianeta, F la risultante delle forze che agiscono su di esso (escluse le eventuali azioni provenienti dai corpuscoli), μ e w la massa e la velocità immediatamente prima dell'urto dei corpuscoli che cadono sul pianeta, dt un intervallo di tempo così breve per cui si possa supporre infinitesimo riguardo alle variazioni di m e v , ma d'altra parte abbastanza lungo per comprendere un numero grandissimo di urti (anelastici) coi corpuscoli. Evidentemente $d(mv)$ significa la variazione di mv nel tempo dt mentre la sommatoria del secondo membro della (1) è estesa a tutti i corpuscoli che cadono sul pianeta pure nel tempo dt .

È molto interessante il caso in cui il termine $\sum \mu w$ si può ritenere nullo, o più precisamente quando il suo modulo è trascurabile rispetto al modulo di dmv che si prende come termine di confronto. In quest'ultimo caso si perviene alla formula semplice ⁽³⁾:

$$(2) \quad \frac{d(mv)}{dt} = F$$

Dunque per poter affermare la validità della (2) occorre valutare il termine $\sum \mu w$. Il prof. Fermi ⁽⁴⁾ ha indicato il modo per fare tale valutazione.

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(2) LEVI-CIVITA, *Sul moto di un corpo di massa variabile*. Questi « Rendiconti », II sem. 1928, pp. 329 e 621; I sem. 1930, p. 626. Vedi anche ALMANZI, questi « Rendiconti », I sem. 1929, p. 1055.

(3) Per studi sul problema dei due corpi partendo da questa equazione citeremo le Note dei sigg. VRANCEANU e MANARINI pubblicate in questi « Rendiconti » rispettivamente nel II sem. 1928, p. 555 e I sem. 1929, p. 499.

(4) E. FERMI, *Sul moto di un corpo di massa variabile*. Questi « Rendiconti » I sem. 1929, p. 984.

Poichè il numero dei corpuscoli che cadono sul pianeta si suppone grandissimo si possono applicare ad essi i metodi statistici, ossia si può ammettere che esista una legge di distribuzione delle velocità e delle masse dei corpuscoli stessi, e in base a tale legge, come ha dimostrato il Fermi è possibile calcolare il termine $\Sigma \mu v$. Il prof. Levi-Civita ha poi dimostrato ⁽¹⁾ che supposta Maxwelliana tale legge di distribuzione, il termine $\Sigma \mu v$ si può ritenere trascurabile nella (1) purchè sia trascurabile il quadrato della velocità media dei corpuscoli rispetto al quadrato delle velocità del pianeta.

In questa nota impostando il calcolo del termine $\Sigma \mu v$ alla maniera del Fermi valendoci di alcuni risultati dell'ultima delle note del Levi-Civita già citate dimostreremo che tale termine è trascurabile anche quando la legge di distribuzione delle velocità e masse dei meteoriti rimanendo ancora simmetrica non sia Maxwelliana ammettendo però che sia trascurabile, rispetto al quadrato della velocità del pianeta, il rapporto fra la densità di energia cinetica dei meteoriti e la densità materiale di essi. Benchè l'ipotesi Maxwelliana sulla distribuzione delle velocità sia, come ha dimostrato il Levi-Civita ⁽²⁾ in base ai metodi del Boltzmann, la più probabile, ci sembra che non ammettendo a priori tale legge di distribuzione si faccia una ipotesi assai più larga e che quindi si stringa più da vicino la realtà.

Consideriamo dunque un gran numero di corpuscoli, sia $f(p, \mu)$ ⁽³⁾ la funzione di distribuzione delle loro masse e velocità avendo indicato con p il modulo del vettore μv quantità di moto di un corpuscolo. Evidentemente supponendo che la funzione di distribuzione sia funzione solo di pp_i e μ si fa l'ipotesi che essa sia simmetrica.

Noi supporremo la $f(p, \mu)$ uniforme almeno in una regione dello spazio cosmico circondante il pianeta e la potremo supporre anche variabile col tempo, purchè si possa ritenere costante nell'intervallo di tempo dt .

Con queste ipotesi si viene a trascurare almeno in parte l'influenza della presenza ⁽⁴⁾ del pianeta sulla distribuzione delle velocità dei corpuscoli, ipotesi implicita nei calcoli del Fermi e del Levi-Civita. Allora riferendo le velocità dei corpuscoli a un sistema di coordinate polari ρ, θ, φ con l'asse parallelo alla velocità v all'istante t del pianeta, si hanno per la definizione della funzione $f(p, \mu)$ le seguenti espressioni per l'energia cinetica per unità di volume ϵ (o la densità di energia) e per la densità materiale ρ .

(1) Nell'ultima delle Note citate.

(2) Nella Nota, *Pulviscolo cosmico e distribuzione Maxwelliana*. «Atti della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei» Anno LXXXIII, sed. 16 marzo 1930.

(3) Evidentemente la $f(p, \mu)$ si deve supporre positiva o al più nulla per ogni p_i e μ compresi fra 0 e ∞ che è il loro campo di variabilità.

(4) La presenza del pianeta può influenzare la distribuzione dei corpuscoli e della loro velocità sia per l'effetto della sua attrazione sia per il fatto che parte dei corpuscoli vengono a cadere sul pianeta.

$$(3) \quad 2\varepsilon = \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty f(p, \mu) \frac{p^4}{\mu} dp \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ = 4\pi \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty f(p, \mu) \frac{p^4}{\mu} dp.$$

$$(4) \quad \rho = \int_0^\infty \mu d\mu \int_0^\infty f(p, \mu) p^2 dp \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ = 4\pi \int_0^\infty \mu d\mu \int_0^\infty f(p, \mu) p^2 dp.$$

Ora nelle citate Note dei proff. Fermi e Levi-Civita si trova per dm l'espressione:

$$(6) \quad dm = \lambda \int_0^\infty \mu d\mu \int_0^\infty dp \int_0^\pi f(p, \mu) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| p^2 \sin \theta d\theta$$

e per $\Sigma \mu \mathbf{w}$ si trova che esso è un vettore parallelo a \mathbf{v} e avente per modulo l'espressione:

$$(7) \quad |\Sigma \mu \mathbf{w}| = \lambda \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty dp \int_0^\pi f(p, \mu) |\mathbf{w} - \mathbf{v}| p^3 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

In queste formule λ è un opportuno coefficiente di proporzionalità. Valutiamo ora il rapporto $\frac{|\Sigma \mu \mathbf{w}|}{|dm \mathbf{v}|}$ o meglio cerchiamone un suo limite superiore. Per trovare questo limite superiore, osserviamo che dall'ultima Nota del prof. Levi-Civita pubblicata in questi Rendiconti risultano sostanzialmente le limitazioni:

$$\int_0^\pi |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \sin \theta \cos \theta d\theta \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{2p}{\mu} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \frac{p}{\mu} \\ \int_0^\pi |\mathbf{w} - \mathbf{v}| \sin \theta d\theta \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 2v \sin \theta d\theta = 2v.$$

Perciò si ha sostituendo nelle (6) e (7):

$$dm \geq 2\lambda v \int_0^\infty \mu d\mu \int_0^\infty f(p, \mu) p^2 dp \\ |\Sigma \mu \mathbf{w}| \leq \frac{2}{3} \lambda \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty f(p, \mu) \frac{p^4}{\mu} dp.$$

Confrontando queste formule con le (3) e (4) si ha subito:

$$dm \cong \frac{2\lambda v \rho}{4\pi} \quad |\Sigma \mu w| \leq \frac{2}{3} \lambda \frac{2\varepsilon}{4\pi}.$$

Perciò si ha:

$$\frac{|\Sigma \mu w|}{dmv} \leq \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\rho v^2}.$$

Quindi per quanto si è già detto la formula (2) si può considerare valida se è piccolo rispetto all'unità il termine $\frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\rho v^2}$.

Ossia dunque la (2) è valida se la densità dell'energia cinetica divisa per la densità materiale è trascurabile rispetto al quadrato della velocità del pianeta, il che esprime quanto si voleva dimostrare.

Notiamo che se tutti i corpuscoli avessero la stessa massa sarebbe $\varepsilon = \frac{1}{2} \rho w'^2$ (dove w'^2 è la media quadratica delle velocità dei meteoriti) la nostra ipotesi per trascurare il termine $|\Sigma \mu w|$ nella (1) diventerebbe equivalente a quella del Levi-Civita⁽¹⁾. In generale se ammettiamo che l'espressione di ε sia dell'ordine di grandezza di $\frac{1}{2} \rho w'^2$, come è molto probabile, la nostra ipotesi viene ancora sostanzialmente a coincidere con quella del Levi-Civita.

(1) Occorre però intendere con velocità media la radice quadrata della media quadratica delle velocità ossia la velocità media quadratica.

Meccanica. — *Sul profilo delle pile da ponte.* Nota di A. SGNORINI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

A recenti innovazioni circa la forma delle pile da ponte è stato contrapposto il dubbio che l'abbandono delle pile rettangolari possa sensibilmente aumentare il « disturbo » del regime idraulico (il disturbo della corrente di marea, nel caso della laguna). Sollecitato dal prof. Levi-Civita ad approfondire la questione, ho potuto riconoscere che — sempre assumendo come misura D del « disturbo » il divario di energia cinetica tra la corrente perturbata dalle pile e la corrente non perturbata — D può ritenersi indipendente dalla configurazione dei profili delle pile. Precisamente, ove si tratti il problema in due dimensioni trascurando la piccola influenza della viscosità e turbolenza negli strati limiti aderenti alle singole pile, si trova

$$(1) \quad D = \frac{1}{2} \mu A V_{\infty}^2$$

non appena si rappresenti con A l'area complessiva dei profili, con μ la densità, con V_{∞} la velocità della corrente non perturbata.

*
* * *

A giustifica dell'asserto, prendo in esame, nel piano Oxy , una corrente liquida stazionaria irrotazionale, di velocità asintotica V_{∞} e densità uniforme μ , perturbata da un certo numero di ostacoli ma puramente traslatoria.

Siano: c il contorno complessivo degli ostacoli; σ tutta la regione del piano esterna a c ; φ il potenziale di velocità; ψ la funzione di Stokes (funzione armonica coniugata). Manterremo anche le altre notazioni abituali: $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$, $f(z) = \varphi + i\psi$, ecc.

Pel solo fatto che in ogni punto di c deve intendersi

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

la ψ è monodroma nell'intera σ . Escludendosi ogni circolazione, anche φ è monodroma in σ . Quindi, per ogni curva chiusa s contenuta in σ , risulta

$$\int_s \varphi d\psi = - \int_s \psi d\varphi = \frac{1}{2} \int_s (\varphi d\psi - \psi d\varphi) = \frac{i}{2} \int_s (\varphi + i\psi) d(\varphi - i\psi),$$

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

cioè

$$(3) \quad \int_s \varphi d\psi = \frac{i}{2} \int_s f d\bar{f}.$$

Rappresento con s_R la circonferenza di raggio R e centro O ; con \bar{R} il minimo dei valori di R pei quali nessun punto di c è esterno ad s_R ; con Σ tutta la regione del piano esterna ad $s_{\bar{R}}$; con σ_R (per $R > \bar{R}$) la regione compresa tra c ed s_R . Si può⁽¹⁾ allora assumere come misura del « disturbo »

$$(4) \quad D = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \mu \int_{\sigma_R} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - V_\infty^2 \right\} d\sigma_R.$$

Ponendo

$$C_R = \int_{\sigma_R} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma_R$$

e rilevando che $\pi R^2 - \sigma_R$ coincide colla somma A delle aree degli ostacoli, la (4) assume la forma

$$D = \frac{1}{2} \mu A V_\infty^2 + \frac{1}{2} \mu \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} (C_R - \pi R^2 V_\infty^2)$$

e la dimostrazione della (1) resta ricondotta a provare che

$$(5) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} (C_R - \pi R^2 V_\infty^2) = 0.$$

Sia t_R la tangente ad s_R orientata positivamente nel verso $x \rightarrow y$; t_R costituisce colla normale interna n_R una coppia congruente ad (x, y) , in modo che in ogni punto di Σ esattamente si ha

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n_R} = - \frac{\partial \psi}{\partial t_R}.$$

Applicando il 1° lemma di Green alla funzione armonica φ in σ_R , per effetto di (2), (6) e (3) risulta

$$(7) \quad C_R = - \int_{s_R} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_R} ds_R = \int_{s_R} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t_R} ds_R = \int_{s_R} \varphi d\psi = \frac{i}{2} \int_{s_R} f d\bar{f}.$$

Per semplicità, supponiamo l'asse x orientato come V_∞ . Allora⁽²⁾ in tutto Σ (cioè, per ogni $\rho > \bar{R}$) la funzione $f(\zeta) - V_\infty \zeta$ sarà sviluppabile

(1) Nel 2° membro della (4) il passaggio al limite viene effettuato sulle σ_R solo per motivo di semplicità.

(2) Cfr. M. PICONE, *Dimostrazione di un teorema di analisi di cui è fatto uso in fisica piana*, questi « Rendiconti », serie 6ª, vol. VIII (1928), pp. 651-57, e vol. IX (1929), pp. 544-46.

in serie procedente secondo le potenze di $\frac{1}{\bar{z}}$. Posto

$$f(\bar{z}) = V_{\infty} \bar{z} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_r}{\bar{z}^r},$$

teniamo conto che sopra s_R è

$$d\bar{z} = -iR e^{-i\vartheta} d\vartheta = -i\bar{z} d\vartheta,$$

mentre

$$\int_{s_R} \frac{1}{\bar{z}^m} \cdot \frac{1}{\bar{z}^n} d\vartheta = \begin{cases} 2\pi R^{-2m} \\ 0 \end{cases}$$

a seconda che i due interi (positivi o negativi) m, n sono tra di loro eguali o diversi. Supponendosi nella (7) $R > \bar{R}$, riesce perfettamente legittimo sostituirla con

$$C_R = \frac{1}{2} \int_{s_R} \left(V_{\infty} \bar{z} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_r}{\bar{z}^r} \right) \left(V_{\infty} \bar{z} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r f_r}{\bar{z}^r} \right) d\vartheta,$$

nonchè con

$$C_R = \pi R^2 V_{\infty}^2 - \pi \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r |f_r|^2}{R^{2r}};$$

e infine dedurne la validità della (5).

Fisica. — *Rettifica alla Nota su: « L'effetto " Hall " per i metalli Ni, Fe e Cu in campi magnetici deboli ⁽¹⁾ ».* Nota di E. BOSSA, presentata ⁽²⁾ dal Socio M. CANTONE.

A chiarimento dei dati riportati nella suddetta Nota nelle tabelle I e II si crede necessario far osservare quanto segue:

Nel riportare i dati delle succitate tabelle non fu tenuto conto di una elongazione di zavorra dipendente dalla posizione di zero dell'amplificatore e si scrissero i valori direttamente letti, onde non riesce possibile al lettore di risalire dalle elongazioni a destra ed a sinistra ai valori delle medie riportate. Si rettifica pertanto, intendendosi che, mentre i valori delle medie e delle R riportate risultano esatti e restano immutati, i valori nelle colonne 2 e 3 vanno modificate come appresso:

TABELLA I

Deviazione	
a destra	a sinistra
13.1	15.0
13.4	21.0
17.0	25.9
20.2	32.2
26.9	47.9
39.6	60.4
49.1	81.3
106.9	100.1
138.9	217.5
180.6	274.0
103.0	759.0
205.0	873.0
441.0	1131.0
651.0	1251.0
763.0	1504.0

TABELLA II

Deviazione	
a destra	e sinistra
1.0	0.4
2.3	0.9
3.0	2.8
7.9	5.7
8.2	7.4
14.5	10.1
15.2	13.2
24.5	18.9
67.4	56.8
200.5	15.1
440.0	— 36.8
697.0	— 52.8
892.4	— 84.8
1207.0	— 103.6

(1) Questi « Rendiconti », serie 6^a, vol. XI, fasc. 5 (marzo 1930).

(2) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

Fisica. — *La misura fotografica della lunghezza delle righe spettrali.* Nota di G. OCCHIALINI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla efficienza fotometrica e la luminosità degli strumenti ottici.* Nota di V. RONCHI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Effetto Raman e polimerizzazione dell'acqua a varie temperature.* Nota di O. SPECCHIA, presentata dal Socio Q. MAJORANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla formazione dello ione molecolare di elio.* Nota di E. MAJORANA, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Reazioni tra composti organici e minerali. I. Solfuri naturali ed alcuni composti aciclici* ⁽¹⁾. Nota di REMO DE FAZI e di ANTONIO HEMMELER, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Abbiamo iniziato uno studio sistematico di reazioni, fra qualche minerale ed alcuni composti organici, per intraprendere in questo immenso campo, delle ricerche orientative e vedere se è possibile trovare delle reazioni generali che possano permettere delle classificazioni e che posseggano analogie con quelle naturali, ed infine anche per dedurne probabili applicazioni industriali.

Avremmo preferito eseguire un maggior numero di esperienze prima della pubblicazione di questi studi incominciati fin dal 1925, ma l'impossibilità di continuarle per insufficienza di mezzi adatti, nella nuova sede occupata da de Fazi, ci ha obbligato a comunicare i primi risultati.

Pochi sono gli studi noti su questo argomento, il più importante è quello di Steinkopf ⁽³⁾ per la sintesi del tiofene. Steinkopf è riuscito a preparare

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Applicata della Regia Scuola d'Ingegneria di Roma.

(2) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

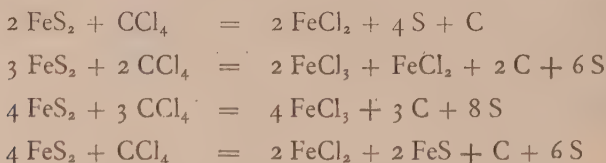
(3) STEINKOPF W., « Ann. », 403, I, (1914).

industrialmente questo composto facendo agire, in opportune condizioni, l'acetilene sulla pirite. Oltre questo esempio ve ne sono altri e numerosi, impiegando però solfuri artificiali, tra cui la preparazione del mercaptano etilico e del solfuro di etile, ottenuti rispettivamente per azione dell'alcool etilico e dell'etere etilico sul solfuro di alluminio da G. R. Levi e Natta ⁽¹⁾.

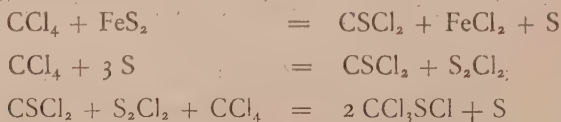
Infine, a scopo analitico, sono state eseguite ricerche recenti ⁽²⁾ facendo agire, su alcuni minerali, il tetracloruro di carbonio. Questi ultimi lavori sono quelli che ci hanno indotto, dopo cinque anni, a scrivere questa Nota.

Le ricerche sono state eseguite, per ora, sulla pirite e sulla stibina. Le disposizioni degli apparecchi necessari alle esperienze, e le condizioni esatte, sono descritte nella parte sperimentale della Nota completa che verrà pubblicata sull'Industria Chimica.

Per azione del tetracloruro di carbonio sulla pirite, in assenza di aria, ed a circa 320° si ottiene una mescolanza di cloruro ferroso e ferrico, zolfo, solfuro ferroso e carbone:



Si sono formate anche tracce di cloruro di zolfo e di percloriotimercaptano:



A 400° si sono ottenuti gli stessi prodotti della reazione ed una maggiore quantità, sia pure ancora piccola, di cloruro di zolfo e di percloriotimercaptano. A 420-450° si sono avuti gli stessi risultati e come era da prevedersi, anche piccole quantità di tiofosgene.

Eseguendo le precedenti esperienze, ma in corrente di aria, si sono individuati gli stessi composti ed inoltre CO, CO₂, SO₂, COCl₂, ed HCl; dei quali è evidente la formazione.

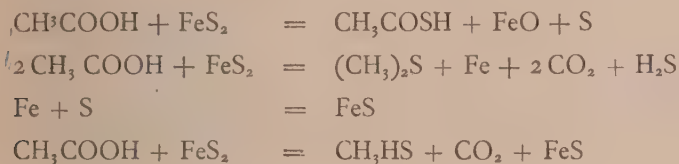
L'alcool etilico reagisce sulla pirite a 450-500° dando però soltanto piccolissime quantità di mercaptano etilico, mentre l'etere etilico a 450-500-550° si trasforma in parte in solfuro di etile.

(1) LEVI G. R. e NATTA G., «Gazz. Chim. Ital.», 54, 973, (1924).

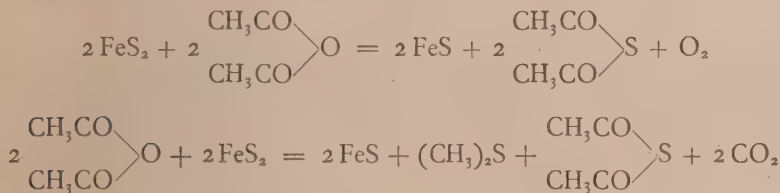
(2) BRADDOCK ROGERS K., «Chem. Zentr.», (I), 2211; (II), 1186, (1929).

Più interessanti sono i risultati ottenuti per l'azione dell'acido acetico e dell'anidride acetica sulla pirite.

La reazione a 480–500° dà luogo a notevole quantità di acido tioacetico ed a tracce di altri composti fra i quali abbiamo individuato il mercaptano metilico, il solfuro metilico, l'anidride carbonica, l'idrogeno solforato e lo zolfo:



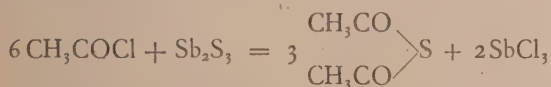
Con anidride acetica a 450–480° si hanno molti prodotti gassosi, fra i quali l'idrogeno solforato, l'anidride carbonica, l'anidride solforosa e formazione di anidride tioacetica:



Infine è notevole la reazione che si verifica tra il tetracloruro di carbonio e la stibina: a 300–325° si ha completa trasformazione della stibina in tricloruro di antimonio e formazione di solfuro di carbonio:



Mentre per azione del cloruro di acetile a 300–350° si ha egualmente tricloruro di antimonio ed anidride tioacetica:



Quindi la pirite, secondo i risultati delle esperienze finora controllate, non avrebbe che una debole azione solforante rispetto al tetracloruro di carbonio. Questa reazione si manifesta soltanto a temperatura più elevata (420°), mentre a temperature inferiori avviene una clorurazione del ferro e la messa in libertà di zolfo. L'azione solforante che si rileva con la formazione del perclorotiomercaptano e del tiosfogene, fa pensare alla possibilità

di ottenere quest'importante composto facendo avvenire la reazione a determinate pressioni. Nel comportamento con l'alcool etilico e con l'etere etilico, la pirite manifesta ancora una debolissima azione solforante, mentre è notevole con l'acido acetico e con l'anidride acetica.

La stibina invece con i composti sperimentati manifesta una netta azione solforante, tanto da trasformare in solfuro di carbonio almeno l'85 % del tetracloruro di carbonio.

In seguito a tali risultati si intravede la possibilità di sviluppare queste ricerche in vari campi, specialmente adoperando alogeno-derivati ciclici.

Questi primi studi riguardano l'azione della pirite e della stibina su pochissimi composti aciclici, mentre tanti altri solfuri ed un numero elevato di minerali possono dare reazioni veramente interessanti ed inaspettate.

L'aver notato come il tetracloruro di carbonio reagisca differentemente con la pirite e la stibina, è stimolo a rivolgere la nostra attenzione ad un così vasto campo di ricerche pieno di attrattive e di speranze.

Riassunto.

Gli autori hanno iniziato uno studio sulle reazioni che avvengono fra qualche minerale ed alcuni composti aciclici, ed hanno notato che :

1° per azione del tetracloruro di carbonio sulla pirite a 320-400° e 450° si ottiene una mescolanza di cloruro ferroso, cloruro ferrico, zolfo, solfuro ferroso, carbone e tiofosgene;

2° per azione dell'alcol etilico e dell'etere etilico sulla pirite a 450-500° si ha rispettivamente mercaptano etilico e solfuro di etile;

3° per azione dell'acido acetico sulla pirite a 480-500° si ha acido tioacetico, tracce di mercaptano metilico, solfuro metilico, anidride carbonica, idrogeno solforato e zolfo;

4° per azione dell'anidride acetica sulla pirite riscaldata a 450-480° si ha idrogeno solforato, anidride carbonica, anidride solforosa e anidride tioacetica;

5° per azione del tetracloruro di carbonio sulla stibina, a 300-325° si ottiene solfuro di carbonio e triclорuro di antimonio;

6° e per azione del cloruro di acetile sulla stibina a 300-350° si ha anidride tioacetica e triclорuro di antimonio.

Chimica. — *Deposizione elettrolitica del cromo dal cromossalato ammonico* ⁽¹⁾. Nota di A. MAZZUCHELLI, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Fra i vari composti del cromo, da cui si è cercato, con più o meno successo, di preparare questo metallo per via elettrolitica, non risulta che siano mai stati sperimentati i suoi ossalati solubili (tutti della forma trivalente), sia quello semplice che i complessi, di cui oggi si conosce un buon numero ⁽³⁾.

Da vari saggi che ho fatto in proposito, con la collaborazione sperimentale dei sigg. Vivaldi, Bacci e sig.na Rossi, risulta che si posson avere dei buoni risultati col cromossalato azzurro di ammonio $\text{Cr}(\text{C}_2\text{O}_4 \cdot \text{NH}_4)_3, 3\text{H}_2\text{O}$. Operando infatti in soluzione a circa il 20 % in volume a temperatura ordinaria, con catodo di ottone e densità di corrente abbastanza elevata (di 25 ampère per dm^2 o superiore) si ottiene un deposito lucido, uniforme, molto bene aderente, simile in tutto a quello che dà la soluzione, oggi così usata industrialmente, di acido cromico con poco acido solforico. Una leggera acidità per acido ossalico diminuisce, una maggiore annulla il rendimento, mentre una certa alcalità dovuta all'ammoniaca (0.5 a 1 gr. di NH_3 % cc.) non nuoce.

I rendimenti tuttavia sono bassi, e cioè da 1 % circa del teorico con una densità di corrente di 25, fino a poco più del 4 % con una densità di 150, nel qual caso peraltro il deposito, pur restando lucido, è meno aderente e tende facilmente a staccarsi in scaglie. Se la elettrolisi si fa in recipiente unico questi rendimenti non si mantengono per molto tempo, e si riducono a poche unità per mille non appena si può constatare nel liquido la presenza di acido cromico, formatosi per ossidazione all'anodo (che era un filo di platino avvolto a spirale). La separazione del liquido anodico mediante vaso poroso rallenta, come è ovvio, ma non però impedisce il calo del rendimento, poichè il cromato ammonico finisce sempre col diffondere nel reparto catodico. Miglior rimedio sarebbe certamente usare acido ossalico od ossalato ammonico nel reparto anodico; ma ho preferito conoscere anzitutto il comportamento, anche sotto questo riguardo, del cromossalato amonico.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(3) Le nozioni in proposito sono assai bene riassunte nel *Handbuch der anorganischen Chemie* di ABEGG-AUERBACH, vol. IV, 1, a (pp. 185-202) dove è indicata pure la letteratura originale.

A temperatura un pò elevata (verso 50°) non si ha più deposito, ma solo sviluppo di idrogeno. Aggiunta di un po' di ossalato cromico $\text{Cr}_2(\text{C}_2\text{O}_4)_3$, migliora un po' il rendimento (di circa 1 % a temperatura ordinaria) ma se la proporzione di questo sale diviene un po' rilevante (in modo, ad es., che il suo cromo sia circa il 37 % della quantità totale di questo elemento) il deposito diviene nerastro, granuloso o cristallino, e contiene carburo, come si riconosce dall'odore, disciogliendolo in acido cloridrico.

Da saggi polarografici eseguiti ⁽¹⁾ risulta che il processo catodico è unico e consiste nella demolizione completa dell'anione cromossalato, e cioè:

$\text{Cr}(\bar{\text{C}}_2\bar{\text{O}}_4)_3 - 3\text{F} = \text{Cr} + 3\bar{\text{C}}_2\bar{\text{O}}_4$. E per ragioni di analogia ciò costituisce una conferma alla teoria secondo cui (E. Müller) anche l'anidride cromica nel metodo industriale si riduce totalmente al catodo, senza stadi intermedi:

$\text{CrO}_3 + 6\bar{\text{H}}^+ - 3\text{F} = \text{Cr} + 3\text{H}_2\text{O}$. È da notare inoltre che ambedue i processi danno un deposito liscio, omogeneo, aderente, come sogliono appunto fare le riduzioni di anioni complessi, così preferiti in galvanostegia.

Maggiori particolari su questo argomento saranno prossimamente resi noti altrove.

Geologia. — *Gli Strofomenidi del Permiano del bacino del Sosio (Palermo)* ⁽²⁾. Nota preventiva di CARMELA RUIZ presentata ⁽³⁾ dal Corrisp. R. FABIANI.

In una Nota pubblicata nei « Rendiconti » di questa R. Accademia nel 1926 ⁽⁴⁾, il prof. Fabiani faceva conoscere i risultati paleontologici di una prima serie di scavi da lui eseguiti negli affioramenti permiani del bacino del Sosio e specialmente in un nuovo giacimento da lui scoperto presso la Rocca di S. Benedetto e indicato col nome di Rupe di S. Calogero. Chiudeva tale Nota esprimendo l'augurio che la grande opera illustrativa delle faune permiane del bacino del Sosio, non potuta finire da G. G. Gemmellaro, potesse un giorno essere completata. Ad iniziare la non lieve impresa, che non poteva essere opera di un solo specialista, volle accordare la sua preziosa collaborazione anzitutto il prof. C. F. Parona, il quale si accinse allo studio delle Spugne ⁽⁵⁾. Da parte sua il prof. Fabiani aveva cominciato

(1) Sul polarografo v. HEYROVSKÝ, « Bull. Soc. Chim. de France », 41, p. 1227 (1927).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Palermo.

(3) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(4) FABIANI R. *Primi risultati di nuove ricerche negli affioramenti permiani del bacino del Sosio (Palermo)*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. III, ser. 6ª, fasc. 10, Roma, 1926.

(5) PARONA C. F., *Appunti per uno studio sulle « Spugne » del Permiano di Sicilia (Bacino del Sosio)*. « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. LXIV, Torino, 1929.

la revisione dei Brachiopodi, gruppo pel quale pure restava non poco da fare⁽¹⁾, senonchè, distoltone da altre ricerche, non potè dedicarvisi a fondo ed affidò a me intanto lo studio, sotto la sua guida, di alcuni gruppi meno noti, quale quello degli *Strofomenidi*. Di questo gruppo ho preparato una monografia, che è pressochè pronta per la stampa. In attesa rendo noto l'elenco delle specie finora individuate e accenno a qualche considerazione che dalla loro presenza in Sicilia si può dedurre.

Ecco l'elenco delle specie determinate:

- Streptorhynchus crenistria* Phill.
- » » var. *senilis* Phill.
- » *pelargonatus* Schloth.
- » *pseudopelargonatus* Broili
- Derbya Buchi* D'Orb.
- Orthotetes guadalupensis* Girt.
- » *distortus* Girt.
- Meekella evanescens* Schellw.
- » *uncitoides* Tschern.
- Geyerella Gemmellaroi* Schellw.
- » *distorta* Schellw.
- Canavaria acropedion* Merla

Sebbene il loro numero sia assai esiguo, tuttavia ritengo che abbiano una grande importanza, perchè provano l'esistenza di specie e generi nuovi non solo per la Sicilia, ma anche pel resto d'Italia finora rinvenuti nel Permocarbonifero oltre che d'altre parti d'Europa, dell'India e dell'America e stabiliscono ancora una volta un legame cronologico fra questi giacimenti classici e il deposito del Sosio.

Dei generi determinati, il genere *Canavaria* (Merla, 1927) è finora esclusivo della Sicilia, mentre gli altri sono più o meno diffusi nel Paleozoico superiore di varie località extralpine; inoltre il genere *Orthotetes* (Fischer, 1837) e il genere *Derbya* (Waagen, 1884) sono completamente nuovi per la nostra Isola; i generi *Streptorhynchus* (King, 1850), *Meekella* (White e St. John, 1870) e *Geyerella* (Schellwien, 1900) erano stati semplicemente citati, ma senza una sufficiente illustrazione.

Per quanto riguarda le specie determinate due erano già note prima d'ora e sono fino al presente esclusivamente siciliane: *Geyer. Gemmellaroi*

(1) Per una parte dei Brachiopodi del Permiano del Sosio, oltre a quelli già descritti nelle sue pubblicazioni, il prof. G. G. Gemmellaro aveva fatto preparare delle tavole in litografia, nelle quali sono rappresentati alcuni degli esemplari che formano oggetto del mio studio. Non si è però trovato nè alcuna spiegazione delle figure, nè alcuna indicazione, nemmeno nelle scatolette contenenti i fossili, cosicchè si dovette procedere come se si fosse trattato di esemplari non ancor studiati.

Schellw., *Canav. acropedion* Merla. La *Meek. evanescens* Schellw. e la *Geyer. distorta* Schellw. erano indicate come dubbie con un « cfr. » e « a » nel quadro riassuntivo dello Schellwien (*Fauna Troglkofel*, pp. 110 e 111); ora ne risulta accertata l'esistenza. Le rimanenti, e cioè sette specie e una varietà, risultano completamente nuove per la Sicilia:

Strept. crenistria Phill.

» » *var. senilis* Phill.

» *pelargonatus* Schloth.

» *pseudopelargonatus* Broil.

Derbya Buchi D'Orb.

Orthot. guadalupensis Girt.

» *distortus* Girt.

Meek. uncitoides Tschern.

Dal confronto poi fra le specie del Sosio e le stesse rinvenute in altri giacimenti del Paleozoico superiore risulta che lo *Strept. crenistria* Phill. e la sua varietà *senilis* Phill., cominciano nel Carbonifero inferiore e medio e continuano fino al Permiano superiore; quattro (*Strept. crenistria* Phill., *Strept. pelargonatus* Schloth., *Derbya Buchi* D'Orb., *Meek. uncitoides* Tschern.) e la varietà *senilis* Phill. dello *Strept. crenistria* Phill. si ritrovano nel Carbonifero superiore; il maggior numero e cioè sette specie e una varietà (*Strept. crenistria* Phill. e varietà *senilis* Phill., *Strept. pelargonatus* Schloth., *Orth. guadalupensis* Girt., *Orth. distortus* Girt., *Meek. evanescens* Schellw., *Meek. uncitoides* Tschern., *Geyer. distorta* Schellw.) sono frequenti nel Permiano inferiore.

Geologia (Paleobotanica). — *Su di un nuovo genere di Corallinacea fossile dell'oligocenè ligure*. Nota di M. AIROLDI, pres. dal Corrisp. G. ROVERETO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia (Batteriologia). — *Acidoproteoliti e termofili nella pastorizzazione del latte* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di COSTANTINO GORINI, presentata dal Socio P. R. PIROTTA.

Acidoproteoliti e termofili sono due ordini di batteri da me scoperti nel latte (1892-1894 ⁽³⁾), i quali assumono oggi un'importanza particolare nella pastorizzazione del latte per l'influenza che esercitano sulla sua serbevolezza.

Quanto ai batteri acidoproteolitici la loro influenza va considerata sotto due punti di vista: in primo luogo essi, producendo chimasi accanto ad acidità e d'altra parte potendo (a differenza degli alcalinoproteolitici) convivere coi fermenti lattici, determinano o da soli o in unione con questi la *coagulazione prematura o dolce* del latte che si lamenta spesso sia nel latte alimentare sia nel latte caseario; in secondo luogo gli acidoproteoliti, rivestendosi di un cappuccio di caseina che si precipita loro attorno, massime sotto il riscaldamento, per effetto della loro chimasi, sono capaci di resistere a temperature elevate pur non essendo sporigeni, come io ho dimostrato dei cocchi superstiti nel latte sterilizzato del commercio ⁽⁴⁾. Quanto ai batteri termofili la loro influenza sta nella capacità non solamente di sopravvivere, ma altresì di proliferare a temperature elevate e precisamente alle temperature della oggi preferita pastorizzazione bassa a 60-65° C.; per cui, siccome a questa temperatura il latte rimane per almeno 25-30 minuti, i termofili hanno agio di moltiplicarsi in guisa che può verificarsi persino il caso che il latte esca dal pastorizzatore con una carica microbica più elevata dell'originaria. Aggiungasi che se si tratta di termofili obbligati (come il mio *B. lactis thermophilus* ⁽⁵⁾) la loro proliferazione cessa a 37° C.; ma se si tratta di termofili facoltativi essa può perdurare durante il raffreddamento del latte fino a 20-10° C., a seconda delle specie, accelerando sempre più l'alterazione del latte. Ora per l'appunto, in un recente lavoro ⁽⁶⁾ ho dimostrato che il mio *B. acidificans presamigenes casei*, mediante lattocolture a 50-70° C. è capace di dar luogo per dissociazione a subculture termofili

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia del R. Istituto Superiore Agrario di Milano, novembre 1930.

(2) Nella Seduta del 7 dicembre 1930.

(3) Per gli *Acidoproteoliti*, vedi: « Rivista d'Igiene e Sanità pubblica », 1892, 3, p. 527 e 1893, 4, p. 549; « Giornale R. Soc. Italiana d'Igiene », 1894, 16, p. 129. Per i *termofili*, vedi: « Giornale della R. Società Italiana d'Igiene », gennaio 1894, 16, p. 5.

(4) « Rend. R. Istituto Lomb. Sc. Lett. », 1915, 48, p. 956.

(5) V. sub. (3).

(6) « Rend. R. Accad. dei Lincei », 1928, 8, p. 598.

facoltative; e siccome detto bacillo è una varietà acidoproteolitica del gruppo *Subtilis* tanto diffuso in natura e particolarmente nel latte, ho prospettato la possibilità che nella moderna pastorizzazione bassa e prolungata del latte avvengano consimili fenomeni di dissociazione, onde questo gruppo batterico possa ritrovarsi nel latte pastorizzato non solamente in grazia delle sue spore termoresistenti, ma altresì per una coltura selettiva dei suoi stipiti termofili. Che se questi stipiti sono anche acidoproteolitici, essi, venendo a sommare in sé le sopraindicate influenze dannose, diventano i nemici più temibili della serbevolezza del latte pastorizzato.

È quanto appunto mi è occorso di accertare in pratica nei controlli eseguiti in questo laboratorio sul latte pastorizzato nella Centrale del latte di Milano, dove esso viene scaldato a 63° C. per mezz'ora, indi immediatamente refrigerato a 5° C., imbottigliato e incapsulato. Le bottiglie destinate al controllo della serbevolezza vengono spedite direttamente a questo laboratorio, dove sono tenute in osservazione sempre chiuse e alla temperatura ambiente fino all'inizio della loro alterazione. Durante la stagione estiva 1930 (giugno-settembre) la serbevolezza è risultata in generale del tutto soddisfacente, oscillando fra le 42-48 ore e toccando qualche volta persino le 54 ore; però in alcune giornate fra le più calde (temperatura ambiente massima di 28-30° C.), essa è stata di sole 28-34 ore. Noto il fatto che nelle bottiglie meno serbevoli si è verificata una coagulazione molliccia e debolmente acida (2-2,5 ‰ in acidità lattica) come quella dei fermenti acidoproteolitici, mentre nelle bottiglie più serbevoli si è verificata una coagulazione soda e più acida (5-7 ‰ in acidità lattica) come quella dei comuni fermenti lattici. I coaguli vennero sottoposti tutti ad esame microscopico diretto, che dà un'idea approssimativa più completa sulla fisionomia microbica, laddove l'esame culturale fornisce criteri troppo subordinati alla tecnica ed ai substrati impiegati. Però di parecchi coaguli si fecero anche culture isolanti a piatto in agar lattosio e culture selettive termobiotiche in latte a 54-56° C.

All'esame microscopico diretto, in tutti i coaguli si è accertata una mescolanza di forme cocciche e bacillari; nei coaguli sodi più tardivi e più acidi le varie forme erano presenti in diverse proporzioni, per lo più con notevole abbondanza dei cocci; invece nei coaguli mollicci più precoci e meno acidi le forme bacillari erano in spiccata prevalenza sulle cocciche. Le forme cocciche erano rappresentate in parte dai mammococchi acidoproteolitici colle solite varietà gialle e aranciate, in parte da streptococchi di vario tipo, dallo *Str. mastitidis* allo *Str. lacticus*; tutti questi cocci sono da considerarsi semplicemente termoresistenti anzichè termofili, onde si spiega il perchè, laddove essi erano in prevalenza, la coagulazione avvenne più tardiva e inoltre con acidità elevata, data la presenza di veri fermenti lattici. Le forme bacillari appartenevano per la maggior parte al gruppo *Subtilis*; fra di esse evidentemente alcune erano sopravissute come semplici termo-

resistenti in grazia delle spore, altre come termofili; mediante lattoculture termobiotiche dei singoli bacilli isolati, ho verificato abbondanza di stipiti termofili nei coaguli precoci e poco acidi, mentre essi facevano più o meno difetto nei coaguli tardivi più acidi; però in ambo i tipi di coagulo la generalità delle forme bacillari si rivelò dotata di azione acidoproteolitica, come il *B. acidificans presamigenes casei*.

In base a tutto ciò è da ritenere che i coaguli precoci siano da attribuire ai bacilli acidoproteolitici termofili, mentre i coaguli tardivi sono da attribuire a germi semplicemente termoresistenti rappresentati in prima linea dai cocchi e in seconda linea dalle spore di bacilli essi pure acidoproteolitici; e per vero il diverso grado di acidità osservato nei coaguli tardivi con 5 a 7‰ di acidità lattica, è da mettersi in rapporto colla maggiore o minore collaborazione di germi acidoproteolitici, fra i quali oltre ai detti bacilli sonvi, come dicemmo, anche forme cocciche; infatti la coagulazione del latte per semplice acidificazione (senza chimasi) alla temperatura ambiente (non mai superiore ai 30° C.) non può effettuarsi con acidità lattica inferiore al 6-6,5‰.

Il pericolo dei termofili è certamente attenuato colla pastorizzazione alta a 80-85° C., ed anche colla bollitura casalinga del latte, perchè le forme vegetative di detti bacilli vengono distrutte oltre i 70° C.; rimangono però superstiti le loro spore, le quali pure sono capaci di germinare così rapidamente alle elevate temperature, cioè appena al disotto dei 70° C. e fino a 20° C., che se il latte si raffredda troppo lentamente o insufficientemente, come spesso succede presso i rivenditori e nelle case, massime d'estate, si può determinare in breve tempo la coagulazione prematura o dolce.

Tutto sommato adunque le suesposte risultanze recano una convincente conferma pratica alle mie precedenti ricerche sull'importanza degli Acidoproteoliti e dei termofili e ancora più degli Acidoproteoliti-termofili nella pastorizzazione del latte, e vengono ad acuire la necessità che il latte pastorizzato sia refrigerato immediatamente profondamente e durevolmente fino al consumo. Ne deriva ancora l'opportunità di assumere nuovi criteri per il giudizio sulla riuscita della pastorizzazione; questo giudizio, che oggi è fondato sul numero dei batteri superstiti, dovrebbe essere invece fondato sulla serbevolezza del latte, la quale non dipende tanto dalla carica microbica totale quanto dalla qualità dei germi sopravvivenenti e in modo speciale dagli Acidoproteoliti termofili.

Biologia. — *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte* $\lambda = 2-3$ m. *sull'amilasi*. Nota di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata ⁽¹⁾ dal Socio B. LONGO.

Abbiamo posto in evidenza nelle Note precedenti ⁽²⁾ l'azione che le onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. esercitano sul potere catalasico dei semi, e siamo passati poi ad osservare l'influenza che queste stesse onde esercitano sul potere amilasico, ed in particolare su quelle dell'orzo da birreria ⁽³⁾.

Si è potuto constatare così, come anche il potere amilasico dell'orzo venga fortemente influenzato dalle onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m.: tali onde risvegliano più presto il potere enzimatico dei semi e lo esaltano.

È stata esaminata l'influenza che può avere in questo senso un irraggiamento con onde ultracorte, sul seme, prima della bagnatura, e l'influenza esercitata invece da un irraggiamento continuo dal momento precedente la bagnatura fino al giorno in cui la piumetta dell'orzo ha raggiunto in maggioranza la lunghezza del seme.

Riferiamo dell'uno e dell'altro gruppo di esperienze.

TECNICA SEGUITA.

L'irraggiamento a mezzo di onde elettromagnetiche ultracorte, venne fatto col nostro apparecchio Radio oscillatore, tipo Eccles Mesney modificato, che emette onde di lunghezza perfettamente controllata: $\lambda = 2.80$ m. I semi di orzo venivano posti entro un circuito in risonanza col Radio oscillatore, in cui circolava sempre la medesima quantità di energia. Le esposizioni furono per le nostre esperienze della durata di 30 minuti giornalieri.

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(2) G. MEZZADROLI e E. VARETON, *Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte* $\lambda = 2-3$ m. *sul potere catalasico dei semi*. «Rendiconti R. Acc. dei Lincei», 1930, vol. XI, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 4.

(3) Esperienze sull'azione della luce, dei raggi ultra-violetti, della emanazione del radio e delle correnti elettriche sull'orzo, furono fatte da: Burge, Chauchard-Mazoué, R. de Fazi, Green, Laborde-Lemay, Lebedew, S. Löwenthal-Wohlgemuth.

Nella determinazione del potere saccarificante (amilasi) del malto abbiamo seguito il metodo proposto da Effront⁽¹⁾ e da lui descritto.

Esperienza N. 1.

Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte sul potere saccarificante del malto, quando si irraggi l'orzo soltanto prima della bagnatura.

Riportiamo i dati medi ottenuti, in base a numerose esperienze, eseguite su lotti di 500 grani di orzo, di confronto e 500 grani di orzo sottoposti all'azione delle onde.

Orzo comune da malto: 2 giorni di bagnatura, 4 giorni di germinazione, temperatura ambiente, media 16° C.

L'orzo irraggiato venne sottoposto all'azione delle onde corte, allo stato secco prima della bagnatura per 30 minuti.

Al 4° giorno di germinazione abbiamo determinato il potere saccarificante di questo orzo, osservando prima l'aspetto dei semi:

Determinazioni riferite a 100 semi di orzo	Prove di confronto	Prova sottoposta all'azione delle onde
Semi non germinati	5	2
Semi aventi una piumetta meno lunga del seme	66	38
Semi aventi una piumetta della lunghezza del seme	27	49
Semi aventi una piumetta lunga una volta e mezzo il seme	2	10
Semi aventi una piumetta lunga due e più volte il seme	—	1

Potere saccarificante.

	Numero di cmc. di soluzione necessari per ridurre 2 cmc. di Fehling diluito 4 volte il suo volume	Quantità totale di maltosio formato nei 160 cmc. di soluzione
Orzo prova di confronto	15.6 cmc.	1622 mgr.
Orzo irraggiato prima della bagnatura	12.8 »	1896 »

(1) JEAN EFFRONT, *Les enzymes et leurs applications*. Paris, Carré et Naud, 1899, p. 232, *Determination du pouvoir saccharifiant*.

Se poniamo uguale a 100 il potere saccarificante dell'orzo della prova di confronto, quello dell'orzo irraggiato diviene: 114.

La quantità di maltosio che si forma per azione dell'amilasi dell'orzo irraggiato è circa: 17 % maggiore di quella formata per azione dell'amilasi dell'orzo di confronto.

Al 5° giorno.

	Numero di cmc. di soluzione necessari per ridurre 2 cmc. di Fehling diluiti 4 volte con H ₂ O	Quantità totale di maltosio formato nei 160 cmc. di soluzione
Orzo prova di confronto	12.2	1793.22
Orzo irraggiato prima della bagnatura	9.5	2504.58

Se poniamo uguale a 100 il potere saccarificante dell'orzo confronto, quello dell'orzo irraggiato diviene: 122.12.

La quantità di maltosio formato per azione dell'amilasi dell'orzo irraggiato è circa 34 % maggiore di quella formata per azione dell'amilasi dell'orzo di confronto.

Al 6° giorno.

	Numero di cmc. di soluzione necessari per ridurre 2 cmc. di Fehling diluiti 4 volte con H ₂ O	Quantità totale di maltosio formato nei 160 cmc. di soluzione
Orzo prova di confronto	9.6	2440.12
Orzo irraggiato prima della bagnatura	10	2371.20

Se poniamo uguale a 100 il potere saccarificante dell'orzo confronto quello dell'orzo irradiato diviene: 95.84.

La quantità di maltosio formato per azione dell'amilasi dell'orzo irraggiato è circa di 3.2 % minore di quella formata per azione dell'amilasi dell'orzo di confronto.

Esperienza N. 2.

Azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. sul potere saccarificante dell'orzo per irraggiamento giornaliero continuato.

Anche per questo gruppo di esperienze riportiamo i dati medi ottenuti in base a numerose esperienze eseguite su lotti di 500 grani di orzo di confronto e 500 grani sottoposti all'azione delle onde.

Orzo comune da malto: 2 giorni di bagnatura, 6 giorni di germinazione, temperatura ambiente media: 16° C.

L'orzo da irraggiare veniva sottoposto giornalmente all'azione delle onde corte, entro il circuito, posto in risonanza col Radio oscillatore, per 30 minuti, a datare dal momento precedente la bagnatura, fino al giorno in cui veniva prelevato per le determinazioni.

Al 4° giorno di germinazione abbiamo determinato il potere saccarificante di questo orzo, osservando dapprima l'aspetto dei semi.

Determinazioni riferite a 100 semi di orzo	Prove di confronto	Prova sottoposta all'azione delle onde
Semi non germinati	5	1
Semi aventi una piumetta meno lunga del seme	66	8
Semi aventi una piumetta della lunghezza del seme	27	14
Semi aventi una piumetta lunga una volta e mezza il seme	2	65
Semi aventi una piumetta lunga due e più volte il seme	—	4

Potere saccarificante.

	Numero di cmc. di soluzione necessari per ridurre 2 cmc. di Fehling	Quantità totale di maltosio formato nei 160 cmc. di soluzione
Orzo prova di confronto	15.6	1622 mgr.
Orzo sottoposto giornalmente all'azione delle onde	8.1	2912.5 »

Se poniamo uguale a 100 il potere saccarificante dell'orzo di prova di confronto, quello dell'orzo irraggiato, diviene 148.

La quantità di maltosio formata per azione dell'amilasi dell'orzo irraggiante è del 79 % maggiore di quella formata per azione dell'amilasi della prova di confronto.

Da questo giorno il potere saccarificante dell'orzo sottoposto all'azione delle onde elettromagnetiche ultracorte, incomincia a diminuire, le piumette dell'orzo sorpassano infatti rapidamente la lunghezza del seme, di una o due volte, mentre invece il potere saccarificante dell'orzo confronto continua ad

aumentare per raggiungere il suo massimo fra il 5° e 6° giorno come fu posto in evidenza nelle esperienze precedenti.

È inoltre interessante il fatto che l'orzo irraggiato giornalmente ha il suo massimo di potere saccarificante più elevato di quello dell'orzo della prova di confronto.

	Numero di cmc. di soluzione necessari per ridurre 2 cmc. di Fehling diluito con 4 volte il suo volume d'acqua	Quantità totale di maltosio formato nei 160 cmc. di liquido
Orzo prova di confronto	9.6	2440.12
Orzo irraggiato giornalmente	8.1	2912.50

Cioè se poniamo il massimo del potere saccarificante dell'orzo di confronto uguale a 100, quello dell'orzo irraggiato diviene 115.

La quantità massima di maltosio totale che si forma è del 19% maggiore nel caso dell'orzo irraggiato.

RIASSUNTO E CONCLUSIONI.

Abbiamo seguito l'azione che le onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. esercitano sull'amilasi dell'orzo, sottoposto alla loro azione: sia per una volta sola, prima della bagnatura, sia giornalmente nel decorso della germinazione; esposizione della durata i 30 minuti, e possiamo concludere quanto segue:

1. Le onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m. esercitano un'azione favorevole sul movimento enzimatico dei semi, ed in particolare sulla amilasi;
2. L'orzo sottoposto all'azione delle onde elettromagnetiche per 30 minuti prima della bagnatura, raggiunge il massimo del potere saccarificante da $\frac{1}{2}$ giorno a 1 giorno prima dell'orzo confronto;
3. L'orzo sottoposto all'azione delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m. ogni giorno per la durata di 30 minuti, raggiunge il massimo del potere saccarificante circa 2 giorni prima dell'orzo confronto. Questo massimo potere saccarificante è inoltre superiore in valore assoluto del massimo potere saccarificante dell'orzo confronto e precisamente del 15%, e la quantità massima di maltosio formato è del 19% in più di quella di confronto.

Biologia (Anatomia). — *Osservazioni sulla struttura del Vitreo* ⁽¹⁾ Nota di D. CATTANEO presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. A. DIONISI.

Ritornare sull'argomento della struttura del vitreo, dopo che sono stati pubblicati tanti e pregevoli lavori, potrebbe sembrare non opportuno.

Io credo invece che oggi la questione della struttura del vitreo possa essere ripresa con successo perchè sono stati introdotti nuovi indirizzi di ricerca i quali, permettendo di evitare fino ad un certo punto alterazioni artificiali di tecnica, danno la possibilità di arrivare ad una valutazione dei risultati più corrispondenti alla realtà.

Per quanto riguarda il campo istologico è noto che secondo alcuni l'impalcatura del corpo vitreo sarebbe costituita da membrane con disposizioni ed orientazioni speciali, secondo altri, e sono la maggior parte dei ricercatori recenti, si avrebbe invece una struttura fibrillare con particolari caratteri delle fibrille costitutive, secondo altri infine il vitreo non avrebbe nè struttura membranosa, nè struttura fibrillare, ma sarebbe amorfo, omogeneo, e granuloso.

Anch'io ho esaminato molti preparati di vitreo allestiti con diversi procedimenti di tecnica istologica, oltre che con i metodi più comuni anche, con particolare predilezione, coi metodi di impregnazione metallica.

Debbo concludere che una interpretazione sicura non è facile, perchè pur essendo indotti ad ammettere una struttura fibrillare, le fibrille non appaiono in genere veramente come entità morfologiche ben distinte e individualizzate, come troviamo per esempio nel tessuto nervoso e in certi tessuti connettivi, e talvolta sembrerebbero assumere un aspetto e una disposizione tale da far pensare che risultino dalla condensazione di lamelle o dalla agglutinazione di una sostanza fondamentale primitiva omogenea.

Di fronte ai diversi e contraddittori risultati degli esami istologici si è sperato con la biomicroscopia, cioè con l'esame diretto del vitreo nell'occhio vivente, di poterne dimostrare la reale struttura.

Se è vero che con l'esame biomicroscopico si evitano le eventuali alterazioni del vitreo dovute ai comuni metodi istologici per causa dei liquidi fissatori, delle colorazioni, del calore ecc. possiamo ritenerci sicuri che quello che si vede alla lampada a fessura rappresenti la reale struttura del vitreo?

(1) Lavoro compiuto nel R. Istituto di Clinica oculistica della Università di Sassari.

(2) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

Prendendo in considerazione il decorso dei raggi luminosi nell'interno dell'occhio vediamo che una parte viene riflessa dalla superficie anteriore della cornea, una parte diffusa nel parenchima; altrettanto avviene nel passaggio attraverso il cristallino.

Si determinano inoltre deviazioni e modificazioni del fascio luminoso in conseguenza dell'astigmatismo marginale e dell'aberrazione dovuta al passaggio attraverso le parti marginali della cornea e del cristallino.

Dei raggi che arrivano al vitreo quelli che non vengono arrestati dagli elementi stessi del vitreo, vengono riflessi dalla superficie retinica, la quale agisce così come specchio concavo. E questi raggi che provengono dalla retina possono essere di nuovo riflessi dalla superficie posteriore del cristallino attraverso il vitreo.

Pertanto *a priori* si deve ammettere che tutti questi fenomeni ottici non siano senza influenza sulle immagini biomicroscopiche del vitreo.

Infine è un fatto comunemente noto che i reperti biomicroscopici del vitreo possono diversamente apparire a seconda della natura e della intensità della sorgente luminosa.

Io ho intrapreso una serie di ricerche sperimentali allo scopo di stabilire soprattutto fino a che punto i reperti rilevabili alla lampada a fessura corrispondano a reali strutture.

Le osservazioni sono state fatte sul vitreo di occhi di bue di recente enucleati.

Disposto il bulbo su apposito apparecchio faccio anzitutto un esame preliminare alla lampada a fessura.

L'osservazione del vitreo è quasi sempre assai difficile se non impossibile sia per la ristrettezza della pupilla, sia perchè la cornea, per quanto trasparente, ostacola sempre più o meno la penetrazione dei raggi luminosi.

Escido quindi la cornea al limbo e tutto l'iride fino alla sua base.

L'esplorazione del vitreo viene in questo modo facilitata. Si osserva quasi sempre nella parte più anteriore una formazione simile a membrana con strie chiare generalmente verticali od oblique dall'alto in basso, comunque venga ruotato il globo.

Se si fa una pressione graduale sul bulbo dall'alto in basso in corrispondenza dell'equatore si vede che gradatamente le strie vanno scomparendo. Se allora si diminuisce gradatamente la pressione le strie ricompaiono.

Questa semplice esperienza dimostra a mio parere che la superficie anteriore del vitreo è delimitata da una formazione simile a una membrana, lo strato limitante anteriore, e che le strie chiare sono pieghe di questo strato. Dietro esso il vitreo appare quasi sempre di aspetto uniforme: rara la presenza di aree più oscure intercalate da zone di maggiore densità ottica.

Quindi con le opportune cautele si recidono le fibre zonulari e sollevando il cristallino lo si stacca delicatamente dal vitreo.

Si riscontrano costantemente delle connessioni tra limitante anteriore del vitreo e cristalloide posteriore.

Esaminando quindi il vitreo direttamente alla lampada a fessura il suo aspetto appare quasi sempre uniforme.

Penso che per la tendenza del vitreo a procidere in avanti la limitante anteriore si lasci distendere e scompaiano quindi tutte le pieghe.

Si asporta quindi un anello di sclera di 6-7 millimetri oltre il limbo e con essa si asporta anche la zona ciliare. Rimane quindi il vitreo contenuto nella calotta posteriore da cui si può levare con facilità.

Si può isolare anche il vitreo insieme col cristallino usando gli opportuni accorgimenti.

Quindi il vitreo integro, *in toto*, viene raccolto in vaschette di vetro a pareti piane e parallele e in vaschette a forma di sfera.

Quando si è isolato il vitreo insieme col cristallino si cerca di avere la giusta orientazione e si dirige quindi il fascio luminoso attraverso il cristallino in senso antero-posteriore, quindi girando la vaschetta si osserva il vitreo dall'indietro in avanti e poi ancora attraverso le pareti laterali della vaschetta.

Il vitreo si illumina presso che omogeneamente. Un reperto interessante si rileva ispezionando la sua superficie esterna, dove si osservano alla lampada a fessura numerosi punticini chiari; essi mancano completamente sulla superficie anteriore, nella zona retrolenticolare.

Il quadro è uguale anche quando si esamina il vitreo isolato senza cristallino.

Se con un fine coltellino o sottile forbicina si pratica qualche incisione nella massa del vitreo appaiono nella sezione ottica del vitreo delle discontinuità, rilevanti coll'aspetto di spazi oscuri, strie di maggior densità ottica.

Per stabilire se per effetto della riflessione della luce si modifica l'aspetto del vitreo nella bacinella a pareti piane e parallele ho applicato alla superficie posteriore uno specchio piano.

Nel fascio riflesso non si rilevano nella porzione di vitreo illuminato speciali particolarità. Se si inclina la bacinella in modo che i raggi incidenti cadano normali alla superficie anteriore e quindi anche alla superficie specchiante, sovrapponendosi il fascio riflesso al fascio incidente, viene aumentata la chiarezza della zona di vitreo illuminata senza però modificazioni morfologiche.

I reperti descritti sono stati controllati anche con l'osservazione al microscopio comune usando obbiettivi deboli: La bacinella di vetro viene posta sul tavolino del microscopio e per l'illuminazione ho usato la stessa lampada a fessura dirigendo il fascio luminoso attraverso una delle pareti laterali della bacinella.

Anche nelle bacinelle sferiche la struttura del vitreo appare quasi omogenea ed uniforme. Se si notano delle discontinuità esse risultano maggiormente per gli effetti ottici dovuti alla riflessione della luce.

A seconda infatti che il fascio incidente cada al disopra o al disotto del piano equatoriale orizzontale, arrivi convergente o divergente, obliquo verso l'alto o verso il basso, dalla superficie posteriore si hanno raggi riflessi in varie direzioni che possono essere causa di differenti effetti ottici.

Ho studiato infine le modificazioni degli aspetti alla lampada a fessura nel vitreo isolato sottoposto all'azione di soluzioni isotoniche acide (HCl , H_3PO_4) e alcaline (NaOH) e di soluzioni ipotoniche e ipertoniche di un sale (NaCl).

Per effetto delle soluzioni acide si forma un lieve intorbidamento alla superficie che si diffonde diversamente a seconda per esempio che trattasi di HCl o di H_3PO_4 .

Più distinti e chiari risultano gli elementi puntiformi sulla superficie esterna del vitreo.

Per effetto delle soluzioni di NaOH si determina un intorbidamento uniforme che si estende a tutta la massa del vitreo e che si rileva alla lampada a fessura per la maggiore densità ottica.

Nelle soluzioni di NaCl alla lampada a fessura la struttura del vitreo non si differenzia molto da quella che si rileva esaminando il vitreo a fresco.

Dalle ricerche che ho brevemente esposto risulterebbe dunque che il vitreo isolato, esaminato a fresco alla lampada a fessura presenta una struttura presso che omogenea; questa struttura può modificarsi o per effetto di fenomeni ottici o per la presenza di elementi diversi, o artificialmente in certe condizioni sperimentali.

In questi ultimi tempi si è fatta strada la tendenza secondo la quale il vitreo non debba essere considerato come un'entità morfologica costituita da un tessuto con una propria e determinata struttura, ma come una sostanza colloidale come tale sottoposta alle leggi di fisico-chimica.

Baurmann afferma che tutte le strutture fibrillari in forma di rete scoperte al microscopio devono essere considerate come degli artefatti di fissazione « prodotto dalla precipitazione di una sostanza gelatinosa e variante secondo i rapporti quantitativi tra le sostanze colloidali e le sostanze precipitanti ».

Ricorrendo all'ultramicroscopio di Zsigmondy, Baurmann e in seguito Heesch hanno osservato nel vitreo un fitto intreccio di fili sottilissimi incrociantsi in differenti direzioni: essi hanno grandezza ultramicroscopica in due dimensioni e una grandezza microscopica solo nella lunghezza.

Dobbiamo domandarci se questa struttura ultramicroscopica a fili incrociati rappresenti la struttura reale del vitreo esaminato a fresco.

In una serie di note comunicate nel 1927 all'Accademia dei Lincei io ho reso noto i risultati delle mie osservazioni ultramicroscopiche sulla struttura del cristallino.

Già fin d'allora, usando il condensatore bicentrico a specchio B^r per campo oscuro di Leitz, ho fatto indagini per determinare la struttura ultramicroscopica del vitreo.

I risultati sono stati sempre negativi nel senso che mai ho potuto constatare alcuna differenziazione nella sostanza del corpo vitreo: in tutti i casi essa apparve oscura, otticamente omogenea.

Successivamente ho usato il condensatore cardioide costruito da Zeiss e proposto da Siedentopff per le osservazioni ultramicroscopiche.

In tutti i casi nei quali ho esaminato il vitreo a fresco non ho potuto mai mettere in evidenza nessuna speciale trama nè altre particolarità di struttura.

Mentre lo strato limitante anteriore appare pure omogeneo, otticamente vuoto, lo strato limitante esterno appare cosparso di elementi fortemente rinfrangenti che corrispondono ai punticini osservati alla lampada a fessura sulla superficie esterna del vitreo.

In questi elementi si differenzia una massa centrale più oscura, granuli fortemente rinfrangenti di aspetto e grandezza diversi ed esili prolungamenti che si irradiano dal centro.

Se la stessa preparazione si colora a fresco e si esamina al microscopio comune si dimostra che tali elementi rappresentano cellule vere e proprie: sono le cellule ialoidee già illustrate dagli autori nei preparati istologici e che, come risulta dalla mia descrizione, per la prima volta sono stati riconosciuti da me col mezzo della lampada a fessura. Però in causa dei piccoli ingrandimenti possibili con questo mezzo di osservazione la loro natura non è stata sicuramente stabilita se non dopo l'esame ultramicroscopico.

Come già avevo fatto con le ricerche alla lampada a fessura ho voluto ricercare se per azione di soluzioni diverse si modifica la struttura ultramicroscopica del vitreo.

Colle soluzioni isotoniche acide gli elementi ialoidei si presentano assai rinfrangenti: lo strato limitante e la sostanza propria del vitreo appaiono un po' più rinfrangenti che nel vitreo normale, ma in ogni modo di aspetto omogeneo senza che possa rilevarsi nessuna particolarità strutturale.

Nel vitreo trattato con soluzione isotonica di NaOH mentre la limitante esterna appare omogenea, la sostanza propria del vitreo presenta una struttura finissimamente e intensamente granulosa.

Questo reperto è interessante perchè, contrariamente a quello che anche io ritenevo, rileva una differenza strutturale tra limitante esterna e sostanza propria del vitreo.

Col trattamento nelle soluzioni di NaCl la struttura ultramicroscopica del vitreo esaminato al condensatore cardioide non è sensibilmente differente da quella del vitreo normale.

Dall'insieme delle mie ricerche tutto autorizza a ritenere che la struttura del vitreo esaminato a fresco alla lampada a fessura; all'esame ultramicroscopico col condensatore cardioide risulta omogenea.

È mia opinione però che allo stato attuale delle nostre conoscenze sia possibile trovare una spiegazione e una collegamento degli svariati reperti che sono stati ottenuti con gli uni e con gli altri metodi.

Le immagini con la lampada a fessura secondo Baurmann ed Heesch sarebbero dovute ad un effetto di *moirée*, cioè alla sovrapposizione di più strutture fibrillari.

È interessante ricordare che nei preparati fissati Heesch avrebbe trovato una struttura ultramicroscopica perfettamente uguale a quella dei preparati a fresco. Questo, a mio parere, confermerebbe l'opinione di Redslob cioè che « la struttura ultramicroscopica a fili rappresenti non l'aspetto della trama vera del gel, ma quello di una trama modificata per un fenomeno di coagulazione ».

Colla colorazione si avrebbe secondo Heesch un assorbimento del colore da parte dei fili ultramicroscopici e un deposito meccanico delle singole particelle coloranti tra i fili.

Comunque, anche se ammettiamo, come io penso, che il vitreo allo stato fresco abbia una struttura amorfa, omogenea, non per questo si devono rigettare, come vorrebbero alcuni moderni autori, tutti gli importanti risultati delle ricerche istologiche e le relative deduzioni anatomiche sulla genesi del vitreo.

Anche per quello che riguarda la struttura del vitreo, l'indirizzo giusto della moderna biologia a me sembra che oggi debba essere quella di collegare i fatti morfologici risultanti dalle ricerche pazienti e scrupolose dei passati ricercatori coi dati che si possono desumere dallo studio delle proprietà fisico-chimiche dei colloidi.

Biologia (Anatomia). — *Osservazioni sulla struttura del Vitreo.* Memoria di D. CATTANEO pres. dal Corresp. A. DIONISI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo delle Memorie.

Biologia (Patologia). — *Tuberculine e anaesotuberculine*⁽¹⁾.
Nota di G. FINZI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. A. DIONISI.

In una precedente comunicazione⁽³⁾ indicavamo attraverso quale procedimento e su quale base scientifica si fondava il concetto della preparazione dell'anaesotubercolina.

Sull'argomento, hanno in seguito pubblicato Sarzi-Sartori⁽⁴⁾, B. Branchini⁽⁵⁾, N. Baboni⁽⁶⁾.

Anaesotubercolina bovina — (A. E. T. B.). — Da culture di bacilli tubercolari tipo bovino (LP - N - S. S. Quiroga) coltivate in brodo glicerinato al 5 % lasciate per circa 4 settimane in termostato a 38°-38°5 abbiamo ottenuto, seguendo le norme già indicate per l'anaesotubercolina ottenuta da bacilli tipo Koch di origine umana (A. E. T. U.), l'A. E. T. B.

Con apposita pipetta portata, attraverso il velo, in fondo al matraccio, a lenta aspirazione abbiamo raccolto il brodo di cultura perfettamente limpido, quasi sempre senza minima traccia di velo. Il brodo di cultura che ha il noto caratteristico odore delle tuberculine, è stato da noi semplicemente filtrato su carta, indi trattato con formalina nelle proporzioni del 5 %.

L'anaesotubercolina bovina sui bovini tubercolotici. — Su bovini tubercolotici, buoi e vacche di razze diverse, di differente età, gravide e non, messe nelle condizioni più indicate per effettuare, col più rigoroso controllo, le prove del caso, abbiamo iniettato, per via sottocutanea, l'A. E. T. B. attenendoci a tutte le indicazioni raccomandate e volute per la prova classica sottocutanea di tubercolina bruta. La dose impiegata è di 2.5 c. c.

Gli sbalzi della temperatura, osservati nelle 48-72 ore seguenti le iniezioni di A. E. T. B., e valutati sulla media di tre prelievi termici effettuati nelle 12 ore che hanno preceduto la prova, sono stati in tutti i soggetti tubercolotici veramente notevoli e imponenti.

In non pochi casi lo sbalzo termico ha raggiunto e superato i 3°; in taluni altri le reazioni termiche erano già ben evidenti alla 6ª ora, in quasi tutti i casi il fastigio si è osservato entro la 12ª-15ª ora. In non pochi

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Patologia Speciale Medica del R. Istituto Superiore di Medicina Veterinaria di Milano.

(2) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(3) G. FINZI, «R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. X, serie 6°, 2° sem., fasc. 1-2, luglio 1929.

(4) E. SARZI-SARTORI, «Il Moderno Zooiatro», 1929.

(5) B. BRANCHINI, «Profilassi», vol. III, fasc. 4°, 1930.

(6) N. BABONI, «Deutsche Tierärztliche Wochē», dicembre 1930.

soggetti poi, nella fase di defervescenza, si è appalesato un secondo fastigio generalmente minore del primo per entità e durata. Solo in qualche soggetto a reazione positiva (5-6%) si è osservato un lievissimo stato di anorexia e adinamia, in tantissimi (70-80%) tosse, mai tremori muscolari, nessuna reazione locale. Infatti nessuna tumefazione edematosa, a carattere di manifestazione reattiva, ci fu dato osservare in corrispondenza del punto di iniezione della A. E. T. B.

La produzione lattea nelle 24-36-48 ore che hanno seguito l'iniezione di A. E. T. B. è diminuita di $\frac{1}{10}$ - $\frac{1}{5}$.

Escludiamo l'esistenza di qualsiasi rapporto fra reazione alla tubercolina e gravità di processo tubercolare. Animali tubercolotici magri e deboli hanno reagito con manifestazioni perfettamente paragonabili a quelle ottenute in soggetti nutriti, robusti con tubercolosi non grave.

L'anaesotubercolina nei soggetti sani. — L'A. E. T. B. provata su bovini sani, su vitelli sani di 2-3-5-8 giorni di età, alla dose di 10-5 e 2.5 c. c. per via sottocutanea, non ha mai provocato nè reazione termica, nè reazione generale. Iniettata a capre sane di 70 Kgr. per via sottocutanea alla dose di 5 c. c. e a cavalli sani, per via sottocutanea alla dose di 20 c. c. o per via endovenosa alla dose di 60 c. c. non provoca reazioni di sorta.

«Abitudine» o «adattamento» alla anaesotubercolina bovina. — Se a bovini tubercolotici iniettati con 2.5 c. c. di A. E. T. B. a distanza di 3-5-10-15 giorni, noi iniettiamo la stessa dose (2.5 c. c.), oppure 3-3.5 c. c. di A. E. T. B., otteniamo reazioni termiche e generali altrettanto evidenti e dimostrative come se si agisse di primo intervento. Ne consegue che una iniezione di A. E. T. B. a dose diagnostica, non crea lo stato particolare di «abitudine alla tubercolina» in quanto, ad una seconda iniezione anche a dose eguale alla prima, gli animali reagiscono ancora in modo evidentissimo.

Ma un importante rilievo s'impone. Se a bovini che hanno reagito con ipertermia notevole in seguito ad iniezione per via sottocutanea di A. E. T. B., alla dose di 2-2.5 c. c., noi iniettiamo, dopo 6-10 giorni 0.5 c. c. di A. E. T. B. per via intradermica alla plica caudale o alla cute della palpebra o per via intrapalpetrale, si ottengono, nel 90-95 % dei casi, reazioni termiche con sbalzi di 1°5'-2°-2°5' con tumefazione alla plica inoculata, grande come una nocciola o una noce, o con tumefazione notevole alla palpebra, mai però accompagnata da secreto purulento, ma quasi sempre da lacrimazione. Nei casi invece (5 %-10 % al massimo) nei quali l'iniezione di 0.5 c. c. di A. E. T. B. non provoca sbalzo termico, le reazioni locali sono pure insignificanti. Se le reinoculazioni di A. E. T. B. vengono fatte, come nel caso precedente, sempre alla dose di 0.5 c. c., ma dopo 15-20 giorni dalla prima iniezione sottocutanea di 2-2.5 c. c., gli animali reagiscono, nel 100 % dei casi, sempre con le manifestazioni sopra indicate.

In questi casi l'elevazione della temperatura inizia dopo 2-4-6 ore dall'avvenuta intradermo o intrapalpebreazione, per salire gradatamente

sino a raggiungere il fastigio verso la 8^a-10^a-12^a-14^a ora e per ritornare alla media precedente dopo 18-24 ore dalla iniezione.

Su quanto ci era noto sul «fenomeno di abitudine» si impongono delle riserve non prive di interesse.

Oftalmoreazione e prova sottocutanea con anaesotubercolina. — L'A. E. T. B. come l'A. E. T. U., può essere utilmente impiegata per l'oftalmoreazione a scopo diagnostico. Le reazioni sono molto più evidenti di quelle comunemente ottenute con la tubercolina bruta.

Se noi possiamo assicurare che ad ogni oftalmoreazione positiva corrisponde infezione tubercolare, non possiamo affermare però che ad ogni oftalmoreazione negativa corrisponda assenza di lesioni tubercolari. Certo che l'A. E. T. B. dà una percentuale di reazioni oftalmiche positive molto più alta che non la tubercolina bruta comunemente impiegata. In quasi tutti i casi i fenomeni reattivi della oftalmoreazione dei bovini durano 2-4 giorni.

L'oftalmoreazione «in serie» «seconda» provoca reazioni di intensità notevole con corrispondenti sbalzi termici.

L'A. E. T. B., come l'A. E. T. U., iniettata per via sottocutanea a soggetti tubercolotici precedentemente provati con l'oftalmoreazione, provoca una reazione di «rivivenza» con manifestazioni infiammatorie a carico della congiuntiva, molto più intense e molto più persistenti della prima volta. La secrezione di materiale purulento dura talora per 4-5 giorni; taluni soggetti, che alla prova oftalmica avevano reagito negativamente o con lieve manifestazione catarrale e lacrimazione, hanno in seguito ad una iniezione sottocutanea di 2-2.5 c. c. di A. E. T. B. una reazione oftalmica fortemente positiva.

L'intradermoreazione con anaesotubercolina bovina. — L'A. E. T. B. iniettata nello spessore della plica caudale alla dose di $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{8}$ di c. c. si comporta in modo perfettamente identico alla A. E. T. U.

Gli sbalzi termici che spesso accompagnano le reazioni locali raggiungono e sorpassano alle volte due gradi di differenza con la media della temperatura presa prima della prova. Le manifestazioni reattive sono molto più evidenti e quindi più facilmente interpretabili, di quelle ottenute con le altre tubercoline. Il metodo, sicuramente più rigoroso della prova oftalmica, ha un valore diagnostico minore della prova sottocutanea. Per gli animali precedentemente trattati con iniezioni sottocutanee di A. E. T. B. ripetiamo quanto più sopra espresso.

L'intrapalpebrareazione con Anaesotubercolina bovina. — Quanto fu rilevato da B. Branchini⁽¹⁾ e N. Baboni⁽²⁾ circa il valore della prova intrapalpebrale applicata con A. E. T. U. noi dobbiamo ripetere per l'A. E. T. B. nella diagnosi della tubercolosi bovina. Dosi di 2.5-2-1 $\frac{1}{2}$ -1-0.5 c. c. di

(1) Loc. cit.

(2) Loc. cit.

A. E. T. B. danno reazioni tanto evidenti che talvolta riassumono i vantaggi della prova sottocutanea e della instillazione nel sacco oculo-congiuntivale, in quanto capita sovente di vedere del secreto purulento, mentre costantemente si osserva una notevole tumefazione della palpebra accompagnata da lacrimazione più o meno abbondante.

Gli sbalzi termici, che costantemente accompagnano le notevoli reazioni locali danno al metodo un grande valore diagnostico.

Anaesotubercolina mista (A. E. T. M.). — Generalmente, nei diversi Istituti dove si prepara la tubercolina a scopo diagnostico, si mescolano le culture umane e bovine (dopo avvenuta la loro concentrazione) in proporzioni che variano da istituto a istituto, (*tuberculine miste*).

L'Istituto Pasteur di Parigi, per esempio, mescola le due tuberculine nelle proporzioni seguenti: 3 volumi di tubercolina bruta bovina e 1 volume di tubercolina bruta umana; e Behrinswerke di Marburgo, nelle proporzioni di 2 volumi di tubercolina bruta umana e 1 volume di tubercolina bruta bovina (*tubercolina mista*).

Altri istituti, invece, preparano delle tuberculine brute *polivalenti* improntate a diversi ceppi tubercolari tipo bovino (Alpenländisches Impfstoffwerk Triesterhof: Graz; Istituto di Medicina Veterinaria di Bucarest; Istituto Veterinario di Stato: Stoccolma; Laboratorio Biologico di Ottawa (Canada); Istituto Sieroterapico Milanese) o a diversi ceppi tubercolari tipo umano (Laboratorio Batteriologico dello Stato: Stoccolma; Laboratorio della Facoltà di Medicina di Bucarest; Istituto Sieroterapico Milanese) o ad un sol ceppo tubercolare umano o bovino (*tuberculine monovalenti*) o a diversi ceppi umani, bovini ed aviari, addivenendo così ad un tipo di *tubercolina mista polivalente*. (Istituto Sieroterapico dello Stato di Rotterdam).

Noi siamo addivenuti a preparare una tubercolina *mista* mescolando a parti uguali A. E. T. U. e A. E. T. B.

Questo prodotto, impiegato a scopo diagnostico, per via sottocutanea, ha risposto, sempre nei bovini tubercolotici, in modo veramente imponente.

Una vacca tubercolotica di anni 7, di razza incrocio svizzero, in buone condizioni di nutrizione, con una media temperatura di $38^{\circ}7'$, ha raggiunto la temperatura di 42° (sbalzo termico $3^{\circ}3'$). Non rare sono le differenze termiche di $3^{\circ}-3^{\circ}1-3^{\circ}2$.

Questa tubercolina mista, in tutte le altre prove diagnostiche a reazione locale e associata, ha risposto provocando, sempre solo nei soggetti tubercolotici, reazioni manifeste e intense.

Anaesotubercolina mista polivalente. — Noi abbiamo infine preparato una tubercolina mista, polivalente, mescolando, a parti uguali, A. E. T. B. ottenuta dai ceppi tubercolari tipo bovino sopra indicati L. P. e N., e unendo ancora a parti uguali questa A. E. T. B. polivalente con A. E. T. U.

Come nel caso precedente, nei bovini tubercolotici le reazioni sono state di una evidenza veramente netta, senza manifestazioni non esattamente

valutabili. Le reazioni generali sono state sempre di moderata entità; soltanto la tosse si è fatta più frequente nei bovini già con tosse, oppure si è appalesata ad intervalli, secca, stentata in bovini che prima della tubercolinizzazione non presentavano tosse.

Con l'estinguersi della reazione termica, tutte le manifestazioni generali e di focolaio si attenuano e scompaiono.

Anche per questa tubercolina dobbiamo ripetere quanto fu più sopra-detto per il fenomeno di « abitudine », per la prova oftalmica, per la prova intradermica, per l'intrapalpebroreazione, nonchè per i rapporti che intercorrono fra queste applicazioni diagnostiche e la prova classica sottocutanea.

Per l'avvenire la nostra A. E. T. sarà sempre improntata al concetto di polivalenza e di varietà di tipi (umano e bovino). Per non essere costretti a parlare di volta in volta di una tubercolina mista polivalente, (che anche ridotta alla indicazione di A. E. T. M. P. avrebbe comunque una denominazione complessa), — come abbiamo detto ci limiteremo alla indicazione di anaesotubercolina (A. E. T.).

Età delle culture destinate alla preparazione dell'A. E. T. — Inizialmente noi lasciavamo le nostre culture alla temperatura di 38°-38°5 gradi per 20 settimane, persuasi che a cultura più ricca ed abbondante dovesse, ragionevolmente, corrispondere una maggiore quantità di esotossina.

La durata di soggiorno delle culture al termostato varia nei diversi istituti. Per esempio, l'Istituto Sierologico di Bucarest, diretto dal prof. Cantacuzène, prepara la tubercolina da culture lasciate al termostato per 8-12 settimane; l'Istituto Sieroterapico dello Stato di Rotterdam, da culture di 8 settimane; l'Istituto di Graz, da culture di 4-6 settimane; l'Istituto Veterinario, come il Laboratorio batteriologico dello Stato di Stoccolma, da culture di 8 settimane; il Laboratorio Biologico di Ottawa, da culture di 10-12 settimane; l'Istituto Burgrongh e Wellcome e quello di Merck e Behringswerke da culture di 24 settimane; infine L. Nègre e A. Boquet preparano gli estratti metilici dei bacilli di Koch da culture di 6 settimane.

Noi abbiamo cercato di stabilire a quale età della cultura la esotossina sarebbe stata più attiva, od in maggiore quantità allo scopo di poter precisamente stabilire il momento più opportuno per preparare una A. E. T. fortemente attiva.

Abbiamo, in primo tempo, saggiato l'A. E. T. proveniente da culture tipo umano e bovino di 20 settimane di età, poi da culture di 16-12-8-4-3-2-1 settimana. Infine abbiamo voluto vedere se in 3^a-4^a giornata dallo sviluppo del velo, sempre su brodo glicerinato al 5%, i bacilli tubercolari avevano diffuso, nel mezzo nutritivo, della esotossina. (Noi ci riferiamo naturalmente a culture a rapido sviluppo).

Iniettata a bovini tubercolotici, l'A. E. T. di 3^a-4^a giornata ha provocato reazioni sicuramente significative, dimostrando presenza di esotubercolina nel mezzo, attiva è già l'A. E. T. di 7^a-8^a giornata; attivissima quella

di 2-3-4 settimane: sempre molto attiva, ma non più di quella di 4 settimane, è l'A. E. T. di 8-12-16-20 settimane.

Per le nostre osservazioni, sempre dedotte da applicazioni fatte sul bovino tubercolotico, (che per noi è il mezzo più indicato per un più esatto controllo della attività delle tubercoline) ed attraverso un metodo di titolazione dell'attività delle tubercoline, che illustreremo in una prossima comunicazione, un soggiorno in termostato oltre la 4^a-6^a settimana non aumenta la quantità di esotubercolina, e quindi non aumenta la quantità di principio effettivamente attivo.

Oltre questo periodo di incubazione, le culture danno A. E. T. ad attività stabile, *forse decrescente*. Le indagini furono parallelamente condotte con materiale proveniente da culture di bacilli tubercolari umani e bovini.

Dosi di A. E. T. a scopo diagnostico nei bovini. — Per quanto abbiamo più sopra esposto, per A. E. T. noi intendiamo anaesotubercolina mista polivalente. A dosi di 0.5 c. c.-1 c. c.-2 c. c. provoca, per iniezione sottocutanea, reazioni notevoli per intensità e durata.

Dosi di 0.5 c. c. provocano sbalzi termici che variano generalmente da 1°7 a 2°3. (In un caso abbiamo raggiunto i 3°).

Quattro vacche tubercolotiche, clinicamente sospette, per quanto in condizioni generali buone iniettate con 1 c. c. di A. E. T., hanno dato sbalzi termici del genere: 2°1-2°2-2°5-3°. Altre 5 vacche, nelle identiche condizioni delle precedenti, iniettate con 2 c. c. di A. E. T., hanno dato le seguenti reazioni termiche: 1°8-1°8-2°-2°7-2°8.

Ne consegue, che dosi piccolissime di A. E. T. (dieci volte più piccole di quelle indicate per la tubercolina bruta) traducono, in modo ben evidente, lo stato di ipersensibilità dell'organismo tubercolotico di fronte ai principî tossici dei bacilli di Koch. Praticamente la dose di 2 c. c. di A. E. T., su bovini non febbricitanti, informa con esattezza e con sicurezza sulla esistenza o meno di infezione, assurgendo ogni reazione positiva o negativa, a significato diagnostico di valore assoluto.

Sterilizzazione dell'anaesotubercolina. — Nel chiudere la nostra breve memoria vogliamo ricordare come la sterilizzazione dell'A. E. T. sia unicamente improntata all'azione battericida del formolo. Il calore che interviene invece, oseremmo dire, esageratamente nella preparazione di tutte o quasi le tubercoline note (100°-104° per 30 minuti a 3 ore nella sterilizzazione della cultura; a 80°-100° nella concentrazione per evaporazione a un decimo del volume primitivo; a 100° per 30 minuti-1 ora-2 ore dopo decantazione o filtrazione), non agisce invece in modo alcuno sull'A. E. T.

CONCLUSIONI.

1. Ricerche già numerose sulle anaesotubercoline bovine e umane, impiegate nella specie bovina, dimostrano come le due esotossine si comportino in modo pressochè identico sui bovini tubercolotici.

2. Per le nostre ricerche riteniamo poter affermare che il brodo di carne di bue glicerinato (peptone 1%, cloruro di sodio 0.5%, glicerina 5%) con un ph iniziale di 7.2 è un terreno nutritivo favorevolissimo anche per la produzione delle anaesotubercoline.

3. L'anaesotubercolina è già presente nel mezzo di cultura in 3^a-4^a giornata, essa è attiva in 7^a-8^a giornata, attivissima in 2^a-3^a-4^a settimana; sempre molto attiva, ma non più di quella di quattro settimane, è l'anaesotubercolina di 8-12-16-20 settimane.

Un soggiorno in termostato oltre la 6^a-8^a settimana non aumenta la quantità di esotubercolina, anzi oltre questo periodo di incubazione, le culture danno una anaesotubercolina ad attività forse decrescente.

4. L'anaesotubercolina, per osservazioni da noi fatte con la prima anaesotubercolina umana, chiusa in fiale e conservata in luogo fresco, al riparo dalla luce, mantiene intatto il suo spiccato valore diagnostico per circa due anni.

5. L'anaesotubercolina bovina può sostituire tutte le tubercoline brute finora preparate per la diagnosi della tubercolosi bovina.

L'anaesotubercolina bovina ha sulle tubercoline brute, preparate nei differenti Istituti, tutti i vantaggi che noi già abbiamo riconosciuto alla anaesotubercolina ottenuta da bacillo tipo Koch di origine umana.

6. Lo stato di « abitudine » o di « adattamento » provocato da precedenti iniezioni di tubercolina, è sventato e vinto dalla anaesotubercolina. Anzi per risultati ottenuti con iniezioni intracutanee, alla dose di 0.5 c.c., ci domandiamo se non è il caso di rivedere quanto ci è noto, attraverso una già ricca produzione scientifica, non solo sul fenomeno di « abitudine » o « adattamento », ma benanco sui rapporti che intercorrono fra iniezioni sottocutanee ad iniezioni intradermiche di tubercolina nei bovini tubercolotici.

Per le nostre osservazioni, infatti, è da escludere che una precedente inoculazione sottocutanea di anaesotubercolina bovina disturbi, o tolga valore ad una ulteriore prova intradermica, fatta anche a distanza di pochi giorni.

7. L'anaesotubercolina mista, come l'anaesotubercolina mista polivalente (che per l'avvenire sarà indicata con la denominazione di anaesotubercolina = A. E. T.), ripete tutti i vantaggi già illustrati precedentemente per le altre anaesotubercoline.

8. Anche per l'A. E. T. dobbiamo ripetere quanto fu più sopra detto per la prova sottocutanea, per il fenomeno di « abitudine » o di « adattamento », per la prova oftalmica, per l'intradermo e l'intrapalpebro reazione, nonché per i rapporti che intercorrono fra queste applicazioni diagnostiche e la prova classica sottocutanea.

9. Per quanto dosi piccolissime di A. E. T. traducano in modo ben evidente lo stato di ipersensibilità dell'organismo tubercolotico di fronte ai principi tossici del bacillo di Koch, pure nella pratica, converrà fissare come

optimum per la prova sottocutanea nei bovini, la dose di 2 c. c. di A. E. T. Su bovini non febbricitanti, come su bovini con temperatura subfebbrile, l'A. E. T. informa con esattezza e con sicurezza sulla esistenza o meno di infezione tubercolare, assurgendo, ogni reazione positiva o negativa, a significato diagnostico di valore assoluto.

10. Per la praticità e semplicità della tecnica di preparazione, come per il costo minimo di produzione, l'A. E. T. si impone sulla vecchia tubercolina bruta, comunemente usata.

Che risponda di più allo scopo, lo dice il fatto che, in certe stalle della valle Padana, per quanto tenute in discrete condizioni igieniche, l'A. E. T. ha denunciato percentuali di tubercolosi altissime, allarmanti che vanno dal 50 a 70, al 90 %.

11. Il comportamento e la speciale attività dell'A. E. T. dipendono dal fatto che il prodotto di ricambio del bacillo di Koch risulta di un *componente termostabile*, che è la parte attiva presente anche nelle vecchie tubercoline brute, e di una *frazione termolabile*, di indubbia importanza, indispensabile in certi casi. Tale elemento termolabile è soltanto presente nella anaesotubercolina da noi preparata col nuovo procedimento.

RIASSUNTO.

L'A. E. T. (anaesotubercolina mista polivalente) è una tubercolina nuova improntata ai componenti termostabili e alle frazioni termolabili dei prodotti di ricambio dei bacilli di Koch.

Per la praticità e per la semplicità della tecnica di preparazione, per il costo minimo di produzione, per il notevole valore diagnostico, e per la sua perfetta tolleranza, questa nuova tubercolina s'impone, in patologia comparata, alla vecchia tubercolina bruta.

LUIGI CREMONA

NEL CENTENARIO DELLA NASCITA

Commemorazione del Socio G. CASTELNUOVO.

Oggi, 7 dicembre, ricorre il centenario della nascita di Luigi Cremona. Ai molti ammiratori di lui, e in particolar modo a noi suoi discepoli e quasi figli spirituali, sembrò non dovesse passare in silenzio questa data, ma fosse opportuno rievocare la memoria del maestro davanti a questa insigne Accademia, della quale egli fu una delle luci più fulgide, e alle cui pubblicazioni diede alcuni dei suoi bei lavori. Non già che la vita e le opere del Cremona non siano state ricordate all'indomani della morte; chè anzi in questa stessa aula, nel dicembre 1903, ne discorse ampiamente ed affettuosamente Giuseppe Veronese, suo discepolo diretto e mio maestro, anch'egli purtroppo oggi scomparso. A questa e ad altre commemorazioni fatte in quell'anno, tra le quali una molto particolareggiata di uno dei suoi maggiori discepoli, Eugenio Bertini, può ricorrere chi desidera un esame analitico degli scritti del Cremona. Io voglio oggi indagare qual parte dell'opera rimanga viva e fresca 27 anni dopo la morte, e per quali ragioni il nome di lui debba restare impresso nella memoria non solo dei matematici, ma pure di ogni italiano che apprezzi i problemi della cultura.

Se io dovessi con poche parole, necessariamente imprecise, caratterizzare la posizione scientifica del Cremona, direi che nella geometria algebrica, ramo da lui prediletto, egli chiude un'epoca per aprirne una nuova.

Egli chiude l'epoca d'oro della geometria proiettiva, disciplina che, elevata al grado di scienza dal Poncelet sul principio del secolo scorso, fu stimata degna di stare a fianco della geometria elementare tramandataci dai Greci, grazie al rigore dei metodi e all'elegante semplicità dei risultati. La proiettiva, dopo aver fatto le sue prove nello studio di figure elementari quali le coniche, affrontò verso la metà del secolo passato le ricerche sopra enti più elevati, come le curve e le superficie algebriche. Queste ricerche avevano veramente avuto inizio prima che il Cremona si affacciasse alla scienza; ma i metodi erano ancora imperfetti, molti teoremi erano stati enunciati senza dimostrazione, e mancavano i legami fra i vari risultati. Riprendendo le questioni

dall'origine il Cremona rivelò subito la potenza del suo ingegno. Egli perfezionò anzitutto i procedimenti di indagine fondendo nel modo più abile la intuizione geometrica con alcuni risultati fondamentali tolti dall'algebra. E questi procedimenti seppe adoperare con tale sagacia da permettere alla nuova algebra geometrica di scoprire, spesso senza sforzo, proprietà riposte che l'algebra classica, appesantita dal bagaglio delle formole, solo con fatica riuscì a ritrovare. Egli poté così ricostruire in modo organico la teoria generale delle curve e superficie algebriche, ed esporla in due monografie che possono riguardarsi come una trattazione completa del soggetto, tenendo conto dell'epoca in cui apparvero. In varie memorie staccate approfondì poi lo studio delle curve sghembe dei primi ordini, della superficie cubica e di alcune particolari superficie del quarto e quinto ordine. Questi lavori sono ammirabili, non solo per l'acume con cui la ricerca è condotta, ma pure per la eleganza della forma, per il sentimento artistico che la ispira. Il gusto del bello doveva essere una dote della famiglia Cremona; essa appare infatti tanto negli scritti del grande matematico, quanto nei quadri del fratello minore Tranquillo che, morto quarantenne, ha pur lasciato un nome cospicuo come uno dei più originali ed espressivi pittori italiani del secolo scorso.

Nel campo della geometria proiettiva algebrica Luigi Cremona lavorò con tale intensità e profondità da togliere ai successori la speranza di facili raccolti. Non già che siano esauriti i problemi, ma quelli che restano sembrano esigere per la loro risoluzione uno sforzo spesso superiore all'interesse dell'argomento. È perciò che possiamo vedere in Luigi Cremona il maggiore e forse l'ultimo dei grandi cultori della geometria algebrica proiettiva.

Egli ebbe però, come già accennai, il merito e la fortuna di aprire un nuovo indirizzo di ricerche. Trova questo il suo inizio in due memorie del 1863-64 ove sono studiate quelle trasformazioni alle quali il suo nome è rimasto legato, trasformazioni fra due piani che mutano punti in punti e rette in curve algebriche. Alle dette memorie altre si riattaccano ove la teoria delle trasformazioni cremoniane viene estesa allo spazio ed applicata ad ottenere la rappresentazione piana della superficie cubica e di altre particolari superficie. Introdurre nella geometria un nuovo gruppo di trasformazioni, non costruite artificialmente, ma imposte dalla natura stessa dei problemi, vuol dire, in primo luogo, offrire il mezzo di trasportare proprietà note di enti semplici ad enti più complessi ottenuti dai primi mediante le dette trasformazioni; ma vuol dire, in secondo luogo, dar origine allo studio di quelle proprietà geometriche che non vengono alterate dalle trasformazioni stesse. Di queste due parti del programma che la scoperta del Cremona permetteva di formulare, egli svolse la prima; essa comprende, come dissi, i procedimenti impiegati da lui per rappresentare birazionalmente sopra un piano particolari superficie, i quali procedimenti segnano l'inizio di un capitolo che prese più tardi un ampio sviluppo. La seconda parte del programma, rav-

vivata anche con idee provenienti da altre scuole, ha ispirato le principali ricerche che nel campo della geometria algebrica furono condotte nell'ultimo cinquantennio. Ed anche in queste ricerche i metodi che il Cremona aveva adoperato o introdotto nella geometria algebrica proiettiva, dimostrarono la loro fecondità. Il Cremona, ormai in età avanzata e distratto da altre occupazioni, non ha potuto partecipare alle indagini suggerite dalla seconda parte del programma. È difficile dire se egli ne prevedesse i successivi sviluppi, ma posso affermare, anche per graditi ricordi personali, che egli ne seguì i progressi col più grande interesse, fino agli ultimi giorni della sua vita.

Non è però soltanto con le ricerche proprie che il Cremona ha così validamente contribuito all'ascensione della matematica italiana. Se noi gli dobbiamo una riconoscenza così viva, e lo mettiamo anche al di sopra di altri matematici italiani suoi contemporanei, di valore comparabile al suo, è per l'impulso che egli diede al ramo di scienza che gli fu caro, creando una scuola fiorente, la quale ancora continua le tradizioni da lui lasciate e si vanta di averlo avuto maestro. A questo impulso, non meno che ai suoi lavori, dobbiamo oggi il compiacimento di vedere, da giudici stranieri imparziali, messa l'Italia al primo posto, tra le nazioni colte, nelle ricerche geometriche.

Ora poichè questo soggetto della scuola va oltre il valore dell'uomo e l'importanza di una determinata disciplina, per investire tutta l'organizzazione scientifica, val la pena di spendere qualche parola in proposito.

Voi tutti sapete quali difficoltà si incontrino nei nostri paesi latini, prevalentemente individualisti, a costituire una scuola scientifica, cioè una riunione o direi quasi una famiglia di persone collaboranti nello sviluppare e proseguire un piano organico di ricerche. Ma voi pure sapete quali vantaggi la scuola tragga con sè. Nei riguardi scientifici essa offre il mezzo di accelerare ed approfondire l'esplorazione di un determinato campo, di penetrarne ogni angolo, di illuminarlo da vari punti di vista. Ma la scuola reca pure vantaggi per quanto concerne gli individui, giacchè essa permette di sfruttare nel modo più efficace le varie attitudini, e di adoperare anche l'opera dei mediocri, che guidati possono rendere utili servigi, mentre abbandonati a sè stessi tendono a ingombrare la scienza con indagini di valore scarso o nullo.

Ora per dar vita ad una scuola non basta il valore del maestro, nè basta che egli sappia tracciare un piano di ricerche così vasto da superare la propria forza di lavoro. Occorre altresì che egli riesca a comunicare la sua passione e la sua fede ai discepoli e sappia esigerne e dirigerne la collaborazione.

Queste doti possedeva in grado eminente Luigi Cremona. Raccontano gli allievi che ebbero la fortuna di ascoltarlo quando egli era nel pieno fervore della ricerca, che l'entusiasmo per le questioni da lui esposte traspas-

riva durante la lezione e si trasmetteva all'uditorio rendendolo partecipe del godimento della scoperta. Con la forza di volontà, che era una sua dote precipua, suggestionava i giovani e li attirava verso l'indirizzo da lui prediletto. Tali furono questa forza e questa fede che noi stessi della seconda generazione ne subimmo la influenza, trasmessaci dai discepoli diretti.

Pensate quanto rapidi sarebbero stati i progressi della scienza italiana contemporanea se tutti i grandi uomini che nei vari campi onorarono il nostro paese risorto a nazione, avessero unito all'alto ingegno le doti di energia e di entusiasmo che brillarono in Luigi Cremona!

L'energia si accompagnava in lui a notevoli facoltà organizzatrici. Ben se ne avvide nel 1873 il Ministro Antonio Scialoja che volle affidargli l'incarico di riordinare e dirigere la Scuola di applicazione degli ingegneri di Roma. Il Cremona, che sino allora non si era occupato in modo esplicito di problemi tecnici, si dedicò al nuovo ufficio con la illuminata attività e lo zelo che portava in ogni compito. Ed in breve tempo riuscì a costituire un istituto che per la saggia fusione della cultura scientifica e delle applicazioni poteva competere con le migliori scuole dell'estero. La sua mente, pur volta ai grandi problemi, non disdegnava le minuzie; anche dal punto di vista formale e disciplinare la Scuola degli ingegneri di Roma era un organismo perfetto. Ricordo ancora la impressione che ne riportai quando, sono trascorsi quasi quarant'anni, vi svolsi i miei primi insegnamenti. Il Cremona abitava allora al primo piano dell'edifizio, di cui le aule occupavano il terreno; egli vi scendeva soltanto per dare a cinque o sei giovani le lezioni di Geometria superiore. Molti tra gli studenti della Scuola non avevano mai visto il loro Direttore; eppure lo veneravano e ne sentivano la presenza come quella della divinità nel tempio. Se alzavano la voce nei corridoi, bastava un suo messaggio per ristabilire immediatamente il silenzio. Ricordo che una volta studenti di altre Facoltà penetrarono strepitando nel sacro recinto; il Cremona già vecchio e malato scese fra i tumultuanti e con l'austera presenza e poche parole riuscì a dominarli e a farli uscire dall'edifizio.

Chi voglia formarsi una idea compiuta della larghezza di vedute e della vastità di cultura di Luigi Cremona non può far astrazione dalla sua attività legislativa. A dir vero, per le vicende politiche del Ministero Di Rudini di cui fece parte, egli resse per soli 30 giorni il portafoglio dell'Istruzione, e non poté in quel breve periodo realizzare i suoi progetti. Ma quali fossero questi, nei riguardi almeno della istruzione superiore, possiamo facilmente desumere da due relazioni sopra disegni di legge di riforma universitaria, relazioni da lui redatte e presentate al Senato nel marzo dell'85 e nel novembre dell'86. Particolarmente importante è la prima di queste. Occorre ricordare che Guido Baccelli aveva presentato al Senato nel marzo 1884 un progetto di legge col quale si accordava alle Università autonomia ammi-

nistrativa, disciplinare e didattica. Il progetto non aveva però incontrato il favore degli Uffici. Il Ministro Coppino, succeduto al Baccelli, dissentendo egli pure in vari punti dal suo predecessore, incaricò l'Ufficio Centrale del Senato di modificare quel progetto secondo alcune direttive da lui fissate. Così il detto Ufficio, composto di uomini eminenti, fra i quali il Cremona, fu condotto a redigere un disegno di legge sostanzialmente nuovo, i cui criteri informativi sono giustificati nella detta relazione.

È questa un lavoro mirabile per profondità ed ampiezza. Essa contiene uno studio comparato della legislazione scolastica presso i popoli più colti; e ad ogni passo vengono citate le opinioni e le parole dei maggiori spiriti del secolo XIX sul problema dell'insegnamento universitario. Anche se la relazione riporta il pensiero collettivo dell'Ufficio Centrale, traspariscono chiaramente le idee personali del Cremona dal calore con cui le sostiene. Egli è un ammiratore delle Università germaniche, non per il desiderio di imitare ciò che si fa all'estero, ma perchè egli le ritiene eredi della tradizione gloriosa delle Università italiane del medioevo e del rinascimento, tradizione che in gran parte si era persa tra noi e che, scrive il Cremona, « con nostra vergogna dobbiamo andare a studiare oltralpe ». La Legge Casati aveva tentato, almeno parzialmente, di ridar vita a quella tradizione; ma questa legge, dice il Cremona in un suo discorso al Senato, « preparata prima del 1859 dai migliori ingegni del Piemonte e da quelli accorsi dalle altre parti d'Italia a respirarvi aure di libertà, in seguito non fu più intesa che da pochi; e meno che da altri da coloro che la dovevano applicare ». Il progetto dell'Ufficio Centrale doveva dunque riaccostarsi alla legge Casati, tenendo conto però delle mutate condizioni dei tempi.

Una prima proposta, che egli sostiene con validi e copiosi argomenti, riguarda la istituzione della Facoltà filosofica mediante la fusione delle Facoltà di scienze e lettere e l'assorbimento di altre cattedre, quali, ad es., le scienze sociali. La Facoltà filosofica dovrebbe permettere, a chi ne facesse parte, di coltivare ed insegnare la scienza per se stessa senza alcuna preoccupazione professionale, e dovrebbe essere il simbolo dell'unione di tutte le scienze, che hanno, secondo le parole di Helmholtz citate dal relatore, uno scopo comune: la signoria dello spirito sul mondo.

Alla Facoltà filosofica attingerebbero la cultura scientifica le Facoltà professionali, tra le quali egli vorrebbe comprendere anche una Facoltà politecnica. Le Scuole degli ingegneri, accolte nel seno dell'Università, rifiorirebbero al contatto della scienza astratta ed eviterebbero il rischio di cristallizzarsi nell'empirismo.

Pure in quella relazione si lamenta l'eccessivo frazionamento delle cattedre, e si propone che parecchi insegnamenti siano riuniti sotto un solo nome, quale ad es. matematica, filologia classica e così via; ciascuna di queste discipline sarebbe impartita da vari professori, i quali, dividendosi il compito in modo diverso d'anno in anno, sarebbero costretti a ravvivare le loro lezioni.

Ma non voglio trattenermi più a lungo nemmeno su questo argomento interessante. A me preme darvi un ritratto compiuto per quanto è possibile del maestro e studiarlo nel tempo in cui visse.

Ora quando io ripenso alla vita degli uomini maggiori che hanno partecipato o assistito alla prima fase del nostro Risorgimento, resto ammirato non solo della loro grandezza ma pure dell'equilibrio, dell'armonia delle loro facoltà. Inspirati da altissimi ideali nella scienza e nella politica, sanno contemperarli con un senso pratico squisito che permette di tradurli in atto, e non sdegnano di abbandonare gli studi severi e lottare per il trionfo delle loro idee. Questo equilibrio essi portano fino dall'età giovanile — Luigi Cremona, non ancora diciottenne, si arruola volontario nel 48 e corre alla difesa di Venezia. Combatte con valore, ma deve assistere impotente alla caduta dell'eroica città. Non si scoraggia; se non è ancora venuto il momento in cui le armi potranno riunire le sparse membra d'Italia, sembra egli pensi, si può renderla grande con la scienza. Ritornato alla casa paterna, si dà agli studi prediletti con lo stesso ardore che aveva portato sul campo. In pochi anni da discepolo diventa maestro. I suoi primi lavori pubblicati fra il 1855 e il 60 furono giudicati così favorevolmente da ritenerlo degno dell'insegnamento universitario. Nel 1860 egli sale sulla cattedra di Geometria superiore per lui istituita nell'Università di Bologna e vi pronunzia una prolusione che oggi stesso non si legge senza emozione, tanto è l'entusiasmo con cui parla della scienza e l'affetto col quale si rivolge ai giovani, e chiede loro lo sforzo necessario per dare agli studi geometrici italiani il primato che Francia e Germania si contendevano allora.

La sua opera, iniziata quel giorno per la elevazione culturale del paese, non si eserciterà soltanto sopra pochi allievi. La schiera si accresce quando egli nel 66 si trasferisce al Politecnico di Milano, e quando sette anni dopo viene chiamato a Roma a dirigere la Scuola degli ingegneri, che col saggio ordinamento e la severa disciplina, deve nel tempo stesso nutrire lo spirito ed educare il carattere. Più tardi le sue cure si volgeranno a tutta la scuola italiana, media e superiore, insidiata dalle facili indulgenze alle quali si era proclivi in quel tempo. Contro le nocive tendenze egli conduce per 25 anni una lotta istancabile dal Senato e dal Consiglio Superiore dell'Istruzione allo scopo di rinforzare la serietà degli studi ed elevare il prestigio degli insegnanti.

Con questo apostolato a favore della cultura nazionale egli attende il tramonto, confortato dall'affetto dei suoi cari, dalla venerazione degli amici, dei colleghi, degli uomini di studio. E quando giunge l'ultima ora, il 10 giugno 1903, egli può lasciare serenamente la vita, col compiacimento di averla tutta dedicata alla scienza, alla patria, alla famiglia.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio CASTELNUOVO commemora LUIGI CREMONA nel primo centenario della sua nascita.

S. E. GUIDI si associa alle alte parole pronunciate dal Socio CASTELNUOVO e ricorda come il CREMONA non sdegnasse scendere dalla matematica pura anche alle sue applicazioni.

Il Presidente sen. GARBASSO ringrazia i Soci CASTELNUOVO e GUIDI per quanto hanno detto in memoria di LUIGI CREMONA e ringrazia anche i familiari dell'Insigne Uomo i quali, intervenendo alla seduta, hanno contribuito a rendere la cerimonia più sentita e significativa. Dà quindi lettura di un telegramma del Socio P. BOSELLI che, non potendo assistere alla seduta, invia la sua più viva adesione alla celebrazione del CREMONA.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio MARCOLONGO presenta e illustra il II vol. dell'Opera « Analisi vettoriale generale — Geometria differenziale » a cura di P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI.

Il Socio NASINI presenta e illustra il II vol. di « Studi e ricerche sui combustibili » pubblicati dall'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano diretto dal Socio M. G. LEVI, con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare in omaggio all'Accademia per incarico avutone dal nostro Corrispondente Prof. M. G. LEVI il volume "Studi e ricerche sui combustibili", vol. II (1927-1929). Roma 1930.

« Questo volume fa seguito ad un altro che io ebbi a suo tempo occasione di presentare all'Accademia. Esso raccoglie i lavori svolti dal Professore M. G. Levi nella nuova sede della Sezione combustibili presso l'Istituto di Chimica Industriale del R. Politecnico di Milano. Alcuni di questi lavori continuano e sviluppano quelli pubblicati nel 1° volume sopra la distillazione a bassa temperatura di ligniti italiane. Di altri argomenti è stato approfondito lo studio e sono state tracciate le linee, secondo le quali potrebbe svolgersi una utilizzazione razionale di molti prodotti. Si è ripreso lo studio della idrogenazione dei combustibili solidi ad alta pressione e si affronta il problema della sintesi catalitica di idrocarburi, argomento sul quale fu già riferito all'Accademia. Si è cominciato l'inventario chimico delle nostre emanazioni naturali di gas combustibili, riesaminando una delicata questione, della quale mi occupai anche io anni indietro, cioè della presenza o meno di ossido di carbonio e di idrocarburi non saturi nei gas

combustibili naturali: si sono avviate ricerche sulla utilizzazione chimica di questi gas. Altre note riguardano ricerche sopra l'agglomerazione dei combustibili, sopra i prodotti della distillazione del legno e della cellulosa, sopra questioni analitiche e via dicendo. Il volume contiene anche uno studio sui carboni d'Eraclea, carboni che, appartenendo al bacino del Mediterraneo, hanno un notevole interesse per l'Italia. Infine sono riprodotte delle interessanti conferenze sugli argomenti tenute dal Levi in Italia e all'Estero. La raccolta in volume di questi studi, che emanano dall'Istituto creato dal Governo Fascista e diretto dal Prof. Levi, dimostra che il problema dei combustibili in Italia è attentamente seguito con contributi sperimentali notevoli e adattati alle particolari condizioni del nostro paese.

« L'argomento, di così vitale interesse per l'Italia, è ora stato preso in esame dal Consiglio Nazionale delle Ricerche e di esso si occupa una commissione presieduta dal collega S. E. Parravano, la quale senza dubbio porterà importanti, poderosi contributi, alla risoluzione dei vasti problemi che si sono presentati e che si presentano ».

Il Socio PIROTTA presenta e illustra l'opuscolo del Bibliotecario G. GABRIELI su « Federico Cesi Linceo ».

Il Socio SACCO presenta in omaggio due sue Note che hanno rispettivamente il titolo « Dati geologici di trivellazioni nella Vulsinia e nel Sabatino » e « La captazione della vibrata dal Salinello ».

L'Accademico Segretario aggiunto LO SURDO presenta i libri pervenuti in dono all'Accademia segnalando un opuscolo del Socio S. E. PIROTTA dal titolo « Sullo sviluppo degli studi di Ecologia agraria »; un opuscolo del Socio S. E. GUIDI « Sulle dighe ad arco sperimentali »; la « Relazione del presidente dell'Ente autonomo del parco nazionale d'Abruzzo »; EDDINGTON A. S. « Etoiles et atomes »; « Théorie des fonctions algébrique » a cura di APPEL E GOURSAT.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta due plichi suggellati inviati rispettivamente dai Signori PAIS E P. PISA perchè vengano conservati, a disposizione degli autori, negli archivi dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI MEMORIE E NOTE

Il Socio VOLTERRA, a nome del Socio GIORGI presenta una memoria di F. SBRANA dal titolo « Sull'applicazione del calcolo degli operatori funzionali alla riduzione di equazioni integrali di Volterra ». Si decide che la

Commissione che deve esaminare detta memoria sia composta dai Soci VOLTERRA, LEVI-CIVITA e GIORGI.

Il Corresp. S. E. DIONISI presenta una memoria di D. CATTANEO « Osservazioni sulla struttura del Vitreo » per esaminare la quale viene nominata una commissione composta dai Soci BOTTAZZI, DIONISI e BAGLIONI.

Presentano note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci CORBINO, DIONISI, FABIANI, GARBASSO, LEVI-CIVITA, PIROTTA, VOLTERRA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 dicembre 1930

- APPELL P. et GOURSAT E. — Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Tome I, II. Paris, Gauthier-Villars, 1929-1930. 8°, pp. I-XXXV, I-526; I-XIV, I-521.
- ARRIGHI G. — Integrazione sintetica delle equazioni di Maxwell. (Estr. dal «Giornale di Matematiche del Battaglini». Vol. LXVIII. Napoli, 1930. 8°, pp. I-13.
- BOSELLI F. B. — Studi sugli Psyllidi. (Homoptera: Psyllidae o Chermidae). VI, VIII. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXIV, pp. 175-209, 211-222). Portici, 1930. 8°.
- BRAVETTA E. — I «fabbrici di guerra»: Pio e Mario Perrone e il loro storico contributo alla vittoria d'Italia. Genova, 1930. 4°, pp. I-55.
- BURGATTI P., BOGGIA T., RURALI-FORTI C. — Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol. II. Geometria differenziale. Bologna, Nicola Zanichelli, 1930. 8°, pp. I-IX, I-338.
- CUSHMAN J. A. and OZAWA Y. — A Monograph of the Foraminiferal family Polymorphinidae, recent and fossil. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. I-185.
- EDDINGTON A. S. — Étoiles et Atomes. Paris, 1930.
- Ente autonomo del Parco Nazionale d'Abruzzo.* Relazione del Presidente del Direttorio provvisorio dell'Ente Autonomo del Parco Nazionale d'Abruzzo alla Commissione amministratrice dell'Ente stesso, nominata con R. decreto 25-3-23. Tivoli, 1926. 8°, pp. I-309.
- GABRIELI G. — Federico Cesi Linceo. (Estr. dalla «Nuova Antologia». 1930). Roma, 1930. 8°, pp. I-20.
- GIL TAY L. — Notes préliminaires sur les Opilions recueillis aux Indes Néerlandaises par S. A. R. le Prince Léopold de Belgique (Extr. des «Annales et Bulletin de la Société Entomologique de Belgique». Tome LXIX, 1929, pages 419-429). Bruxelles, 1930. 8°.
- GUIDI C. — Dighe ad arco sperimentali. (Estr. dalla «Rivista italiana di edilizia e lavori pubblici» della Federazione Nazionale Fascista costruttori edili imprenditori di opere pubbliche e private e industriali affini, Roma. Anno V, n. 1). Roma, 1929. 4°, pp. I-6.
- LANDAU E. — Zum Waringschen Problem. (Sonderdruck aus «Mathematische Zeitschrift». Band XXXII, S. 699-702). Göttingen, 1930. 8°.
- LEVI M. G. — Studi e ricerche sui combustibili. Vol. II, (1927-1929). R. Politecnico di Milano. Roma, 1930. 8°, pp. I-XI, I-418.
- MERTON JUDD N. — The escavation and repair of Betatakin. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 77). Washington, 1930. 8°, pp. I-77.
- MUSKENS L. J. J. — Anatomo-physiologische Correlation von dem Globus pallidus und dem hinteren Längsbündel. (Sonderdruck aus «Schweizer Archiv für Neurologie und Psychiatrie». Band. XXVI, S. 26-40). Zurich, 1930. 8°.

- MUSKENS L. J. J. — Konjugierte Deviation von Kopf und Augen bei Hirnstamm-Affektion. (Sonderabd. aus der « Monatsschrift für Psychiatrie und Neurologie ». Band. LXXVI, 1930. pp. 268-295). Berlin, 1930. 8°.
- MUSKENS L. J. J. — On tracts and centers involved in the upward and downward associated movements of the eyes after experiments in birds. (Reprinted from the « Journal of Comparative Neurology ». Vol. L. No. 2, pp. 289-331). Philadelphia, 1930. 8°.
- MUSKENS L. J. J. — The tracts and centers in the pigeon dominating the associated movements of the eyes (and other movable parts) in the sense of lateral deviation in the horizontal and of rotation in the frontal plane. (Reprinted from the « Journal of Comparative Neurology ». Vol. XLVIII. No. 2, pp. 267-292). Philadelphia, 1929. 8°.
- PIROTTA P. R. — Sullo sviluppo degli studi di Ecologia agraria. (Estr. dalle « Memorie della Reale Accademia d'Italia. Classe di Scienze fisiche, matematiche, e naturali ». Vol. I. Biologia: N. 1). Roma, 1930. 8°, pp. 1-7.
- SACCO F. — Dati geologici di trivellazioni nella Valsinia (Bolsena) e nel Sabatino (Bracciano) (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana ». Vol. XLIX, fasc. I, pp. 145-160). Roma, 1930. 8°.
- SACCO F. — La captazione della Vibrata Dalsalinello. (Estr. dalla Rivista « L'Universo » Anno XI, N. 9. 1930). Firenze, 1930. 8°, pp. 1-4.
- SCHIMANK H. — Zur Geschichte der Exakten Naturwissenschaften in Hamburg. Von der Gründung des Akademischen Gymnasiums bis zur ersten Hamburger Naturforschertagung. Hamburg, 1928. 8°, pp. 1-143.
- STEINHAUS A. H. — Studies in the Physiology of Exercises. I. Exercise and Basal Metabolism in Dogs. IV. Further concerning Exercise and Basal Metabolism in Dogs. (Reprinted from the « American Journal of Physiology ». Vol. 83, 95, N. 1, 2, pp. 658-677, 202-214). s. l. 1928, 1929. 8°.
- TAVANI F. — Space as Perception and as Idea. London. s. d. 8°, pp. 1-14.
- TEISSEIRE A. — Contribucion al estudio de la Geologia y de la Paleontologia de la Republica Or. del Uruguay. Region de Colonia. Montevideo, 1930. 8°, pagine 1-157.
- WERNER F. — Notes préliminaires sur les Mantides recueillis aux Indes Orientales Néerlandaises au cours du voyage de S. A. R. le Prince Léopold de Belgique. (Extr. des « Bulletin et Annales de la Société Entomologique de Belgique ». Tome LXX, pp. 175-177). Bruxelles, 1930. 8°.
- WERNER F. — Notes préliminaires sur les Phasmides recueillis aux Index Orientales Néerlandaises au cours du voyage de S. A. R. Prince Léopold de Belgique. (Extr. des « Bulletin et Annales de la Société Entomologique de Belgique ». Tome LXX, pp. 179-182). Bruxelles, 1930. 8°.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 21 dicembre 1930 (anno IX)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *A proposito della Nota del dott. Manarini « Sulla curvatura media ecc. ».* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. P. BURGATTI.

1. Il teorema della divergenza superficiale ed i suoi derivati ch'io feci conoscere in una Memoria del 1917 ⁽²⁾, cioè

$$(I) \quad \int_{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot d\sigma = \int_{\sigma} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{n} d\sigma - \int_{\sigma} \mathbf{u} \times \mathbf{v} ds,$$

dà ragione, come ha dimostrato il dott. Manarini ⁽³⁾, della relazione esistente fra la curvatura media d'una superficie in un punto e l'integrale esteso a un piccolo contorno del vettore unitario normale al contorno e tangente alla superficie.

Esso si presta a varie altre applicazioni; come, ad esempio, allo studio dell'equilibrio delle superficie inestendibili, come dimostrò il prof. Caldonazzo ⁽⁴⁾; a quello delle proprietà dei potenziali newtoniani, che sviluppai io stesso nella Memoria citata; e infine alla deduzione rapida delle formule che ottenne il Beltrami ⁽⁵⁾, con calcoli eleganti sì, ma complicati, nella sua fondamentale Memoria intorno alle funzioni di variabile complessa sopra a una superficie. Dalle quali cose risulta manifesta l'utilità degli ope-

(1) Presentata nella seduta del 21 dicembre 1930.

(2) *I teoremi del gradiente, della div. e della rot. sopra una superf. ecc.*, « R. Accad. Bologna ».

(3) Ved. questo fascicolo.

(4) « *Monitore Tecnico* », 1920.

(5) « *Opere* », t. I.

ratori superficiali; utilità messa maggiormente in evidenza di recente dal prof. Boggio, il quale, estendendone la nozione alle varietà riemanniane, ha creato un calcolo assoluto di una semplicità veramente notevole ⁽¹⁾.

Ora colgo l'occasione offertami dalla Nota del dott. Manarini per fare osservare che una formula analoga alla (I) vale, *mutatis mutandis*, per una varietà ad n dimensioni. Questa affermazione può parere quasi evidente, ma la dimostrazione non è immediata.

2. Sia V_n una ipersuperficie dello spazio euclideo S_{n+1} definita da

$$x_s = x_s(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n+1)$$

ove le x_s sono le coordinate cartesiane in S_{n+1} e q_1, q_2, \dots, q_n gli n parametri variabili entro certi limiti. Compendiosamente si scriverà

$$P \rightarrow 0 = P(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Eliminando le q_i si otterrà l'equazione

$$f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$$

che rappresenta la V_n in S_{n+1} . Si dirà che la V_n è chiusa se divide lo spazio S_{n+1} in due regioni: una finita (cioè tutta interna a una certa ipersfera) in ogni punto della quale sia $f(P) > 0$ oppure $f(P) < 0$, e l'altra infinita in cui sia corrispondentemente $f(P) < 0$ oppure $f(P) > 0$. Indicheremo la porzione finita con $(S)_{n+1}$ e supporremo che nei suoi punti e in quelli della V_n che la limita sia definito un vettore $u(P)$ monodromo, finito e continuo insieme alla sua divergenza; e inoltre che la V_n ammetta in ogni suo punto una normale n unica e determinata.

Allora sussiste, come in uno spazio ordinario S_3 limitato da una superficie σ , la nota formula

$$(II) \quad \int_{(S)_{n+1}} \operatorname{div} u \, dS = - \int_{V_n} u \times n \, dV,$$

essendo n rivolta verso $(S)_{n+1}$.

Ora vogliamo passare da questa formula a quella relativa alla divergenza superficiale su V_n . A tal fine bisogna applicare un teorema di Burali-Forti e Boggio, che qui per chiarezza della esposizione converrà dimostrar di nuovo ⁽²⁾.

Premettiamo che se u_1, u_2, \dots, u_n sono n vettori dello spazio S_{n+1} linearmente indipendenti, esiste un vettore funzione lineare e alternata di

(1) « A. V. G. », vol. II, *Geometria Differenziale*, 1930, Zanichelli, Bologna.

(2) « Espaces courbes... », Sten Editrice, p. 191.

ciascuno di quei vettori, che sarà indicato con $E(u_1, u_2, \dots, u_n)$, soddisfacente alla proprietà

$$(1) \quad a \times E(u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{Am}(a, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

qualunque sia a , ove il secondo membro misura in valore assoluto il volume del parallelepipedo ad $n + 1$ dimensioni costruito coi vettori a, u_1, \dots, u_n come spigoli. Scambiando fra loro due vettori, E cambia solo di segno. Ricordiamo ancora che se α è una omografia vettoriale in S_{n+1} , il suo invariante primo è definito da

$$\begin{aligned} & \text{Am}(u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) \cdot I_1 \alpha = \\ &= \sum_{s=1}^{n+1} \text{Am}(u_1, u_2, \dots, \alpha u_s, \dots, u_{n+1}) \\ &= \sum (-1)^{s-1} \text{Am}(\alpha u_s, u_1, \dots, u_{s-1}, u_{s+1}, \dots, u_{n+1}), \end{aligned}$$

od anche per la (1) da

$$\begin{aligned} & u_1 \times E(u_2, \dots, u_{n+1}) \cdot I_1 \alpha = \\ &= \sum (-1)^{s+1} \alpha u_s \times E(u_1, \dots, u_{s-1}, u_{s+1}, \dots, u_{n+1}). \end{aligned}$$

Con opportuno cambiamento di segni si può anche scrivere

$$\begin{aligned} & u_1 \times E(u_2, \dots, u_{n+1}) \cdot I_1 \alpha = \\ &= \alpha u_1 \times E(u_2, \dots, u_{n+1}) + u_1 \times \sum_{s=2}^{n+1} E(u_2, \dots, \alpha u_s, \dots, u_{n+1}); \end{aligned}$$

la quale, dovendo esser vera per qualunque u_1 , diventa

$$\begin{aligned} (2) \quad & E(u_2, \dots, u_{n+1}) \cdot I_1 \alpha = \\ &= K \alpha E(u_2, \dots, u_{n+1}) + \sum_{s=2}^{n+1} E(u_2, \dots, \alpha u_s, \dots, u_{n+1}). \end{aligned}$$

Tornando alla (1), osserviamo infine che se a è unitario e parallelo ad E (e perciò normale a tutti gli u)⁽¹⁾, si ha

$$\text{mod } E(u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{mod } \text{Am}(a, u_1, \dots, u_n);$$

(1) $u_1 \times E = \text{Am}(u_1, u_1, \dots, u_1, \dots, u_{n+1}) = 0$ (volume nullo).

epperò mod E è il volume del parallelepipedo ad n dimensioni costruito con u_1, u_2, \dots, u_n (sarebbe come la base del parallelepipedo ad $n+1$ dimensioni costruito coi vettori a, u_1, \dots, u_n).

3. Ciò posto, consideriamo le ∞^{n-1} direzioni uscenti da un fissato punto di V_n , e immaginiamo un fascio di curve tangenti a quelle direzioni, sulle quali sia preso un arco variabile di lunghezza da curva a curva, ammettendo che questi archi non s'intersechino l'uno con l'altro. Il luogo degli estremi Q sarà una varietà V_{n-1} a $n-1$ dimensioni. Diremo che V_{n-1} limita una porzione finita di V_n , quella che è il luogo delle curve sopra considerate.

Insieme a questa regione della V_n così limitata consideriamo la nuova V_n luogo dei punti

$$P' = P + \varepsilon n,$$

essendo ε piccolissimo e costante, limitata dalla nuova V'_{n-1} luogo dei punti

$$Q' = Q + \varepsilon n.$$

Orbene, se $d_1 P, d_2 P, \dots, d_n P$ sono spostamenti infinitesimi e indipendenti di P in V_n , sarà, per le cose dette,

$$(3) \quad dV_n = \text{mod } E(d_1 P, d_2 P, \dots, d_n P)$$

l'elemento di volume della V_n in P ; e analogamente

$$(3') \quad dV'_n = \text{mod } E(d_1 P', d_2 P', \dots, d_n P')$$

quello corrispondente di V'_n . Si dimostrerà ora facilmente che il rapporto di queste due grandezze vale $1 + \varepsilon \cdot I_1 \frac{dn}{dP}$, ossia $1 + \varepsilon \text{div } n$.

Infatti, essendo

$$d_i P' = d_i P + \varepsilon \cdot \alpha(d_i P), \quad \left(\alpha = \frac{dn}{dP} \right)$$

si può sostituire nella (3') e poi sviluppare tralasciando i termini d'ordine superiore a ε . Ricordando che l'operatore E è lineare, si ottiene subito

$$dV'_n = \text{mod} \left[E(d_1 P, \dots, d_n P) + \varepsilon \sum_{i=1}^n E(d_1 P, \dots, \alpha d_i P, \dots, d_n P) \right];$$

cosicchè applicando la (2) viene

$$dV'_n = \text{mod} [E(d_1 P, \dots, d_n P) + \varepsilon \{E(d_1 P, \dots, d_n P) I_1 \alpha - K \alpha E(d_1 P, \dots, d_n P)\}].$$

Ma $E(d_1P, \dots, d_nP)$ è parallelo ad \mathbf{n} , e si ha

$$K\alpha\mathbf{n} = K \frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{n} = 0;$$

perciò resta

$$(4) \quad dV'_n = (\mathbf{I} + \varepsilon \cdot \mathbf{I}_1\alpha) \bmod E(d_1P, \dots, d_nP) = (\mathbf{I} + \varepsilon \cdot \mathbf{I}_1\alpha) dV_n, \\ (I_1\alpha = \operatorname{div} \mathbf{n})$$

come si voleva dimostrare.

Sia ora $\mathbf{u}(P)$ un vettore monodromo finito e continuo insieme alla sua divergenza nello spazio (S') compreso fra la V_n , la V'_n e l'ipercilindro (ω) luogo dei segmenti $Q' - Q$. Applicando la (I) si ottiene

$$\int_{S'} \operatorname{div} \mathbf{u} dS' = - \int_{V_n} \mathbf{u} \times \mathbf{n} dV_n + \int_{V'_n} \mathbf{u}' \times \mathbf{n} dV'_n - \int_{\omega} \mathbf{u} \times \mathbf{v} d\omega,$$

ove

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}(P + \varepsilon\mathbf{n}) = \mathbf{u}(P) + \varepsilon \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{n}.$$

In virtù della (4) il secondo integrale diventa

$$\int_{V'_n} \left[\mathbf{u} + \varepsilon \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} (\mathbf{I} + \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{n}) dV_n,$$

ossia

$$\int_{V_n} \mathbf{u} \times \mathbf{n} dV_n + \varepsilon \int_{V_n} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} dV_n + \varepsilon \int_{V_n} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{n} \cdot dV_n.$$

Risulta dunque

$$\int_{S'} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot dS' = \varepsilon \int_{V_n} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} dV_n + \varepsilon \int_{V_n} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{n} \cdot dV_n - \int_{\omega} \mathbf{u} \times \mathbf{v} d\omega.$$

D'altra parte si può scrivere, per la piccolezza di ε ,

$$dS' = \varepsilon dV_n, \quad d\omega = \varepsilon dV_{n-1};$$

cosicchè al limite si avrà

$$\int_{V_n} \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \right) dV_n = \int_{V_n} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{n} \cdot dV_n - \int_{V_{n-1}} \mathbf{u} \times \mathbf{v} dV_{n-1}.$$

ossia

$$(III) \quad \int_{V_n} \operatorname{div}_v \mathbf{u} dV_n = \int_{V_n} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{n} dV_n - \int_{V_{n-1}} \mathbf{u} \times \mathbf{v} dV_{n-1};$$

giacchè la divergenza superficiale su V_n è precisamente definita da

$$\operatorname{div}_v \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{u} - \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n}.$$

Ha la stessa forma della (I).

Se si pone $\mathbf{u} = \varphi \mathbf{a}$, essendo \mathbf{a} costante e φ una funzione scalare di P , si ha subito quest'altra formula del gradiente superficiale:

$$(III') \quad \int_{V_n} \operatorname{grad}_v \varphi dV_n = \int_{V_n} \varphi \mathbf{n} \cdot \operatorname{div} \mathbf{n} \cdot dV_n - \int_{V_{n-1}} \varphi \mathbf{v} dV_{n-1}.$$

Da questa, o dalla precedente, si fa immediatamente la identica deduzione circa la curvatura media di una ipersuperficie che ha fatto il dott. Manarini nella Nota citata per ritrovare la proprietà enunciata dal dott. Calonchi; cosa che sarebbe difficile a farsi direttamente col metodo usato in quel caso speciale da questo autore.

Il dott. Manarini ha fatto notare, come già io stesso nella Memoria citata e in altra maniera, che la (I) contiene il *teorema di Stokes*; e che viceversa da questo si può molto facilmente dedurre quella. La cosa non è più vera nel caso più generale qui considerato delle n dimensioni; o per lo meno la (III) non è in rapporto con quella estensione del teorema di Stokes che è stata considerata finora dai vari autori che si sono occupati di codesto argomento.

Nella formula di Stokes non entra la curvatura media della superficie. Anche nel caso presente bisognerebbe dunque che sparisse dalla (III) il termine che contiene $\operatorname{div} \mathbf{n}$, lasciando però comparire un vettore arbitrario. Sia γ una omografia assiale funzione di P , tale che in ogni punto risulti $\gamma \mathbf{n} = 0$. Allora ponendo nella (III) $\mathbf{u} = \gamma \mathbf{w}$, ove \mathbf{w} soddisfa alle stesse condizioni di \mathbf{u} , ma del resto arbitraria; e notando che

$$\gamma \mathbf{w} \times \mathbf{n} = -\mathbf{w} \times \gamma \mathbf{n} = 0,$$

si ottiene

$$\int_{V_n} \operatorname{div}_v (\gamma \mathbf{w}) dV_n = - \int_{V_{n-1}} \gamma \mathbf{w} \times \mathbf{v} dV_{n-1}.$$

Come si vede, è sotto un certo aspetto una *generalizzazione del teorema di Stokes*, ma in un senso diverso da quello comunemente considerato.

Occorre anche notare che la (III') (e quindi anche la (III)) è valida anche se in qualche punto P di V_n la $\varphi(P)$ diventa infinita come $\frac{1}{\rho^{n-2}}$, essendo ρ la distanza geodetica di P da un altro punto vicinissimo. E inverso basta osservare che

$$\int_{\omega_{n-1}} \varphi v d\omega_{n-1}$$

esteso alla piccola ipersfera geodetica ω_{n-1} , luogo dei punti le cui distanze geodetiche da P sono costanti, per esempio uguali a ε , tende a zero per $\varepsilon = 0$; perchè, mentre $\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon^{n-2} \varphi$ è finito per ipotesi, il $d\omega_{n-1}$ è certamente infinitesimo dell'ordine $n-1$.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione isotropa.* Nota di B. FINZI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

In questa Nota e in una successiva riassumerò brevemente alcune considerazioni (che saranno sviluppate in una Memoria presentata al R. Istituto Lombardo) su i sistemi multipli; sistemi che, in particolare, possono essere scalari, vettori, tensori, oppure matrici (e più generalmente sistemi) caratterizzanti nei fenomeni di irradiazione atomico l'insieme dei passaggi di un elettrone da uno stato quantico ad un altro. Sono stato indotto a considerare nella loro generalità sistemi multipli e le operazioni relative, e a considerare altresì sistemi funzioni di altri sistemi, estendendo a tali funzioni il calcolo differenziale ordinario ed il calcolo differenziale assoluto, dal desiderio di istituire, seguendo lo schema della relatività generale di Einstein, la teoria della relatività nei fenomeni di irradiazione atomico. Mi riprometto di sviluppare l'argomento in una prossima Nota, alla quale la presente e la successiva serviranno da preambolo analitico.

1. Sistemi multipli e loro operazioni. — Indichiamo con $\underset{b}{\mathbf{X}}$ il sistema multiplo d'ordine b definito da n^b scalari X_{i_1, \dots, i_b} , corrispondenti in modo biunivoco e completo alle disposizioni con ripetizione degli n numeri $1, 2, \dots, n$ ad b ad b . In particolare, per $b = 0$, si ha l'unico scalare $\underset{0}{\mathbf{X}}$, che, per semplicità, indichiamo con X ; per $b = 1$, si ha il sistema semplice $\underset{1}{\mathbf{X}}$, coin-

(1) Nella seduta del 21 dicembre 1930.

cidente con l' n -complesso di elementi X_i ; per $h = 2$, si ha il sistema doppio \mathbf{X} , coincidente con la matrice quadrata di elementi X_{ij} , ecc.⁽¹⁾

Fissato, una volta per sempre, il numero n , due sistemi dello stesso ordine si diranno eguali allora e allora soltanto che i loro elementi corrispondenti alle stesse disposizioni sono eguali.

Definiamo l'*addizione*, la *sottrazione*, lo *zero*, il *prodotto per uno scalare* così:

$$(1) \quad \mathbf{S} = \mathbf{X} \pm \mathbf{Y} \text{ se } S_{i_1, \dots, i_h} = X_{i_1, \dots, i_h} \pm Y_{i_1, \dots, i_h};$$

$\mathbf{0}$, o semplicemente \mathbf{O} , il sistema i cui elementi sono tutti nulli;

$$(2) \quad \mathbf{M} = m\mathbf{X} \text{ se } M_{i_1, \dots, i_h} = mX_{i_1, \dots, i_h}.$$

Le operazioni ora definite godono delle stesse proprietà formali di cui godono le analoghe operazioni relative agli scalari, ai vettori, alle matrici, operazioni anzi con le quali coincidono nel caso $h = 0$, o $h = 1$, o $h = 2$.

Diremo *prodotto d'ordine r di \mathbf{X} per \mathbf{Y}* il sistema d'ordine $h + k - 2r$, così definito:

$$(3) \quad \mathbf{P} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}, \text{ essendo } P_{i_1, \dots, i_{h-r}, j_1, \dots, j_{k-r}} = \\ = \sum_{l_1, \dots, l_r} X_{i_1, \dots, i_{h-r}, l_1, \dots, l_r} Y_{l_1, \dots, l_r, j_1, \dots, j_{k-r}} \quad (2) (3).$$

In particolare, la *potenza m^a d'ordine r* di un sistema \mathbf{X} sarà un sistema \mathbf{X}^m . Perchè essa esista, per ogni $m > 0$, deve essere $h \geq 2r$. Se, in particolare, $h = 2r$, la potenza m^a del sistema sarà dello stesso ordine del sistema stesso.

(1) Quando l'ordine di molteplicità di un sistema \mathbf{X} è preventivamente noto, indicheremo il sistema, per $h \geq 1$, semplicemente con \mathbf{X} .

(2) Quando in una formula, come la (3), compare un primo e un secondo membro, il segno \cdot può essere sottinteso. Così pure potremo sopprimere il segno di sommatoria allorché il numero n è sottinteso, e la presenza di un primo e di un secondo membro indichi quali indici si sono saturati.

(3) Saturando r indici di X, \dots , diversi dagli ultimi r , e r di Y, \dots , diversi dai primi r , si ottiene una definizione di prodotto d'ordine r , in generale, diversa dalla (3). Alla (3) intendiamo però sempre riferirci nel seguito, anche perchè nei seguenti casi particolari essa coincide con operazioni di uso corrente:

Se $r = 0$, si ha l'operazione che alcuni autori chiamano senz'altro prodotto di sistemi (il segno \cdot può in tal caso sopprimersi).

Se $h = 0$ (e quindi $r = 0$) la (3) coincide con la (2).

Se $h = k = r = 1$, interpretando \mathbf{X} e \mathbf{Y} come vettori, la (3) ne definisce il prodotto scalare.

Se $h = k = 2, r = 1$, la (3) definisce l'ordinario prodotto di due matrici.

Si può verificare che il prodotto, definito da (3), gode della proprietà distributiva e della proprietà associativa⁽¹⁾.

In generale il prodotto d'ordine r di due sistemi, per $r \neq 0$, non gode della proprietà commutativa. Due sistemi che godono di tale proprietà nel prodotto d'ordine r si diranno *commutabili*, o *invertibili*, nel prodotto d'ordine r ⁽²⁾.

Diremo (se esiste) *unità* il sistema δ tale che, qualunque sia \mathbf{X} ,

$$(4) \quad \delta \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}.$$

Perchè la (4) sussista deve essere $k = 2r$. La (4) equivale ad n^h relazioni:

$$\delta_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r} \mathbf{X}_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r} = \mathbf{X}_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r}.$$

Affinchè queste siano verificate, qualunque sia \mathbf{X} , è necessario e sufficiente che

$$(5) \quad \delta_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r} = \begin{cases} 0, & \text{se, per almeno un } s, i_s \neq j_s \\ 1, & \text{se, per ogni } s, i_s = j_s \end{cases}.$$

Il sistema δ ora definito è dunque l'unità nell'operazione prodotto d'ordine $2r$.

Si noti che è definita un'unità appartenente alla stessa algebra a cui appartengono gli scalari, un'unità appartenente alla stessa algebra delle matrici, in generale, è definita un'unità appartenente alla stessa algebra a cui appartengono i sistemi d'ordine pari; non è definibile invece un'unità appartenente alla stessa algebra dei vettori, e, in generale, non è definibile un'unità appartenente alla stessa algebra a cui appartengono i sistemi di ordine dispari.

Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema \mathbf{X} sia commutabile con un'altro qualsiasi nel prodotto d'ordine r e che sia

$$(6) \quad \mathbf{X} = x \delta$$

essendo x uno scalare arbitrario.

(1) Se ci limitiamo a considerare prodotti d'ordine r e sistemi d'ordine $2r$, l'insieme di tali elementi costituisce un'algebra d'ordine n^{2r} nel corpo dei numeri (G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre*, Messina, 1921, p. 181). In particolare, $\mathbf{X}, \mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^m, \dots$, appartengono alla stessa algebra.

(2) È facile constatare che un sistema è commutabile con sè stesso e con una sua potenza. Se \mathbf{X} è commutabile con $\mathbf{Y}', \mathbf{Y}'', \dots$, lo è anche con la combinazione lineare

$$c' \mathbf{Y}' + c'' \mathbf{Y}'' + \dots. \text{ Se } \mathbf{X} \text{ è commutabile con } \mathbf{Y}' \text{ e } \mathbf{Y}'', \text{ lo è anche con } \mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Y}''.$$

Dati due sistemi \mathbf{X} e \mathbf{Y} , si dirà *quoziente a destra* dei due sistemi il sistema \mathbf{Z} , tale che

$$(7) \quad \mathbf{Z} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}.$$

$s \quad r \quad h \quad k$

Si dirà *quoziente a sinistra* il sistema \mathbf{Z}' , tale che

$$(7') \quad \mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}' = \mathbf{Y}.$$

$h \quad r \quad s \quad k$

Perchè sia univocamente determinato il quoziente a destra, o a sinistra, bisogna che sia $s = k$, e quindi $h = 2r$. Il divisore deve essere dunque di ordine pari: eguale al doppio dell'ordine del prodotto.

In particolare, il quoziente a destra e a sinistra fra \mathbf{I} e \mathbf{X} definisce lo stesso sistema \mathbf{X}^{-1} , che diremo *reciproco* di \mathbf{X} ⁽¹⁾.

Dalla (7) (o dalla (7')) si deduce che il quoziente a destra (o a sinistra) può riguardarsi come il prodotto fra il dividendo e il reciproco del divisore (o il reciproco del divisore e il dividendo).

Un sistema \mathbf{X} tale che

$$(8) \quad (\mathbf{X})^n = \mathbf{Y}$$

$h \quad k$

potrà dirsi *radice* n^a di \mathbf{Y} . In generale (almeno) la (8) ammetterà soluzioni caratterizzanti i vari sistemi \mathbf{X} soltanto per $k = h = 2r$.

2. Funzione. — Si consideri l'espressione

$$(9) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{X}^i, \text{ allorchè } h_i + 2r - 2r_i = h;$$

$h_i \quad r_i \quad 2r$

essa definisce una serie di potenze di \mathbf{X} , equivalente a n^h serie di scalari ⁽²⁾.

Per i valori di \mathbf{X} per cui le n^h serie considerate sono tutte convergenti, la (9) si dirà convergente. Se Y_{i_1, \dots, i_h} è il valore di una generica serie scalare, il sistema \mathbf{Y} caratterizzato dagli elementi Y_{i_1, \dots, i_h} sarà il valore della serie (9). \mathbf{Y} , una volta fissati \mathbf{a}_i , dipende da \mathbf{X} , e ad ogni sistema \mathbf{X} , per

(1) Facilmente si constata che \mathbf{X} è commutabile con il suo reciproco, e che, se \mathbf{Y} è commutabile con \mathbf{X} , lo è anche con \mathbf{X}^{-1} .

(2) Non è possibile definire una serie di potenze di \mathbf{X} per h dispari così come si è definita la serie (9), perchè in tal caso non è definibile in modo unico \mathbf{X}^0 , cioè l'unità ($n, 1$).

cui la (9) converge, corrisponde un unico valore per \mathbf{Y} . Diremo dunque \mathbf{Y} funzione di \mathbf{X} , e scriveremo:

$$(10) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{X}^i \quad (1) \quad (2).$$

In particolare, se, per $i > m$, $\mathbf{a}_i = 0$, il secondo membro della (10) diviene un polinomio di grado m in \mathbf{X} .

È intuitivo come si estenda alle funzioni considerate la nozione di limite a quella di infinitesimo, rimandandoli alle corrispondenti nozioni relative agli elementi delle funzioni stesse.

3. *Derivate*. — Sia ϵ un sistema infinitesimo assegnato. Diremo *derivata destra* il seguente limite:

$$(11) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\mathbf{f}(\mathbf{X} + \epsilon) - \mathbf{f}(\mathbf{X})) \cdot \epsilon^{-1}.$$

Diremo *derivata sinistra* il seguente limite:

$$(11') \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{X} + \epsilon) - \mathbf{f}(\mathbf{X})).$$

Si noti che perchè si possa parlare di derivata destra o sinistra bisogna che le loro definizioni come limiti di rapporti incrementali abbiano senso: l'incremento dato alla variabile indipendente, e quindi *la variabile indipendente stessa deve essere di ordine pari*.

(1) Una definizione di funzione diversa da (10) si otterrebbe partendo, anzichè dalla serie (9), dalla serie

$$(9') \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{X}^i \cdot \mathbf{a}_i$$

o dalla somma di (9) e (9'). Nel seguito ci riferiremo però alla funzione (10), perchè quanto diremo per essa varrà anche nei casi ora considerati.

(2) Se $r = 0$, la (10) definisce un sistema \mathbf{Y} funzione di uno scalare \mathbf{X} . Se, più particolarmente ancora, anche $h_i = 0$, la (10) definisce lo scalare \mathbf{Y} come funzione analitica dello scalare \mathbf{X} . Se poi soltanto $h_i = 0$, la (10) diviene:

$$(10') \quad \mathbf{Y} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_i \mathbf{X}^i.$$

Se, senza essere $h_i = 0$, è $h_i = 2r$, $r_i = r$, la (10) diviene:

$$(10'') \quad \mathbf{Y} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{X}^i.$$

Sono queste particolari funzioni che (per $r = 1$) si debbono considerare nella meccanica di HEISENBERG (« Zeitschrift für Physik », 33, p. 879, 35, p. 557).

Qualunque sia ϵ , la derivata destra (o sinistra) gode delle seguenti proprietà: 1. la derivata di un sistema costante è nulla; 2. la derivata di \mathbf{X} è δ ; 3. la derivata di una somma (o di una differenza) è la somma (o la differenza) delle derivate; 4. la derivata del prodotto di uno scalare costante per un sistema è eguale allo scalare per la derivata del sistema.

4. *Derivata isotropa.* — La derivata destra, o sinistra, di una funzione dipende dalla scelta del sistema infinitesimale ϵ . Scegliamo ϵ in modo tale che qualunque sia $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ la derivata destra e la derivata sinistra coincidano. Condizione necessaria e sufficiente perchè ciò sia è che

$$(12) \quad \epsilon = \epsilon \delta.$$

Diremo un tale sistema (analogamente ai tensori ⁽¹⁾) sistema *isotropo*. La derivata unica, definita nell'ipotesi (12), si dirà derivata isotropa, e sarà espressa così:

$$(13) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{f}(\mathbf{X} + \epsilon \delta) - \mathbf{f}(\mathbf{X})).$$

Se $r = 0$ e $h = 0$ essa coincide con la derivata ordinaria di uno scalare funzione di un altro scalare, se $r = 0$, $h = 1$, essa coincide con la derivata di un n -complesso (vettore, ad. es.) rispetto ad uno scalare. Se $r = 0$ e $h = 2$, essa coincide con la derivata di una matrice rispetto ad un parametro, quale è definita da Heisenberg, Born, Jordan ⁽²⁾. Se $r = 1$ e $h = 2$, essa coincide con la derivata di una matrice rispetto ad un'altra, quale è definita da Heisenberg, Born, Jordan ⁽²⁾. La definizione di derivata isotropa di un sistema funzione di un altro raccoglie in sintesi unica le particolari, è apparentemente differenti fra loro, definizioni di derivata di cui abbiamo detto.

Le 4 proprietà stabilite a n. 3 sussisteranno anche per la derivata isotropa; in più si dimostra facilmente:

$$(14) \quad (\varphi(\mathbf{X}) \cdot \psi(\mathbf{X}))' = \varphi \cdot \psi' + \varphi' \cdot \psi.$$

Dalla (14) si deduce che (per m intero e positivo) $(\mathbf{X}^m)' = m\mathbf{X}^{m-1}$. Dunque la derivata della funzione (10) sarà la funzione

$$(15) \quad \mathbf{Y}' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i \cdot \mathbf{X}^{i-1}.$$

qualora la serie che la definisce risulti convergente.

(1) U. CISORTI, *Tensori isotropi*, « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », vol. XI, 1930, p. 727.

(2) Loc. cit.

5. *Differenziale isotropo.* — A meno di infinitesimi di ordine superiore a $\varepsilon\delta$, l'incremento che subisce $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, passando da \mathbf{X} a $\mathbf{X} + \varepsilon\delta$, è dato da $\mathbf{Y}'\varepsilon$, che si dirà differenziale isotropo di \mathbf{Y} . Sarà dunque:

$$(16) \quad d\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\varepsilon = \mathbf{Y}' \cdot d\mathbf{X}.$$

Si noti che l'incremento subito da \mathbf{X} e da \mathbf{Y} dipende soltanto (una volta fissata la funzione) dal solo numero infinitesimo ε , che può sempre interpretarsi come incremento infinitesimo dx subito dal numero x , così che \mathbf{X} e \mathbf{Y} variano soltanto al variare di x nel modo seguente:

$$(17) \quad d\mathbf{X} = \delta dx, \quad d\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' dx.$$

Dalla prima delle (17) si ricava che, nell'operazione di derivazione isotropa, \mathbf{X} varia con lo scalare x nel modo seguente:

$$(18) \quad \mathbf{X} = \mathbf{X} + x\delta.$$

Nella (18) \mathbf{X} è indipendente da x . Si può allora materialmente verificare che la derivata isotropa di $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$ rispetto ad \mathbf{X} coincide con la derivata di \mathbf{Y} rispetto allo scalare x , quando si ponga la (18) nell'espressione che definisce \mathbf{Y} in funzione di \mathbf{X} .

6. *Funzioni di più variabili.* — La definizione di funzione data a n. 2 può estendersi considerando funzioni della successione formata dalla v variabili indipendenti $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_v$, così definite:

$$(19) \quad \mathbf{Y}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_v) = \sum_{i_1, \dots, i_v}^{\infty} a_{i_1, \dots, i_v} \cdot \mathbf{X}_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{X}_v^{i_v}.$$

Facilmente si istituisce per queste funzioni la nozione di derivate parziali e quella di differenziale totale:

$$(20) \quad d\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^v \mathbf{Y}'_i \cdot d\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^v \mathbf{Y}'_i dx_i.$$

(1) Se le variabili non sono invertibili fra loro, la funzione (19) dipende dall'ordine in cui si succedono le variabili. Noi ci riferiremo però alla (10), perchè quanto diremo per essa si estenderà tosto alle altre $(v+1)!$ e alla loro somma.

7. *Calcolo differenziale assoluto isotropo.* — Consideriamo ν sistemi y_i ,
che diremo coordinate cartesiane ortogonali di n^{2r} punti, ognuno in uno
spazio euclideo a ν dimensioni. Generalizzando l'ordinaria definizione, diremo
quadrato della « distanza » fra due « punti » infinitamente vicini del sistema
degli n^{2r} spazi considerati il sistema seguente:

$$(21) \quad ds^2 = \sum_{i=1}^{\nu} dy_i^2.$$

Scegliamo, come è proprio della derivazione isotropa, $dy_i = \delta dy_i$,
la (21) diverrà:

$$(22) \quad ds^2 = \delta \sum_{i=1}^{\nu} \delta_{pq} dy_p dy_q.$$

Operiamo ora un cambiamento di variabili, passando dalle y_i alle x_i : si avrà:

$$(23) \quad ds^2 = \delta \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij} dx_i dx_j.$$

Prescindiamo ora dalla particolare espressione di a_{ij} , e supponiamo a_{ij}
funzione di x_i , con la condizione

$$(24) \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

La (23) caratterizza la metrica di un sistema di spazi, ognuno dei quali o
ha metrica nulla, oppure metrica così definita:

$$(23') \quad ds^2 = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ij} dx_i dx_j.$$

Consideriamo una funzione $Y = f(\mathbf{X}_i)$. Si constata che il suo diffe-
renziale totale ha carattere invariante rispetto alle trasformazioni $x_i =$
 $= x_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\nu)$ che lasciano inalterato (23), mentre dx_i ha carattere contro-
variante, e Y_i ha carattere covariante. Generalizzando ovviamente la nozione
di tensore, diremo che Y_i definisce in forma covariante un tensore semplice
avente per elementi sistemi h^{pi} . Operando per il differenziale secondo di Y ,
come si è operato per il primo, si constata il carattere covariante doppio di

$$(25) \quad Y_{ij} = Y''_{ij} - \sum_{i=1}^{\nu} Y'_i \{^i j\}$$

che si dirà tensore derivato covariante di Y'_i . Nella (25) i simboli di Chri-
stoffel che vi compaiono sono quelli della metrica (23').

In modo analogo si definirà la derivata covariante, o controvariante di un tensore qualunque i cui elementi sono sistemi h^{pi} . Nei sistemi di spazi (23) potrà, in generale, estendersi il calcolo differenziale assoluto ai tensori i cui elementi sono sistemi h^{pi} , purchè alla derivata ordinaria si sostituisca la derivata isotropa.

Matematica. — *Sulla curvatura media delle superficie, e sugli operatori lungo una linea.* Nota di M. MANARINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

In questi « Rendiconti » del semestre precedente il sig. Calonchi stabiliva ⁽²⁾ una nuova espressione per la curvatura media di una superficie in un punto. La sig.^{na} Pelosi ha mostrato ⁽³⁾ come lo stesso risultato poteva ottenersi in modo più facile e rapido adoperando il calcolo vettoriale. Io farò vedere in questa Nota come lo stesso risultato sia una immediata conseguenza del teorema della divergenza superficiale dovuto al prof. Burgatti, e come se ne possa ottenere un'altra espressione usando il teorema del gradiente superficiale.

Infine, colgo l'occasione per mostrare, che l'introduzione degli analoghi operatori lungo una linea dà luogo ad alcune formule e considerazioni non prive d'interesse.

1. — Il prof. Burgatti in una Memoria letta alla R. Accademia delle Scienze di Bologna nel 1917 ⁽⁴⁾ introdusse gli operatori superficiali grad_σ , rot_σ , div_σ , Rot_σ , che operano su omografie e vettori, lungo la superficie σ . Se s è il contorno che limita la σ , \mathbf{u} , φ sono vettore o scalare funzioni dei punti dello spazio contenente la σ , od anche, semplicemente, funzioni dei punti di σ , \mathbf{n} è il vettore unitario normale alla superficie σ nel punto generico P, \mathbf{v} è il versore tangente alla superficie nei punti di s , normale ad s e diretto verso l'interno di σ , si hanno, fra le altre, le seguenti relazioni:

$$(I) \quad \int_\sigma \text{div}_\sigma \mathbf{u} \, d\sigma = \int_\sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \, \text{div} \, \mathbf{n} \, d\sigma - \int_s \mathbf{u} \times \mathbf{v} \, ds,$$

che esprime il teorema della divergenza superficiale;

(1) Nella seduta del 21 dicembre 1930.

(2) Cfr. M. CALONCHI, *Sulla curvatura media della superficie*, vol. XI, 1° semestre, pp. 554-558.

(3) Cfr. L. PELOSI, *Sulla curvatura media delle superficie*, vol. XII, 2° semestre, pp. 283-285.

(4) P. BURGATTI, *I teoremi del gradiente, della divergenza, della rotazione sopra una superficie e loro applicazioni ai potenziali*, « Memorie della R. Acc. della Sc. di Bologna », t. IV, pp. 103-112.

$$(II) \quad \int_{\sigma} \text{grad}_{\sigma} \varphi \, d\sigma = \int_{\sigma} \varphi \mathbf{n} \cdot \text{div} \, \mathbf{n} \, d\sigma - \int_s \varphi \mathbf{v} \, ds,$$

che esprime il *teorema del gradiente superficiale*.

Rispetto agli ordinari teoremi della divergenza e del gradiente nello spazio o nel piano, contengono un termine in più, ove figura la curvatura media, $\text{div} \, \mathbf{n}$, della superficie, termine che scompare pure nel caso che la σ sia la superficie di *area minima* avente per contorno s .

Se Q è un punto regolare di σ ed \mathbf{n}' il versore normale in esso alla superficie, facendo in (I) $\mathbf{u} = \mathbf{n}'$ si ha:

$$\int_{\sigma} (\mathbf{n}' \times \mathbf{n}) \cdot \text{div} \, \mathbf{n} \cdot d\sigma = \int_s \mathbf{n}' \times \mathbf{v} \, ds.$$

Immaginando che σ sia un intorno superficiale elementare del punto Q , ed avendosi, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}' + d\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{n}' = \mathbf{1} + \mathbf{n}' \times d\mathbf{n}, \quad \text{div} \, \mathbf{n} = \text{div} \, \mathbf{n}',$$

si ha, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\text{div} \, \mathbf{n}' \cdot \int_{\sigma} d\sigma = \int_s \mathbf{n}' \times \mathbf{v} \, ds,$$

che esprime il risultato del Sig. Calonchi.

Dal teorema del gradiente superficiale (II), posto $\varphi = 1$, e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ha la seguente espressione per la curvatura media in Q :

$$\text{div} \, \mathbf{n}' \cdot \int_{\sigma} d\sigma = \text{mod} \cdot \int_s \mathbf{v} \, ds,$$

dove \mathbf{v} ha il significato già detto.

2. — Data l'occasione, è utile far vedere, come gentilmente mi fece osservare il prof. Burgatti, che la (I) si ottiene subito dal teorema di Stokes. Infatti, essendo \mathbf{u} definito in uno spazio S contenente lo σ , esprimendolo, nei punti di σ , mediante le sue componenti normale e tangenziale a σ , si può porre:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}$$

onde ne segue⁽¹⁾

$$\text{div}_{\sigma} \mathbf{u} = u_1 \text{div}_{\sigma} \mathbf{n} + \text{grad}_{\sigma} u_1 \times \mathbf{n} - \text{rot}_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} + \mathbf{v} \times \text{rot}_{\sigma} \mathbf{n};$$

(1) Cfr. BURGATTI, loc. cit.

ma essendo

$$\operatorname{div}_{\sigma} \mathbf{n} = \operatorname{div} \mathbf{n}, \quad \operatorname{grad}_{\sigma} u_i \times \mathbf{n} = 0, \quad \operatorname{rot}_{\sigma} \mathbf{n} = 0,$$

viene

$$(1) \quad \operatorname{div}_{\sigma} \mathbf{u} = u_i \operatorname{div} \mathbf{n} - \operatorname{rot}_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n}.$$

Volendo la soluzione più generale dell'equazione

$$\operatorname{div}_{\sigma} \mathbf{u} = 0,$$

si ha dalla (1),

$$\mathbf{u} = \frac{\operatorname{rot}_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n}}{\operatorname{div} \mathbf{n}} \mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}^{(1)}.$$

Nella formula (1) prendendo per \mathbf{u} questa espressione abbiamo

$$\int_{\sigma} (\operatorname{rot}_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n}) d\sigma - \int_s \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{r} ds = 0,$$

essendo $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = 0$.

Ma

$$\operatorname{rot}_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n},$$

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{r} ds = \mathbf{v} \times \mathbf{r} \wedge \mathbf{n} ds = \mathbf{v} \times d\mathbf{P},$$

se \mathbf{P} è un punto del contorno s . Quindi

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = \int_s \mathbf{v} \times d\mathbf{P}$$

e poichè \mathbf{v} è qualunque e la σ limitata da s può pigliarsi a piacere, si è in presenza del teorema di Stokes.

Viceversa è facile vedere che la (1) si può dedurre dal teorema di Stokes. Invero integrando la (1) lungo la porzione di superficie σ , e notando che è $u_i = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$, si ha

$$\int_{\sigma} \operatorname{div}_{\sigma} \mathbf{u} d\sigma = \int_{\sigma} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \operatorname{div} \mathbf{n} \cdot d\sigma - \int_{\sigma} \operatorname{rot}_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma;$$

applicando a quest'ultimo integrale il teorema di Stokes si ha

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot}_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = \int_s \mathbf{v} \times d\mathbf{P} = \int_s \mathbf{v} \times \mathbf{r} \wedge \mathbf{n} ds = \int_s \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{r} ds$$

(1) Si noti che per l'operatore div nello spazio la soluzione più generale di $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ è $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, cfr. R. MARCOLONGO, *Su alcuni operatori superficiali*, questi « Rendiconti », vol. XXVI, 1917, pp. 263-271.

ed essendo

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} - u_i \mathbf{n}, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

si ha

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot}_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = \int_i \mathbf{u} \times \mathbf{v} ds$$

onde sostituendo si ritrova la (I).

3. — È ovvia l'estensione degli operatori div , rot , grad , Rot , a vettori ed omografie lungo una linea (L) tracciata in uno spazio (S) ed avente tangente determinata in ogni punto.

Indicandoli con l'indice (L), se P è il punto corrente sulla (L) e, al solito, $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{P}}{ds}$, essendo \mathbf{u} , φ , α , vettore ed omografie funzioni dei punti di S, si porrà per definizioni

$$\operatorname{div}_{(L)} \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{t} \times \mathbf{t}, \quad \operatorname{rot}_{(L)} \mathbf{u} = \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{t},$$

$$\operatorname{grad}_{(L)} \varphi (\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{t}) \mathbf{t}, \quad \operatorname{grad}_{(L)} \alpha = \left(\frac{d\alpha}{dP} \mathbf{t} \right) \mathbf{t},$$

$$\operatorname{Rot}_{(L)} \alpha = \mathbf{t} \wedge \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{t}.$$

Se \mathbf{n} e \mathbf{b} sono i versori che, come al solito, definiscono la normale principale e la binormale, $\frac{1}{\rho}$ e $\frac{1}{\tau}$ sono rispettivamente le curvature di flessione e di torsione si ha, con facili calcoli:

$$\operatorname{div}_{(L)} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}, \quad \operatorname{div}_{(L)} \mathbf{t} = \operatorname{div}_{(L)} \mathbf{b} = 0,$$

$$\operatorname{rot}_L \mathbf{n} = \frac{1}{\tau} \mathbf{n}, \quad \operatorname{rot}_{(L)} \mathbf{t} = \frac{1}{\rho} \mathbf{b}, \quad \operatorname{rot}_{(L)} \mathbf{b} = \frac{1}{\tau} \mathbf{b}.$$

Inoltre se A e B sono le estremità della linea (L) e indicando con gli indici A e B i valori di espressioni calcolate in questi punti si hanno le formule

$$(I) \quad \int_{(L)_A}^B \operatorname{div}_{(L)} \mathbf{u} ds = (\mathbf{t} \times \mathbf{u})_B - (\mathbf{t} \times \mathbf{u})_A - \int_{(L)_A}^B \frac{1}{\rho} \mathbf{n} \times \mathbf{u} ds$$

$$(II) \quad \int_{(L)_A}^B \operatorname{grad}_{(L)} \varphi ds = (\varphi \mathbf{t})_B - (\varphi \mathbf{t})_A - \int_{(L)_A}^B \frac{\varphi}{\rho} \mathbf{n} ds$$

$$(III) \quad \int_A^B \text{grad}_{(L)} \alpha \, ds = (\alpha t)_B - (\alpha t)_A - \int_A^B \frac{I}{\rho} \alpha n \, ds$$

$$(IV) \quad \int_A^B \text{rot}_{(L)} u \, ds = (u \wedge t)_B - (u \wedge t)_A - \int_A^B \frac{I}{\rho} u \wedge n \, ds$$

$$(V) \quad \int_A^B \text{Rot}_{(L)} \alpha \, ds = (t \wedge \alpha)_B - (t \wedge \alpha)_A - \int_A^B \frac{I}{\rho} n \wedge \alpha \, ds.$$

Si può osservare che negli elementi degli integrali dei secondi membri il vettore infinitesimo $n ds$ può essere sostituito con ρdt . In base a questa osservazione, oppure con calcolo diretto si vede che per i tratti rettilinei ove n risulta indeterminato, questi integrali sono nulli. Queste formule si ottengono direttamente mediante integrazioni per parti oppure dalla I si deducono le altre al solito modo ⁽¹⁾.

È da notarsi che se in (I) si pone $u = n \wedge v$ e si tien conto che è

$$\text{div}_{(L)} (n \wedge v) = \text{rot}_{(L)} n \times v - \text{rot}_{(L)} v \times n, \quad \text{rot}_{(L)} n = \frac{I}{\tau} n$$

si ricava

$$\int_A^B \text{rot}_{(L)} v \times n \, ds = \int_A^B \frac{v \times n}{\tau} \, ds + (v \times b)_A - (v \times b)_B$$

e nel caso che v sia in ogni punto della linea (L) un vettore del piano rettificante essa diviene semplicemente:

$$\int_A^B \text{rot}_{(L)} v \times n \, ds = (v \times b)_A - (v \times b)_B.$$

Come si vede l'integrale del primo membro dipende in tal caso soltanto dai valori di $v \times b$ calcolati negli estremi A e B della linea (L). Analoga osservazione può essere fatta, in base alle (I), ..., (V) per gli integrali

$$\int_A^B \left(\text{div}_{(L)} u + \frac{I}{\rho} n \times u \right) ds, \quad \int_A^B \left(\text{grad}_L \varphi + \frac{\varphi}{\rho} n \right) ds,$$

$$\int_A^B \left(\text{grad}_{(L)} \alpha + \frac{\alpha n}{\rho} \right) ds, \quad \int_A^B \left(\text{rot}_{(L)} u + \frac{I}{\rho} u \wedge n \right) ds,$$

$$\int_A^B \left(\text{Rot}_{(L)} \alpha + \frac{I}{\rho} n \wedge \alpha \right) ds,$$

(1) Cfr. BURGATTI, loc. cit.

mentre, se le funzioni u, φ, α sono, monodrome e la linea (L), a tangente determinata in ogni punto è chiusa, questi integrali sono nulli.

In particolare se nella (II) si pone $\varphi = \rho$ si ottiene

$$\int_A^B (\text{grad } \rho + \mathbf{n}) ds = (\rho \mathbf{t})_B - (\rho \mathbf{t})_A,$$

e facendo i calcoli per un qualunque arco di circonferenza che sottenda la corda AB e giaccia in un piano perpendicolare al versore $\mathbf{k}^{(1)}$, si trova come valore di quest'integrale sempre mod $(B - A) \cdot \mathbf{i}$, con $\mathbf{i} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{a}$ ed \mathbf{a} versore di $B - A$.

Questo risultato vale per $\int_A^B (\text{grad } \rho + \mathbf{n}) ds$ esteso ad una qualunque linea regolare tangente in A e B ad uno di questi archi ed avente in A e B raggio di curvatura di flessione uguali al raggio dell'arco.

Matematica. — *Une simple démonstration de la formule de l'écart géodésique.* Nota di A. WUNDHEILER, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans les « Math. Ann. » (t. 97, 1926, p. 315) M. Levi-Civita a donné la formule maintenant classique

$$(1) \quad (D^2 \xi)^r - \frac{d\lambda}{d\sigma} b^r = - \sum_{ihk} \{ir, hk\} b^i b^h \xi^k$$

(les notations seront expliquées plus loin), généralisant la formule bien connue de Jacobi, concernant l'écart géodésique au cas d'une surface. Nous nous proposons de donner une simple démonstration de la formule (1), et de la généraliser un peu aux trajectoires des systèmes dynamiques.

Nous rappellerons d'abord la formule bien connue:

$$(2) \quad (\delta' \delta - \delta \delta') b^r = \sum_{ihk} \{ir, hk\} b^i \delta x^h \delta' x^k,$$

où b^r désigne un champ des vecteurs quelconque, $\{ir, hk\}$ les symboles de Riemann de seconde espèce, δ et δ' deux différentielles covariantes, *interchangeables* entre elles. La différentielle covariante est définie par les propriétés:

$$\delta p = dp \quad (p \text{ — grandeur scalaire}),$$

(1) Nel senso da veder descrivere l'arco AB da sinistra verso destra.

(2) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

en particulier:

$$\delta x^i = dx^i,$$

tandis que:

$$\delta u^i = du^i + \sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right\} u^h dx^k,$$

si u^i sont les composantes d'un vecteur.

Soit maintenant une congruence des géodésiques g , infiniment voisines à une géodésique « base » B . Établissons une correspondance quelconque entre les points de B et de g , et désignons par δ' la différentielle *covariante* qui correspond au passage d'un point quelconque de B au point correspondant de g . Nous pouvons appeler cette différentielle pour des raisons bien évidentes « une variation covariante ». Le vecteur infinitésimal

$$\delta' x^r = \xi^r$$

s'appelle l'*écart géodésique*.

Nous désignons par b^r le champ des vecteurs unitaires tangents aux géodésiques de la congruence, et par δ une différentielle covariante le long d'une géodésique, interchangeable avec δ' . On a:

$$\delta' b^r = \delta' \frac{dx^r}{d\sigma} = \frac{\delta \delta' x^r}{d\sigma} - \frac{\delta' \delta \sigma}{d\sigma} \frac{dx^r}{d\sigma} = \frac{\delta \xi^r}{d\sigma} - \lambda b^r = (D\xi)^r - \lambda b^r,$$

σ étant la longueur d'arc de B , D la dérivée de Bianchi $\frac{\delta}{d\sigma}$ et $\lambda = \frac{\delta' d\sigma}{d\sigma}$.

On a évidemment le long d'une géodésique:

$$\delta' b^r = 0.$$

Appliquons maintenant la formule (2) aux grandeurs définies tout à l'heure. Il vient immédiatement:

$$\begin{aligned} (\delta' \delta - \delta \delta') b^r &= -\delta \delta' b^r = -\delta ((D\xi)^r - \lambda b^r) = -\delta (D\xi)^r + \delta \lambda \cdot b^r = \\ &= \sum_{ihk} \{ir, hk\} b^i \delta x^h \delta' x^k, \end{aligned}$$

où, en divisant par $d\sigma$:

$$(D^2 \xi)^r - \frac{d\lambda}{d\sigma} b^r = -\sum_{ihk} \{ir, hk\} b^i b^h \xi^k.$$

C'est bien la formule (1).

On obtient aussi immédiatement à l'aide de la même « variation covariante » l'expression de λ . En fait,

$$d\sigma^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k,$$

$$d\sigma \delta' d\sigma = \sum_{ik} g_{ik} dx^i \delta' dx^k,$$

$$\lambda = \frac{\delta' d\sigma}{d\sigma} = \sum_{ik} g_{ik} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{\delta \delta' x^k}{d\sigma} = \sum_{ik} g_{ik} b^i (D\xi)^k.$$

On sait bien qu'on peut écrire les équations de Lagrange pour un système à liaisons ne dépendant pas du temps sous la forme:

$$\frac{\delta v^r}{dt} = Q^r,$$

où $v^r = \frac{dx^r}{dt}$ désigne le vecteur vitesse, $Q^r = \sum_{rs} g^{rs} Q_s$, $\sum_{ik} g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}$ étant la force vive et Q_s les forces généralisées. En appliquant la formule (2) au vecteur v^r on obtient sans peine par les mêmes calculs:

$$(D^2\xi)^r - \frac{d\lambda}{dt} v^r = - \sum_{ihk} \{ir, hk\} v^i v^h \xi^k + \delta' Q^r + 2 Q^r \lambda.$$

Si la variation est « isochronique » on a $\lambda = 0$, et la formule se simplifie considérablement.

Ces calculs peuvent être généralisés immédiatement aux espaces à connexion affine (Weyl, Schouten) et aux coordonnées et espaces non holonomes. Les formules correspondantes ont été déjà établies par M. Vranceanu (« Ann. di Mat. », t. 6, 1929). On peut aussi donner des équations à variations tout à fait analogues pour un système mécanique absolument *quelconque*. On trouvera les développements relatifs dans un autre article.

Matematica. — *Sur les courbes des variétés non-holonomes.*
Nota di V. HLAVATÝ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nous étudierons dans cette Note les courbes asymptotiques et les courbes géodésiques sur une variété non-holonyme, située dans une variété holonyme. Cette Note étant la suite de la Note précédente ⁽²⁾ qui vient d'être publiée, nous employons la même notation et la même terminologie.

1. Étant donnée une courbe C dans L_n , ($n > 2$), nous désignerons par s son arc affine, par $e^v = \frac{dx^v}{ds}$ ⁽³⁾ son vecteur tangent et par D le symbole de la dérivée covariante dans L_n le long de e^v . Cette courbe étant supposée générale, on peut trouver $n - 1$ courbures « affines » k_1, \dots, k_{n-1} , ainsi que $n - 1$ vecteurs « normaux » e^v_2, \dots, e^v_n de C et on parvient aux « formules de Frenet »

$$(1) \quad D e^v_j = - k_{j-1} e^v_{j-1} + e^v_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n, \quad k_0 = 0, \quad e^v_{n+1} = 0).$$

Supposons maintenant une L_{n-1} donnée dans L_n au moyen des champs vectoriels tangents u^v_1, \dots, u^v_{n-1} . On peut facilement construire un tel champ vectoriel u^v_n , que les vecteurs u^v_j ($j = 1, \dots, n$) soient linéairement indépendants, ce qui nous permet aussi de trouver les vecteurs covariants u_{λ}^j d'après

$$u_{\lambda}^i u_{\lambda}^j = \delta_j^i \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

Posons maintenant

$$(2) \quad h_{\mu\lambda} = B_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} u_{\beta}^n, \quad l_{\mu}^{\nu} = B_{\mu\beta}^{\alpha\nu} \nabla_{\alpha} u_{\beta}^n.$$

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(2) *Sur les courbures des variétés non-holonomes* (« Rendiconti Acc. Lincei », vol: XII, serie 6^a, fasc. 11, 1930).

(3) Les indices grecs parcourent les premières n chiffres latines I, II, ... Les indices latins parcourent les chiffres arabes. Nous supprimons le symbole de sommation d'après un indice muet grec.

(4) HLAVATÝ, *Ancora sulle proprietà differenziali* ... (« Rendiconti Circolo di Palermo », LIII, 1929).

$$(5) \quad \delta_j^i = \delta_i^j = \delta_{ij} = \delta_{ji} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \text{pour}$$

On a donc en raison de l'équation (2) de la Note citée plus haut

$$H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} = -h_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} \quad , \quad L_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} = -l_{\mu}^{\cdot\cdot\cdot v} u_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v}.$$

Or, si on introduit encore les affineurs

$$-s_{\mu}^{\cdot\cdot\cdot v} = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot v} u_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} \quad , \quad -\zeta_{\mu\lambda} = Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} u_{\nu}^{\cdot\cdot\cdot v}$$

l'affineur de courbure de L_n^{n-1} peut s'écrire

$$(3) \quad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\cdot v} = B_{\omega\mu\lambda\delta}^{\alpha\beta\gamma\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} + 2 l_{[\mu}^{\cdot\cdot\cdot v} h_{\omega]\lambda} + 2 \zeta_{\omega\mu} l_{\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} + 4 \zeta_{\omega\mu} s_{\gamma}^{\cdot\cdot\delta} B_{\lambda\delta}^{\gamma\gamma}.$$

2. Une courbe C est dite asymptotique sur L_n^{n-1} si son $(n-1)$ -vecteur osculateur $U_{\text{I}}^{[\gamma_1} \dots U_{n-1}^{v_{n-1}]}$ est situé dans L_n^{n-1} le long de C. Étant donnée une telle courbe, nous pouvons choisir le long d'elle son vecteur « normal » e^v pour u^v et de plus, nous pouvons identifier les vecteurs u^v, \dots, u_{n-1}^v avec e^v, \dots, e_{n-1}^v . Cela étant, on a le long de C

$$u_j^v = e_j^v \quad , \quad u_{\lambda}^j = e_{\lambda}^j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Moyennant ces vecteurs, on peut adjoindre à chaque affineur $V_{\mu_1 \dots \mu_p}^{v_1 \dots v_s}$ le scalaire

$$V_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_s} = V_{\mu_1 \dots \mu_p}^{v_1 \dots v_s} e_{i_1}^{\mu_1} \dots e_{i_p}^{\mu_p} e_{v_1}^{j_1} \dots e_{v_s}^{j_s} \quad , \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

En particulier on a d'après (1) et (2) le long de C

$$(4)_1 \quad h_{1a} = e_a^{\lambda} D e_{\lambda}^1 = -e_{\lambda}^1 D e_a^{\lambda} = -\delta_{a+1}^1 \quad , \quad l_1^a = e_{\lambda}^a D e_{\lambda}^1 = -\delta_{\lambda}^a e_{n-1}^1.$$

D'autre part, en tenant compte de l'équation

$$Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot v} = H_{[\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot v} + B_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot v} C_{\gamma}^v \quad (1)$$

ou bien de

$$\zeta_{\mu\lambda} = h_{[\mu\lambda]} + B_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} s_{\alpha\beta} \quad \left(s_{\alpha\beta} = -S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot v} u_{\nu}^{\cdot\cdot\cdot v} \right)$$

on trouve

$$2 \zeta_{1a} = h_{1a} - h_{a1} + 2 s_{1a}$$

et par conséquent

$$(4)_2 \quad h_{a1} = h_{1a} - 2 \zeta_{1a} + 2 s_{1a} = -\delta_{a+1}^1 - 2 \zeta_{1a} + 2 s_{1a}.$$

(1) SCHOUTEN, *Über nicht-holonyme Übertragung in einer L_n* (« Math. Ztsch. », 30, 1929, 149-172, éq. (61). Voir aussi éq. (2) de la Note citée sous (2).

3. L'anneur $R'_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ donne naissance au scalaire $R'_{\alpha\beta\gamma\delta}{}^{\epsilon}$ pour lequel on déduit à cause de (3)

$$R'_{\alpha\beta\gamma\delta}{}^{\epsilon} = R'_{\alpha\beta\gamma}{}^{\epsilon} + l_{\alpha}^{\epsilon} h_{\beta\gamma} - l_{\beta}^{\epsilon} h_{\alpha\gamma} + 2 \chi_{\alpha\beta} (l_{\gamma}^{\epsilon} + 2 s_{\gamma}^{\epsilon}).$$

En y substituant les valeurs (4) on obtient pour $\alpha = n-1$, $\epsilon = 1$

$$(E)_1 \quad \left[\frac{k}{n-1} (-1 + 2 s_{1\ n-1} - 4 \chi_{1\ n-1}) = R'_{1\ n-1\ 1}{}^1 - R_{1\ n-1\ 1}{}^1 - 4 \chi_{1\ n-1} s_1^1 \right].$$

Si la connexion de L_n est semi-symétrique

$$S_{\lambda\mu}{}^{\nu} = S_{\lambda} A_{\mu}^{\nu} - S_{\mu} A_{\lambda}^{\nu}$$

on a

$$s_{1\ n-1} = - e_{1\ n-1}^{\lambda} e_{n-1}^{\mu} e_{\nu} S_{\lambda\mu}{}^{\nu} = 0, \quad s_1^1 = - \frac{e_{1\ n-1}^{\lambda}}{n} S_{\lambda}$$

et notre équation se simplifie:

$$(E)_2 \quad \left[\frac{k}{n-1} (-1 - 4 \chi_{1\ n-1}) = R'_{1\ n-1\ 1}{}^1 - R_{1\ n-1\ 1}{}^1 - 4 \chi_{1\ n-1} s_1^1 \right].$$

Pour les variétés holonomes on a $\chi = 0$ et par conséquent (E) devient

$$\frac{k}{n-1} (-1 + 2 s_{1\ n-1}) = R'_{1\ n-1\ 1}{}^1 - R_{1\ n-1\ 1}{}^1 \quad (1).$$

L'équation (E) exprime la dernière courbure d'une courbe asymptotique sur L_{n-1}^n en fonction des courbures de L_n et L_{n-1}^{n-1} . On peut donc l'envisager comme analogie à la formule bien connue d'Enneper qui exprime la torsion de la courbe asymptotique moyennant la courbure de Gauss.

4. Supposons maintenant que la connexion de la variété à n dimensions soit riemannienne et désignons une telle variété par V_n . Dans ce cas notre variété non-holonyme à $n-1$ dimensions est douée à son tour d'une connexion riemannienne et nous la désignerons par V_{n-1}^{n-1} . Dans ce cas on a

$$S_{\lambda\mu}{}^{\nu} = 0, \quad h_{\lambda\mu} = l_{\lambda\mu}, \quad \chi_{\lambda\mu} = h_{[\lambda\mu]}$$

et l'équation (3) devient

$$(5)_1 \quad R'_{\omega\mu\lambda\nu} = B_{\omega\mu\lambda\nu}^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + h_{\mu\nu} h_{\omega\lambda} - h_{\omega\nu} h_{\mu\lambda} + 2 h_{[\omega\mu]} h_{\lambda\nu}.$$

On en déduit

$$(5)_2 \quad R'_{\omega\mu[\lambda\nu]} = B_{\omega\mu\lambda\nu}^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2 h_{[\omega} h_{\mu]\nu]} + 2 h_{[\omega\mu]} h_{[\lambda\nu]}$$

et cette équation donne naissance à l'équation scalaire

$$(6) \quad R'_{1a[1a]} = R_{1a1a} + 1/2 [(h_{1a} - h_{a1})^2 + 2 h_{11} h_{aa} - 2 h_{1a} h_{a1}] \quad (a < n).$$

Pour l'interpréter géométriquement, remarquons avant tout que les équations de Frenet dans V_n sont

$$(7) \quad D e^v_j = - k_{j-1} e^v_{j-1} + k_{j+1} e^v_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n, \quad k_0 = 0 = k_n).$$

Ici naturellement D se rattache à l'arc métrique s de C , le vecteur tangent $e^v_i = \frac{dx^v}{ds}$ ainsi que le vecteur normal $e^v_{\omega} (\omega = 2, \dots, n)$ sont les verseurs et k_1, \dots, k_{n-1} sont les courbures métriques de C . Cela étant, nous définissons une courbe asymptotique d'ordre $m (\leq n-1, > 1)$ de V_n^{n-1} comme ayant le m -vecteur osculateur $e^{v_1} \dots e^{v_m}$ situé dans V_n^{n-1} dans chaque son point. Or dans ce cas on peut poser le long de C

$$u^v_n = \sum_{m+1}^n e^v_f \cos p_f, \quad u^v_n = \sum_{m+1}^n e^v_f \cos p_f$$

et par conséquent on a le long de C à cause de (7)

$$(8) \quad h_{1a} = e^a_n D u^a_n = - \delta_{am} k_m \cos p_{m+1} \quad (a = 1, \dots, m)$$

et

$$(9) \quad h_{a1} = h_{1a} - 2 \chi_{1a} = - 2 \chi_{1a} - \delta_{am} k_m \cos p_{m+1}.$$

En substituant ces valeurs dans (6) on obtient pour $a = m$

$$(E)'_1 \quad R'_{1m[1m]} - R_{1m1m} = - \left(k_m \cos p_{m+1} \right)^2 + 2 \chi_{1m} \left(\chi_{1m} - k_m \cos p_{m+1} \right)$$

Si en particulier $m = n-1$ on a $p_{m+1} = 0$ et par conséquent

$$(E)_2 \quad R'_{1n-1[1n-1]} - R_{1n-11n-1} = - k_{n-1}^2 + 2 \chi_{1n-1} \left(\chi_{1n-1} - k_{n-1} \right)$$

Supposons maintenant $n = 3$ et la connexion euclidienne. En désignant par $K' = R'_{12[12]}$ la courbure Gaussienne de V_3^2 on a d'après (E)'

$$K' = -\frac{k^2}{2} + 2\chi\left(\chi - \frac{k}{2}\right) \quad (\chi = \chi_{12}).$$

Cette formule, qui exprime la torsion de la courbe asymptotique de V_3^2 en fonction de sa courbure Gaussienne est une généralisation immédiate de la formule classique d'Enneper pour une surface, à savoir

$$K' = -\frac{k^2}{2}.$$

La formule (E)' qui pour une variété holonome se réduit à

$$R'_{1m[1m]} - R_{1m1m} = -\left(\frac{k}{m} \cos \frac{p}{m+1}\right)^2 \quad (1)$$

représente donc une analogie à la généralisation (métrique) de la formule d'Enneper.

Remarque: On sait que $R_{1a1a} = R_{1a[1a]}$ est la courbure de V_n dans la bidirection du bivecteur $e^{[\lambda} e^{\nu]}$. Elle dépend du bivecteur, mais elle est indépendante des vecteurs orthogonaux e^{λ}_i, e^{μ}_a , pourvu qu'ils soient situés dans la bidirection. Pour construire la courbure de V_n^{n-1} dans la bidirection des vecteurs e^{λ}_i, e^{μ}_a , indépendante de ces vecteurs on doit avoir recours à l'afineur $R'_{\omega\mu[\lambda\nu]}$ d'où l'on déduit $R'_{1a[1a]}$. C'est pour cette raison que nous ne nous sommes pas servis de l'équation (5)₁, mais de (5)₂, pour en déduire (6).

5. Faisons maintenant une autre application de la formule (6) en supposant $n = 3$ et la connexion riemannienne. En posant $a = 2$ on peut la transcrire de la manière suivante

$$(10) \quad R'_{12[12]} - R_{1212} = h_{11}h + 2\chi^2 - (h_{11}^2 + h_{12}^2 - 2\chi h_{12}), \quad (h = h_{11} + h_{22}).$$

Pour interpréter géométriquement cette équation nous imaginons une géodésique de V_3^2 . En désignant par e^{ν}_3 son verseur normal et par e^{ν}_2 son verseur binormal on obtient les formules de Frenet

$$D e^{\nu}_1 = k e^{\nu}_{13}, \quad D e^{\nu}_3 = -e^{\nu}_1 k + e^{\nu}_2 \frac{k}{2}, \quad D e^{\nu}_2 = -\frac{k}{2} e^{\nu}_3$$

(1) HLAVATÝ, *Sur la seconde forme fondamentale* II (« Comptes Rendus », Paris, 186, 1928, 1258-1260).

et de plus, on peut poser le long d'elle

$$u^{\nu}_{\underset{1}{1}} = e^{\nu}_{\underset{1}{1}} \quad , \quad u^{\nu}_{\underset{2}{2}} = e^{\nu}_{\underset{3}{3}} \quad , \quad u^{\nu}_{\underset{3}{3}} = e^{\nu}_{\underset{2}{2}} .$$

Il s'ensuit

$$(11) \quad h_{\underset{1}{1}\underset{1}{1}} = -k_{\underset{1}{1}} \quad , \quad h_{\underset{1}{1}\underset{2}{2}} = k_{\underset{2}{2}} \quad , \quad h_{\underset{2}{2}\underset{1}{1}} = h_{\underset{1}{1}\underset{2}{2}} - 2\chi \quad (\chi = \chi_{\underset{1}{1}\underset{2}{2}}) .$$

Les verseurs $e^{\nu}_{\underset{1}{1}}$, $e^{\nu}_{\underset{2}{2}}$ étant orthogonaux, on peut exprimer le tenseur metrique $g'^{\lambda\nu}$ de $V^2_{\underset{3}{3}}$ comme suit

$$g'^{\lambda\mu} = e^{\lambda}_{\underset{1}{1}} e^{\mu}_{\underset{1}{1}} + e^{\lambda}_{\underset{2}{2}} e^{\mu}_{\underset{2}{2}} .$$

Le scalaire

$$h = h_{\underset{1}{1}\underset{1}{1}} + h_{\underset{2}{2}\underset{2}{2}} = g'^{\lambda\mu} h_{\lambda\mu}$$

est donc indépendant des vecteurs $e^{\nu}_{\underset{1}{1}}$, $e^{\nu}_{\underset{2}{2}}$. Or, en substituant les valeurs (11)

dans (10) et en désignant par K' , K les scalaires $R'_{\underset{1}{1}\underset{2}{2}[\underset{1}{1}\underset{2}{2}]}$, $R_{\underset{1}{1}\underset{2}{2}\underset{1}{1}\underset{2}{2}}$ on obtient pour n'importe quelle courbe géodésique

$$(I) \quad \boxed{K' - K = -h_{\underset{1}{1}\underset{1}{1}} k_{\underset{1}{1}} + 2\chi^2 - (k_{\underset{1}{1}}^2 + k_{\underset{2}{2}}^2 - 2\chi k_{\underset{2}{2}})}$$

et par conséquent cette relation peut être envisagée comme l'équation intrinsèque des courbes géodésiques sur $V^2_{\underset{3}{3}}$ dans V_3 .

On peut donner une forme plus symétrique à cette relation, en imaginant une famille des géodésiques $*C$, orthogonales à la géodésique examinée. En désignant par l'astérisque avant-posé les éléments de cette famille, on a le long de la géodésique étudiée

$$e^{\nu}_{\underset{1}{1}} = *e^{\nu}_{\underset{2}{2}} \quad , \quad e^{\nu}_{\underset{3}{3}} = *e^{\nu}_{\underset{3}{3}} \quad , \quad e^{\nu}_{\underset{2}{2}} = - *e^{\nu}_{\underset{1}{1}}$$

et par conséquent

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad 2\chi = h_{\underset{1}{1}\underset{2}{2}} - h_{\underset{2}{2}\underset{1}{1}} = k_{\underset{2}{2}} + *k_{\underset{1}{1}} \\ b) \quad h = - \left(k_{\underset{1}{1}} + *k_{\underset{1}{1}} \right)^2 \end{array} \right. .$$

En substituant ces valeurs dans (I) on trouve

$$\boxed{K' - K = *k_{\underset{1}{1}} k_{\underset{1}{1}} + *k_{\underset{2}{2}} k_{\underset{2}{2}} + 1/2 \left(k_{\underset{2}{2}} + *k_{\underset{2}{2}} \right)^2} .$$

Remarque: La formule (12) $\begin{smallmatrix} a) \\ b) \end{smallmatrix}$ fait voir que la somme des deuxièmes courbures des courbes géodésiques orthogonales ne dépend pas de ces courbes.

Remarque: Dans ce qui précède nous avons supposé que la géodésique de V_3^2 ne soit pas aussi géodésique dans V_3 car nous nous sommes servis de son verseur normal e^v qui n'existe pas dans ce cas. Mais on parvient quand même à la formule (I) avec une autre interprétation des scalaires k et k .

6. Nous finissons cette Note en déduisant une formule analogue à celle de Beltrami pour une courbe asymptotique C de V_3^2 dans V_3 . Si l'on désigne par D' le symbole de la dérivée covariante dans V_3^2 le long de son verseur tangent e^v on trouve pour un vecteur arbitraire v^v de V_3^2

$$D' v^v = B_{\lambda}^v D v^{\lambda} = - C_{\lambda}^v D v^{\lambda} + D v^v \quad (1)$$

Il s'ensuit

$$(13) \quad D v^v = D' v^v + v^{\lambda} e^{\mu} H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot v},$$

$$(14) \quad D^2 v^v = D'^2 v^v + 2 e^{\mu} H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot v} D' v^{\lambda} + v^{\lambda} H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot v} D' e^{\mu} + e^{\mu} v^{\lambda} D H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot v}.$$

Désignons maintenant par e^v , e^v le verseur normal resp. binormal de C. En tenant compte de (7), (8), (9) et de la définition de la courbe asymptotique, on déduit de (13) le long de C

$$D e^v = D' e^v = k e^v,$$

$$(2 e^{\mu} D' e^{\lambda} + e^{\lambda} D' e^{\mu}) H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot v} = k (3 k + 2 \chi) e^v.$$

Il s'ensuit en raison de (14)

$$(15) \quad e_v e^{\mu} e^{\lambda} D H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot v} = -2 (k + \chi) k.$$

Imaginons maintenant une autre courbe *C sur V_3^2 qui coupe C dans un point P et supposons que C et *C aient en P le verseur tangent et les verseurs normaux en commun. En désignant par astérisque les éléments de *C on trouve en P

$$(2 \, ^*e^{\mu} D' \, ^*e^{\lambda} + \, ^*e^{\lambda} D' \, ^*e^{\mu}) H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot v} = \, ^*k (3 \, ^*k + 2 \, ^*\chi) \, ^*e^v$$

(1) Voir l'équation (1) de la Note citée sous (2).

et

$$(16) \quad {}^*_3 e_\nu {}^*_1 e^\mu {}^*_1 e^\lambda DH_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = {}^*_1 k {}^*_2 k \left(3k + 2\zeta \right) {}^*_1 k.$$

En comparant les équations (15) et (16) on en déduit

$$(B) \quad \boxed{{}_2 k \left(2{}_1 k - 3 {}^*_1 k \right) = 2\zeta \left({}^*_1 k + k \right) - {}^*_1 k {}^*_2 k}.$$

On sait, d'après un théorème de Beltrami que les premières courbures k et ${}^*_1 k$ d'une courbe asymptotique gauche sur une surface et de la courbe d'intersection de son plan osculateur en P avec la surface sont en relation

$$2 {}_1 k = 3 {}^*_1 k.$$

On voit donc, que ce théorème est un cas spécial de la formule (B) comme on peut s'en persuader en y posant $\zeta = 0$, ${}_2 k \neq 0$, ${}^*_2 k = 0$.

Matematica. — *Application de la construction de Cantor-Minkowski à l'analyse des ensembles discontinus.* Nota di G. BOULIGAND e G. RABATÉ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Soit E un ensemble ponctuel borné. Nous le supposerons *fermé*, sinon il suffirait, par la suite, de lui substituer sa fermeture. De chaque point de E comme centre, avec un rayon ρ , décrivons une sphère; réunir ces sphères, c'est, par définition, effectuer la construction de Cantor-Minkowski (ou abrégativement C. M.) avec le rayon ρ . Si nous supposons les sphères précédentes ouvertes, leur réunion E_ρ sera elle-même un ensemble ouvert qui est encore celui des points dont la distance à E est inférieure à ρ .

La construction C. M. est intéressante à bien des titres. Elle fournit d'une part des propriétés dimensionnelles de l'ensemble E ⁽²⁾. D'autre part, les frontières d'ensembles, tels que le précédent E_ρ , s'offrent comme une généralisation des surfaces convexes, dont M. Georges Durand a réalisé l'étude, en liaison avec une nouvelle notion des enveloppes ⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(2) G. BOULIGAND, *Dimension, étendue, densité*. (« C. R. », t. 180, 1925, p. 245). *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*. (« Bull. Sc. Math. », sept. oct. 1928 et juin 1929).

(3) G. DURAND, *Sur une manière de concevoir la théorie des enveloppes*. (« C. R. », 188, p. 1136).

Sur la construction C. M. (ibid, t. 188, p. 1368; t. 189, p. 443; t. 190, p. 1001 et 1219).

Ce problème particulier, quoique déjà fort large, de Géométrie Infinitésimale Directe, a montré l'importance de la notion de contingent ⁽¹⁾ dégagée en principe dès 1928 par M. G. Bouligand ⁽²⁾, et appliquée ensuite par lui-même à divers problèmes ⁽³⁾. Les récentes recherches des deux auteurs de cette Note ⁽⁴⁾ sur le contingent et ses extensions ont mis en évidence l'intérêt du théorème suivant, donné par S. Janiszewski dans sa mémorable thèse ⁽⁵⁾.

Lorsque l'ensemble limite d'une famille infinie de continus renferme deux points A et B, cette famille admet pour ensemble d'accumulation un continu sur lequel se trouvent A et B.

Le but de la présente Note est de préciser, au moyen de la construction C. M., la notion du *défaut d'enchaînement* d'un ensemble fermé non continu, et de retrouver à sa faveur la proposition précédente. Notre exposé va donc se présenter comme un chaînon d'une théorie dans laquelle, après s'être servi de la construction C. M. pour obtenir une condition suffisante de continuité du contingent, on voit, par un juste retour, le contingent s'appliquer à la classification des points frontières d'un ensemble E_0 provenant de la construction C. M. ⁽⁶⁾.

1. Dans tout ce qui suit, nous ne considérons que des ensembles bornés.

Rappelons qu'un *constituant* d'un ensemble ouvert \mathcal{E} est un ensemble e saturé par rapport au système de trois propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il est contenu dans } \mathcal{E}, \\ \text{il est ouvert,} \\ \text{il est d'un seul tenant.} \end{array} \right.$$

Si donc on ajoute, à un constituant de \mathcal{E} , un point de \mathcal{E} , l'ensemble obtenu cessera d'être ouvert ou d'être d'un seul tenant.

(1) G. BOULIGAND, *Sur quelques points de méthodologie géométrique*. (« Rev. générale des Sciences », 31 janvier 1930).

(2) G. BOULIGAND, *Sur quelques points de topologie restreinte du premier ordre*. (« Bull. Soc. Math. de France », t. 56, 1928, p. 26-34).

(3) G. BOULIGAND, *Sur l'existence des demi-tangentes à une courbe de Jordan*. (« Fund. Math. », t. XV, p. 216 et suivantes).

Sur un caractère de planité d'une courbe simple de Jordan. (« Bull. Soc. Math. de France », Mai 1930).

Applications du contingent. (« C. R. de l'Ac. des Sciences », séance du 10 nov. 1930).

Expression générale de la solidarité entre le problème du minimum d'une intégrale et l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi. (« Rendiconti R. Acc. dei Lincei », juillet 1930).

(4) G. RABATÉ, *Sur quelques points de Géométrie Infinitésimale Directe*. (« Rendiconti R. Acc. dei Lincei », 2 nov. 1930).

(5) S. JANISZEWSKI, *Sur les continus irréductibles entre deux points*. (Thèse, Paris, 1911, p. 20).

(6) G. Durand, loc. cit.

vement au rayon ρ , entraîne une subdivision bien déterminée de E en autant d'ensembles fermés que E_0 contient de constituants, chacun des sous ensembles fermés de E ainsi réalisés étant constitué par l'ensemble des points de E qui sont intérieurs respectivement à chacun des constituants de E_0 . Et les n sous-ensembles fermés en lesquels nous avons ainsi décomposé E sont, deux à deux, à des distances au moins égales à 2ρ .

De cette décomposition de E , nous pourrions d'ailleurs déduire des décompositions de E en deux sous-ensembles fermés distants d'au moins 2ρ , constitués: le premier, par certains des n sous-ensembles initiaux, et le second par tous les autres.

De ces considérations découlent aisément les théorèmes suivants:

A) Chaque constituant $C^{e,i}$ de E_0 est l'ensemble ouvert résultant, par la construction C. M., de l'ensemble E^i des points de E intérieurs à $C^{e,i}$.

Autrement dit $C^{e,i} \equiv E_0^i$.

B) Pour ρ assez grand, E_0 est d'un seul tenant, c'est-à-dire $n(\rho) = 1$. Et si $E_{0'}$ est d'un seul tenant, il en est de même de $E_{0''}$, si $\rho'' > \rho'$.

C) L'entier $n(\rho)$ est une fonction non croissante de ρ .

D) Il existe un nombre ρ_0 (qui peut être nul) qui est le plus petit des nombres tels que $\rho > \rho_0$ entraîne $n(\rho) = 1$ (c'est-à-dire E_0 d'un seul tenant, ou domaine).

ρ_0 est donc la plus grande des valeurs de ρ pour lesquelles $n(\rho)$ est discontinue,

et la plus petite des valeurs de ρ au-dessus de laquelle la construction C. M. effectuée sur E donne naissance à un domaine.

2. Nous sommes maintenant en mesure de définir de deux manières le défaut d'enchaînement, et de prouver l'équivalence de ces deux définitions.

Soit E un ensemble fermé, borné, non continu. D'une part, il est décomposable, au moins d'une façon, en deux ensembles fermés A et B sans point commun.

Soit (A, B) l'une de ces décompositions, $d(A, B)$ la distance (non nulle) des deux ensembles A et B , et 2λ la borne supérieure de l'ensemble des distances correspondant à toutes les décompositions possibles de E en deux ensembles fermés sans point commun.

La longueur 2λ peut être choisie pour mesurer le défaut d'enchaînement de l'ensemble.

Soit d'autre part ρ_0 la longueur envisagée ci-dessus (différente de zéro dans le cas actuel). Cette longueur est caractérisée par les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \rho > \rho_0 \text{ entraîne } n(\rho) = 1; \\ \rho \leq \rho_0 \text{ entraîne } n(\rho) < 1. \end{cases}$$

La longueur $2\rho_0$ fournit une seconde définition du défaut d'enchaînement.

Des considérations résumées ci-dessus, on déduit aisément :

$$\lambda = \rho_0$$

égalité qui montre bien l'équivalence annoncée.

Et on peut dire que le défaut d'enchaînement de E est le double de la plus petite valeur au-dessus de laquelle la construction C. M., effectuée sur E , donne naissance à un domaine.

Le fait qu'on obtient le même ensemble ouvert, qu'on applique la construction $(C. M.)_0$ à un ensemble E ou à sa fermeture $\bar{E} = E + E'$, nous permet d'ailleurs de prendre, pour défaut d'enchaînement de tout ensemble E borné celui de sa fermeture \bar{E} .

Voici une remarque importante :

Soit E un ensemble borné (qu'on remplacera au besoin par sa fermeture \bar{E}). Donnons à ρ une valeur moindre que ρ_0 et effectuons sur E_ρ la construction C. M. avec le rayon $\rho_0 - \rho$. Nous obtenons E_{ρ_0} . Il résulte de là que :

$2(\rho_0 - \rho)$ est le défaut d'enchaînement de E_ρ (ou de sa fermeture).

3. De la notion du défaut d'enchaînement, on déduit les propositions suivantes déjà données par Janiszewski⁽¹⁾, et dont l'intérêt se trouve ici accru, du fait de leur mise en relation avec la construction C. M. et le défaut d'enchaînement.

E) Etant donnée une collection infinie $\{\Gamma\}$ de continus bornés dont l'ensemble d'accumulation $\mathcal{H}\{\Gamma\}$ n'est pas vide, on peut constituer une suite $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \dots$ de ces continus telle que, en désignant par ε_k la plus petite valeur de ρ au-dessus de laquelle \mathcal{H}_ρ englobe Γ_k , la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$ tende vers zéro avec $\frac{1}{k}$.

F) Si $\mathcal{H}\{\Gamma\}$ n'est pas vide et ne se réduit pas à un point, il est bien enchaîné. (Ce sera donc un continu, puisqu'il est fermé).

G) Si l'ensemble limite de $\{\Gamma\}$, que nous désignerons par $\mathcal{L}\{\Gamma\}$, contient deux points distincts A et B, l'ensemble d'accumulation $\mathcal{H}\{\Gamma\}$ est un continu passant par les deux points A et B.

Ce dernier résultat détiend, en *Géométrie Infinitésimale Directe*, une importance comparable à celle du théorème d'Ascoli dans l'étude des familles de fonctions.

(1) Une légère imperfection de forme nous a imposé une révision du raisonnement. Sans parler explicitement du défaut d'enchaînement, il semble que l'auteur, à la page 19 de sa thèse, ait songé à faire jouer ce rôle au maximum de la distance d'un point A à l'ensemble $\mathcal{M}_k - A$, en appelant A un point arbitraire de \mathcal{M}_k . Or cette distance est nulle pour tout ensemble parfait, qu'il soit continu ou non.

Matematica. — *Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata.* Nota di E. BORTOLOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Perturbazione prodotta da più sfere rigide in un mezzo elastico in equilibrio.* Nota di E. VOLTERRA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Effetto Raman e polimerizzazione dell'acqua a varie temperature.* Nota di O. SPECCHIA, presentata⁽¹⁾ dal Socio Q. MAJORANA.

Ho cercato di mettere in evidenza, mediante spettri Raman a varie temperature, quelle modificazioni che lo spettro ultrarosso dell'acqua subisce per azioni termiche, e che s'interpretano con l'ipotesi di una variazione del suo stato di polimerizzazione. Ricerche in questo senso erano state eseguite da vari autori con risultati non concordi; ciò che giustifica questa mia ricerca.

La disposizione sperimentale da me adottata deriva da quella ormai classica del Wood; e il riscaldamento del liquido era effettuato mediante una stufa elettrica. — Sorgente eccitatrice: arco a mercurio; dispersione dello spettrografo; fra la 4108 \AA e la 4358 \AA , 27 \AA per mm.; fra la 4358 \AA e la 4960 \AA , 40 \AA per mm.; regione spettrale presa in esame: tra la 4108 \AA e la 5790 \AA .

I vari spettrogrammi Raman sono stati eseguiti alle temperature di 17° , 41° , 60° , 80° e 91° con i seguenti risultati:

Lo spettro Raman dell'acqua, nella regione spettrale considerata, è costituito da tre bande molto intense, le cui lunghezze d'onda risultano rispettivamente di 4176 \AA , 4693 \AA e 5158 \AA e da altre due bande molto deboli, visibili solo in lastre sovraesposte, le cui lunghezze d'onda risultano di 4258 \AA e di 4480 \AA . I valori di queste lunghezze d'onda sono stati determinati per comparazione con lo spettro del ferro, e per interpolazione sulla curva di dispersione dello spettrografo dei valori relativi ai massimi di assorbimento, forniti dall'esame microfotometrico.

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

Le prime tre bande le ritengo eccitate, concordemente con gli altri autori, rispettivamente dalla 3650 Å, dalla 4046 Å e dalla 4358 Å; tra esse, è possibile un'analisi della loro struttura: a temperatura ambiente, per la 4176 Å e la 4693 Å; per temperature più elevate, solo per la 4176 Å. La 5158 Å cade in una regione dello spettro nella quale sono presenti molte righe della sorgente; e a temperature elevate, alla 4693 Å si sovrappone un'intenso spettro continuo, che, debole a temperatura ambiente, si accentua per aumentata diffusione del mezzo.

A temperatura ambiente, tanto la 4176 Å, quanto la 4693 Å risultano costituite, concordemente ai risultati di Ganesan ⁽¹⁾ e della signorina Brunetti ⁽²⁾ di tre componenti ciascuna, le cui lunghezze d'onda sono riportate nella tabella seguente:

TABELLA I.

Righe eccitatrici		Bande Raman		$\Delta \nu$	Bande ultrarosse
λ	ν	λ	ν		μ
Å		Å			
3650	27397	4146	24119	3278	3.04
		4176	23981	3406	2.92
		4197	23828	3569	2.80
4046	24715	4657	21469	3246	3.08
		4693	21310	3405	2.93
		4725	21161	3554	2.81

Le altre due bande a 4258 Å e 4480 Å ritengo sieno ambedue eccitate dalla 3650 Å e corrisponderebbero: la prima a una banda ultrarossa di μ 2.56, valore molto vicino alla lunghezza d'onda di μ 2.58 caratteristica del vapore acqueo; la seconda, a una banda ultrarossa di μ 1.97 che si potrebbe identificare con la 1.96 di Collins ⁽³⁾ e 1.98 di Ellis ⁽⁴⁾.

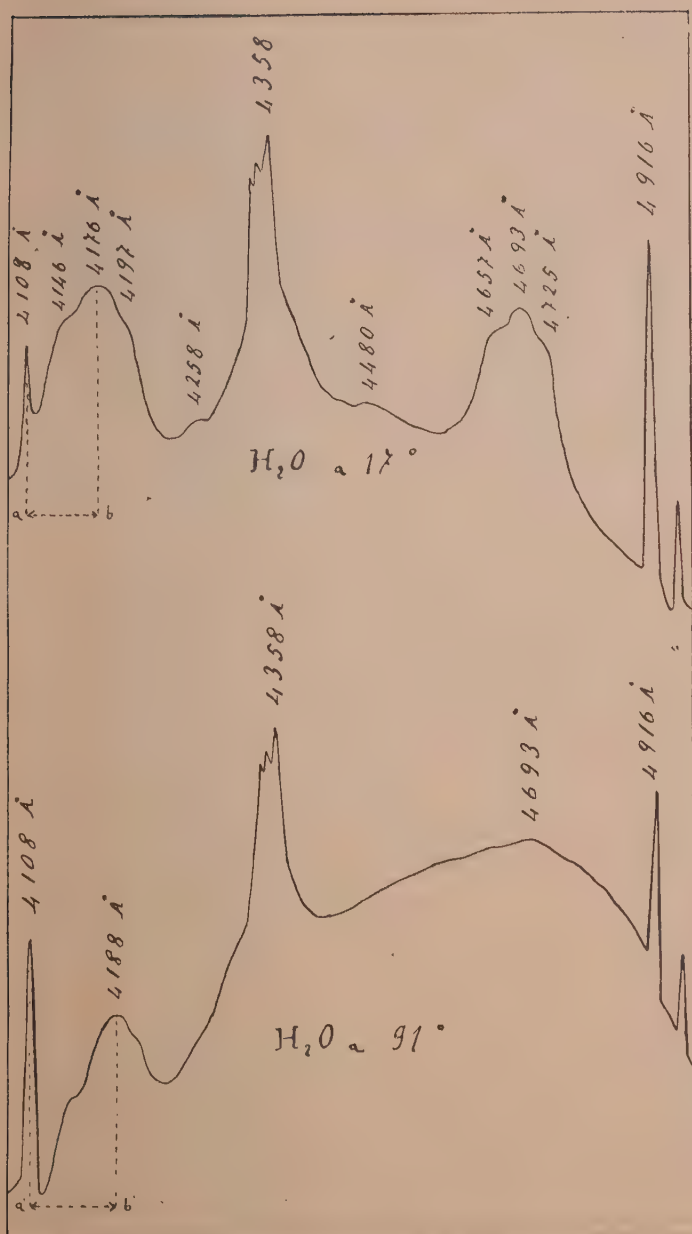
L'attribuzione all'acqua delle due bande osservate a 4258 Å e 4480 Å, credo possa ritenersi sicura, perchè queste non compaiono in spettrogrammi

(1) «Indian Journal of Physics», vol. IV, p. 239.

(2) Comunicazione alla Società Italiana di Fisica (settembre 1930).

(3) «Phys. Rev.», vol. XXVI, 1925, p. 771.

(4) «Phil. Mag.», 1927, p. 620.



Raman del CCl_4 eseguiti nelle medesime condizioni di eccitazione e di sovraesposizione.

Il riscaldamento provoca sulla banda a 4176 \AA una diminuzione dell'intensità di una delle tre componenti e precisamente di quella a 4146 \AA , che corrisponde alla frequenza ultrarossa minore. Tale diminuzione di intensità risulta evidente dalle curve fotometriche relative alla temperatura di 17° e alla temperatura di 91° .

Dalle quali si può anche constatare, come, contrariamente a quanto asserisce il Ganesan, tale componente non scompare a temperature anche più elevate della massima (80°) alla quale tale autore sperimentava. Inoltre la variazione di intensità non è legata linearmente alla temperatura, ma s'accentua alle temperature più alte. Infine, corrispondentemente a tale diminuzione di intensità, e anzi, secondo l'interpretazione del Collins, dipendentemente da quella, si osserva un piccolo spostamento del massimo di tutta la banda verso le maggiori lunghezze d'onda. Come era da prevedersi, ammessa l'interpretazione del Collins, e come la seguente tabella dimostra, anche tale spostamento si accentua con l'innalzarsi della temperatura.

TABELLA II.

Temperatura	Massimo della banda
17°	4176 \AA
41°	4178 \AA
60°	4180 \AA
80°	4184 \AA
91°	4188 \AA

Fisica (Ottica). — *Sulla efficienza fotometrica e la luminosità degli strumenti ottici.* Nota di VASCO RONCHI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

La cosiddetta *luminosità* di uno strumento ottico è un concetto astratto, che vuol riferirsi alla sensazione di maggiore o minore intensità luminosa riportata guardando nell'oculare dello strumento. La teoria fotometrica degli strumenti ottici ⁽²⁾, quando prescinde da tutte le cause che disperdono l'energia luminosa lungo il cammino della luce, porta alla conclusione che uno strumento telescopico, usato per osservare delle sorgenti luminose non puntiformi, per lo strumento stesso, è tanto più luminoso quanto maggiore è la sua pupilla di uscita, finchè questa è completamente utilizzata dall'occhio osservatore; e ciò indipendentemente dalle dimensioni dell'obbiettivo.

D'altra parte la luminosità stessa dipende da molti altri elementi che modificano il flusso luminoso nell'interno dello strumento: tra i principali possiamo annoverare:

- a) la riflessione della luce sulle superficie trasparenti;
- b) l'assorbimento della luce sulle superficie riflettenti;
- c) l'assorbimento della luce negli spessori trasparenti;
- d) la diffusione della luce nei mezzi torbidi e sulle superficie rugose;
- e) l'intercettazione della luce per parte di corpuscoli opachi.

L'insieme di tutte queste cause porta a definire un *coefficiente di trasparenza* dello strumento, T , funzione della lunghezza d'onda e delle condizioni (basta un po' di polvere su un obbiettivo per produrre forti variazioni), intendendo come tale il rapporto tra il flusso luminoso emergente Φ_e e quello incidente Φ_i nello strumento:

$$T = \frac{\Phi_e}{\Phi_i}.$$

Infine le aberrazioni di qualunque specie, esclusa la distorsione, per il fatto che sparpagliano l'energia luminosa concorrente a formare l'immagine di una sorgente elementare, producono un abbassamento dello splendore dell'immagine stessa, anche quando non è più puntiforme, agendo così concordemente colle cause di dispersione dell'energia luminosa, pur non alterando il flusso.

(1) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(2) V. RONCHI, *Lezioni di Ottica Fisica*, Pubblicazioni dell'Istituto Nazionale di Ottica, vol. I, Ed. Zanichelli, 1928, cap. XV.

Concludendo, la luminosità di uno strumento telescopico dipende:

- 1° dalla pupilla d'uscita;
- 2° dal coefficiente di trasparenza;
- 3° dal grado di correzione ottica.

La pupilla di uscita si misura facilmente, mediante un dinametro. Il coefficiente di trasparenza si può misurare, con una certa difficoltà, con varii metodi; il grado di correzione non si può esprimere ancora in termini numerici.

Col metodo che descriveremo in questa Nota, è possibile valutare complessivamente le ultime due cause di abbassamento della luminosità, il coefficiente di trasparenza e il grado di correzione (per ciò che influisce sul rendimento fotometrico), arrivando a definire un nuovo coefficiente, il quale appunto perchè risente anche del grado di correzione, non può chiamarsi più di *trasparenza*, ma sarà chiamato *efficienza fotometrica* dello strumento.

Per questo, supponiamo di osservare con due cannocchiali una stessa sorgente estesa e lontana, di intensità graduabile a piacere e in modo noto. Supponiamo anche che i due strumenti abbiano uguali le pupille di uscita: se allora le immagini appaiono in entrambi allo stesso osservatore con egual chiarezza, vuol dire che l'insieme del coefficiente di trasparenza e del grado di correzione dell'uno e dell'altro cannocchiale sono equivalenti, cioè i due strumenti hanno la stessa *efficienza fotometrica*. Se invece le immagini appaiono diversamente luminose, si deve dire che l'efficienza fotometrica è diversa e maggiore in quello in cui si vede più chiaro.

Per mettere le cose in termini precisi e traducibili in cifre, si può ricorrere a varii metodi, tra cui il migliore e il più pratico ci sembra quello dell'*estinzione*: diminuendo l'intensità della sorgente (che appunto abbiamo supposto regolabile a piacere) finchè se ne vede svanire e oscurarsi completamente l'immagine nel campo dei cannocchiali, è facile arrivare a stabilire un rapporto numerico fra le loro efficienze fotometriche.

Sia ϵ lo splendore della sorgente, considerata come se fosse vicina, ossia già moltiplicato per il coefficiente di trasparenza dello strato d'aria interposto fino agli obbiettivi dei cannocchiali. La teoria fotometrica degli strumenti ottici ci dice che, a parte perdite di flusso e a parte aberrazioni, lo splendore dell'immagine deve essere ancora ϵ ; allora se T è il coefficiente di trasparenza di uno strumento, e se ancora si trascurano le aberrazioni, lo splendore dell'immagine deve essere $T\epsilon$; e infine se si tien conto anche delle aberrazioni lo splendore è $e\epsilon$, indicando appunto con e il nuovo coefficiente: efficienza fotometrica, dello strumento.

Se D è il diametro della pupilla di uscita, l'illuminazione delle immagini sulla retina dell'occhio osservatore è espressa da ⁽¹⁾

(1) V. RONCHI, loc. cit., p. 475.

$$E = \frac{\pi D^2}{4q^2} e \varepsilon,$$

dove q è la distanza, costante, tra la pupilla dell'occhio e la retina. Perchè si sia nelle condizioni limiti della visione, o, come si dice, alla soglia dell'estinzione, è necessario che questa illuminazione assuma un certo valore limite H , costante in determinate condizioni sperimentali e per una stessa persona. Il prodotto $4Hq^2/\pi D^2$ rappresenta dunque una costante che possiamo indicare con K ; dunque

$$e = K/\varepsilon,$$

ossia: l'efficienza fotometrica è inversamente proporzionale allo splendore della sorgente, alla soglia dell'estinzione.

Il confronto delle efficienze fotometriche di due strumenti con questo è riportato al confronto degli splendori della sorgente, per cui, nell'osservazione attraverso agli strumenti stessi, si realizza la soglia dell'estinzione.

Per graduare in modo noto lo splendore della sorgente, riteniamo che il metodo da seguirsi sia quello dei nicol girevoli, ormai riconosciuto in quasi tutte le applicazioni fotometriche come il più pratico e il più sensibile. Si consideri allora una sorgente di splendore η al di là di due nicol, di cui uno fisso e uno girevole insieme a una graduazione che segna 0° quando i nicol sono incrociati e 90° quando sono paralleli; sia α in generale l'angolo che si legge sulla graduazione: lo splendore ε dell'immagine osservata attraverso i nicol è dato notoriamente dall'espressione

$$\varepsilon = c \eta \sin^2 \alpha,$$

essendo c una costante che rappresenta l'efficienza fotometrica del complesso dei nicol, quando questi sono paralleli. Allora se con un'unica lettera k indichiamo l'espressione $K/c\eta$, si conclude

$$e = k/\sin^2 \alpha.$$

Se osserviamo la stessa sorgente con due strumenti, e sono α_1 e α_2 rispettivamente gli angoli che si leggono sulla graduazione dei nicol perchè la sorgente sia portata alla soglia dell'estinzione per l'uno e per l'altro strumento, le rispettive efficienze fotometriche e_1 e e_2 stanno fra loro nel rapporto

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2}.$$

E con questo si ha un modo di confrontare le efficienze numeriche di due strumenti telescopici qualunque.

D'altra parte osservando che la costante k è espressa da

$$k = \frac{4Hq^2}{\pi c \eta D^2},$$

si può mettere in evidenza D^2 e scrivere

$$D^2 e = h / \sin^2 \alpha,$$

essendo h un'altra costante.

Il prodotto $D^2 e$ contiene così gli elementi corrispondenti a tutte le tre cause che influiscono sulla luminosità di uno strumento: la pupilla d'uscita, la trasparenza e il grado di correzione. Perciò, se vogliamo rappresentare con un numero L la luminosità, questo numero deve essere necessariamente proporzionale a $D^2 e$; due strumenti di pupilla D_1 e D_2 e efficienza fotometrica e_1 e e_2 rispettivamente, hanno luminosità L_1 e L_2 che debbono stare fra loro nel rapporto

$$L_2/L_1 = D_2^2 e_2 / D_1^2 e_1.$$

Con questo il confronto delle luminosità di due strumenti telescopici è portato in termini precisi e numerici. Per giungere a una misura non rimane che fare delle convenzioni opportune per definire i valori unitarii: per esempio, si può definire come luminosità unitaria quella di un certo cannocchiale, semplicissimo, ben definito nella sua struttura e nei vetri che lo compongono.

Passando alla parte pratica, per realizzare la sorgente a grande distanza e di splendore regolabile a piacere, abbiamo costruito una specie di collimatore, in cui la sorgente effettiva, costituita da una lampadina a 4 Volta, con involucro smerigliato è nel fuoco di un piccolo obbiettivo, dopo il quale si trovano due nicol, uno fisso e uno girevole insieme all'indice che segna sopra una graduazione l'angolo α : dopo questo un altro obbiettivo come il precedente dà della lampadina una immagine reale, che a sua volta trovasi nel fuoco di un obbiettivo astronomico di dimensioni sufficienti per eseguire comodamente delle prove su gli strumenti ordinarii. L'immagine che si vede attraverso questo obbiettivo risponde ai requisiti voluti.

Il cannocchiale campione dovrebbe esser corretto di aberrazione sferica e cromatica al massimo grado, e anche delle altre aberrazioni almeno vicino all'asse, non essendo necessario un campo considerevole per eseguire le prove. D'altra parte dovrebbe avere il numero minimo di lenti, per essere facilmente definibile e riproducibile. Il tipo astronomico, con obbiettivo acromatico doppio incollato e con oculare a due lenti semplici o quasi, sembra il più indicato allo scopo.

Quello usato da noi ha le caratteristiche riportate nella tabella in álce a questa Nota. Il grado di correzione è eccellente, e quindi l'efficienza fotometrica ha sensibilmente lo stesso valore del coefficiente di trasparenza T. Ci è risultato:

$$T = \epsilon = 0.76.$$

Se la pupilla di uscita si fa uguale a $D = 1.15$ mm, la luminosità L, presa uguale al prodotto $D^2 \epsilon$, risulta

$$L = 1.15^2 \cdot 0.76 = 1.00.$$

Resta così definito uno strumento di luminosità unitaria e con questo l'unità di luminosità degli strumenti telescopici; l'applicazione del metodo indicato o di altri analoghi permette dunque di misurare e tradurre in cifre la luminosità di questi strumenti.

DATI COSTRUTTIVI DELLE OTTICHE DEL CANNOCCHIALE
USATO COME CAMPIONE DI LUMINOSITÀ

Obbiettivo:

$r_1 = + 386$	Crown-bario, $n_D = 1.5704$, $F - C = 0.00991$
$d_2 = 7$	
$r_2 = - 181$	
$d_3 = 4$	Flint ordinario, $n_D = 1.6165$, $F - C = 0.01686$
$r_3 = - 1340$	
	Diametro utile = 60
	Distanza focale = 600.

Oculare:

Lente collettiva:

$r_1 = \infty$	
$d_2 = 5.5$	Crown ordinario, $n_D = 1.5158$, $F - C = 0.00873$
$r_2 = + 30$	
	Diametro = 29.

Lente dell'occhio:

$r_1 = + 25.4$	
$d_2 = 5$	Crown-bario, c. s.
$r_2 = - 18.5$	
$d_3 = 1.5$	Flint ordinario, c. s.
$r_3 = \infty$	
	Diametro = 19
	Distanza focale complessiva = 36.

Le lunghezze sono indicate in millimetri.

Chimica (Chimica-fisica). — *Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide.* - VII. *Analisi termica dei sistemi* $\text{SrCl}_2\text{—FeCl}_2$, $\text{SrCl}_2\text{—CoCl}_2$, $\text{ZnCl}_2\text{—FeCl}_2$, $\text{ZnCl}_2\text{—CoCl}_2$ *anidri* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. FERRARI e A. INGANNI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Lo studio della miscibilità allo stato solido di alcune coppie di cloruri bivalenti fatto nelle Note precedenti ⁽³⁾ ha confermato la supposizione che la miscibilità completa fra due composti si riscontra quando il reticolo di entrambi è dello stesso tipo (es. i cloruri di ferro, di cobalto, di nichelio, di magnesio, di manganese e di cadmio tutti romboedrici tipo « MgCl_2 ») ⁽⁴⁾.

Si può tuttavia avere una miscibilità completa anche tra composti senza analogia di forma cristallina quando il loro volume molecolare è poco diverso. È assai verosimile però che queste soluzioni solide siano stabili solo a temperatura elevata, quando il reticolo per la maggior ampiezza delle vibrazioni termiche degli atomi che ne costituiscono i nodi presenta una maggior capacità di adattamento; mentre a bassa temperatura, venendo questa elasticità a diminuire, le soluzioni solide si scindono. Questo forse non è stato riconosciuto in molti casi, perchè l'effetto termico della decomposizione è difficile da cogliersi, soprattutto se questa avviene a bassa temperatura. In questi casi l'esame röntgenografico permette di riconoscere con grande facilità se lo smistamento dei cristalli è avvenuto. Questa affermazione è confermata dal comportamento delle coppie che il cloruro di calcio forma coi cloruri romboedrici tipo « MgCl_2 ».

Il volume molecolare del cloruro di calcio, della cui struttura sappiamo solo che non è tipo MgCl_2 ⁽⁵⁾, è più grande di quello dei cloruri romboedrici ⁽⁶⁾:

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1930.

(3) Questi « Rendiconti », 6^a serie, VIII (1928), pp. 238-43, e pp. 306-8; IX (1929), pp. 782-89.

(4) Questi « Rendiconti », 6^a serie, IV (1926), pp. 10-13; VI (1927), pp. 56-59.

(5) Questi « Rendiconti », 6^a serie, X (1929), p. 254; H. HEYSE « Zeitschr. f. Physik », 63 (1930), pp. 138-40.

(6) Il volume molecolare del cloruro di calcio è ricavato dal valore più probabile della densità, quello del cloruro di cadmio dalle costanti della cella elementare date da L. PAULING (« Zeitschr. f. Kristall. », 74 (1930), p. 547) quelli dei rimanenti cloruri dalle costanti della cella calcolate da uno di noi e pubblicato in questi « Rendiconti » (6^a serie, VI (1927), p. 58 e IX (1929), p. 787).

CaCl ₂	vol. mol.	81.52 Å
CdCl ₂	» »	74.84 »
MnCl ₂	» »	68.05 »
MgCl ₂	» »	66.57 »
FeCl ₂	» »	64.65 »
CoCl ₂	» »	61.87 »

Il cloruro di calcio dà, malgrado la differenza di forma, soluzioni solide in ogni rapporto con i cloruri di cadmio⁽¹⁾ e di manganese⁽²⁾, mentre dà eutectico con i cloruri di ferro⁽³⁾, di cobalto⁽³⁾, e di magnesio⁽⁴⁾ rispetto ai quali ha un volume molecolare assai più grande. Le soluzioni solide fra il cloruro di calcio e i cloruri di cadmio e di manganese si scindono a bassa temperatura, e a temperature tanto più elevate quanto più grande è la differenza del volume molecolare dei due composti. Questo risultato, che era sfuggito ai precedenti sperimentatori, è stato trovato termicamente da noi dopo che la forma cristallina di questi tre cloruri ci aveva fatto ritenere poco probabile una miscibilità in ogni proporzione almeno a bassa temperatura.

Il cloruro di stronzio è cubico tipo CaF₂⁽⁵⁾, la sua struttura cristallina è quindi diversa da quella dei cloruri romboedrici (CdCl₂, MnCl₂, FeCl₂, CoCl₂, NiCl₂, MgCl₂), inoltre il suo volume molecolare (84.30) è assai più grande, per cui era da prevedersi una mancanza di miscibilità nelle coppie formate dal cloruro di stronzio coi cloruri romboedrici. Tre di esse erano state già studiate ed avevano infatti mostrato la mancanza di miscibilità come vuole la diversità della struttura cristallina:

SrCl ₂ —CdCl ₂	eutectico alla temperatura di 502° e con 47 % di SrCl ₂ ⁽⁶⁾ .			
SrCl ₂ —MnCl ₂	»	»	»	499° » » 55 % » SrCl ₂ ⁽⁷⁾
SrCl ₂ —MgCl ₂	»	»	»	535° » » 45 % » SrCl ₂ ⁽⁸⁾

(1) O. MENGE, « Zeitschr. f. anorg. Chem. », 72 (1911), p. 213; SANDONNINI « Gazz. Chim. Ital. », XLIV (1914), p. 338; A. FERRARI e A. INGANNI, questi « Rendiconti », 6^a serie, X (1929), pp. 253-58.

(2) C. SANDONNINI, « Gazz. Chim. Ital. », XLIV (1914), p. 341, e A. FERRARI e A. INGANNI, loc. cit., pp. 253-58.

(3) A. FERRARI e A. INGANNI, questi « Rendiconti », 6^a serie, X (1929), pp. 253-58.

(4) O. MENGE, « Zeitschr. f. anorg. Chem. », 72 (1911), p. 164.

(5) H. MARK e S. TOLSKSDORF, « Zeitschr. f. Phys. », 33 (1925), pp. 681-87, e H. OTT, « Zeitschr. f. Krist. », 63 (1926), pp. 222-35.

(6) C. SANDONNINI, questi « Rendiconti », 5^a serie, XX (1911), p. 646.

(7) IB., loc. cit.

(8) IB., questi « Rendiconti », 5^a serie, XI (1912), pp. 634-40.

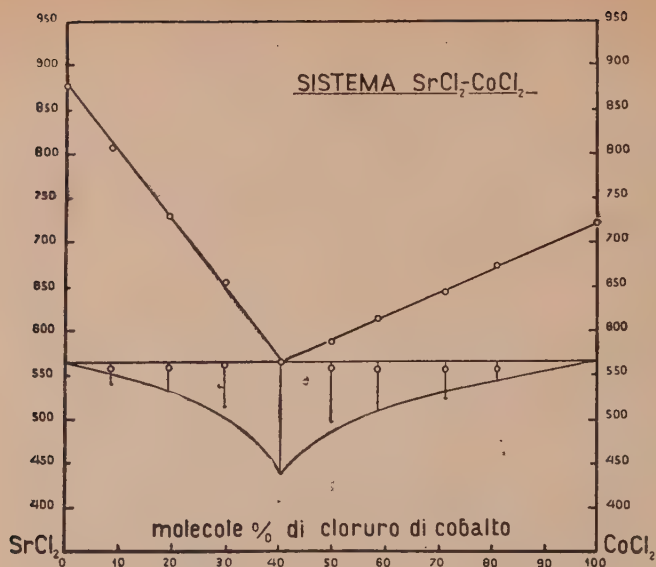


Fig. 1.

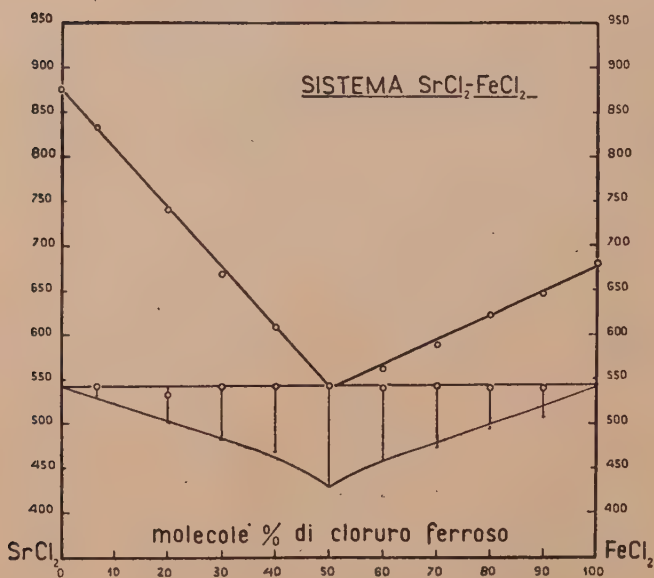


Fig. 2.

Le coppie formate dal cloruro di stronzio coi cloruri di ferro e di cobalto non erano state fino ad ora studiate. L'esame di questi sistemi, di cui riferiamo nel presente lavoro, conferma la mancanza di miscibilità prevista in base alla struttura cristallina dei componenti.

L'esame è stato condotto in modo perfettamente analogo a quello dei sistemi che fanno oggetto delle precedenti Note di questo studio, per cui rinviando ad esse per quanto si riferisce al metodo sperimentale limitandoci a riassumere nella seguente tabella i dati sperimentali ed a rappresentarli graficamente nei diagrammi delle figure 1 e 2.

Sistema $\text{SrCl}_2\text{—CoCl}_2$				Sistema $\text{SrCl}_2\text{—FeCl}_2$			
Molecole % di SrCl_2	Tempera- tura della cristalliz- zazione primaria	Tempera- tura della cristalliz- zazione eutectica	Durata arresto eutectico in secondi	Molecole % di SrCl_2	Tempera- tura della cristalliz- zazione primaria	Tempera- tura della cristalliz- zazione eutectica	Durata arresto eutectico in secondi
100	877°	—	—	100	877°	—	—
91.6	808	557°	180	93.5	814	542°	90
80.6	730	559	300	80	740	538	315
69.9	658	561	360	70	669	542	450
59.5	564	564	975	60	608	542	540
50.1	587	557	510	50	541	541	840
41.2	613	556	390	40	562	539	645
28.5	644	556	330	30	587	540	525
18.9	674	556	165	20	622	540	375
0	722	—	—	10	646	540	300
				0	680	—	—

Mentre il comportamento di questi sistemi è perfettamente in accordo colla loro struttura cristallina le coppie formate dai cloruri bivalenti tipo « MgCl_2 » col cloruro di zinco presentano un comportamento che non si interpreta chiaramente come conseguenza della struttura cristallina dei componenti.

La forma cristallina del cloruro di zinco non è conosciuta con sicurezza. L'esame di questo composto coi raggi X fatto da uno di noi in collaborazione con G. Bruni⁽¹⁾ mostrerebbe come probabile una struttura romboedrica tipo « MgCl_2 ». La estrema igroscopicità del cloruro di zinco non ha però permesso di ottenere fotogrammi tali da togliere qualsiasi incertezza a proposito di questo risultato. Pauling ha pure affermato recentemente⁽²⁾ che il cloruro di zinco è romboedrico, ma non sappiamo se

(1) Questi « Rendiconti », 6ª serie, IV (1926), pp. 10-13.

(2) « Pr. Nat. Accad. Washington », 15 (1929), p. 709.

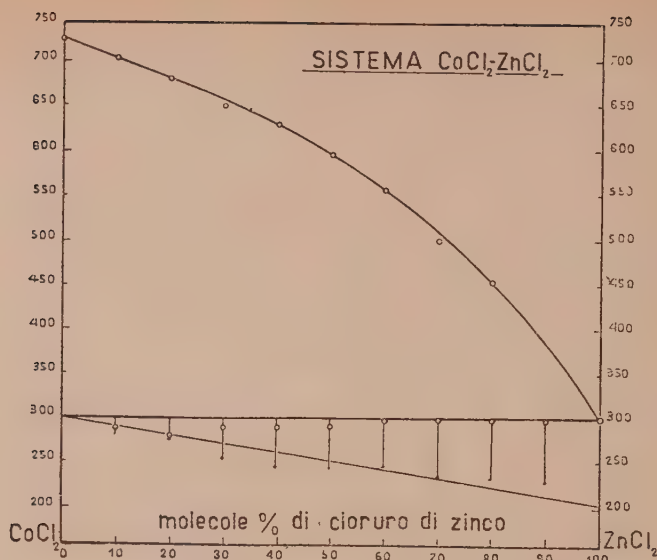


Fig. 3.

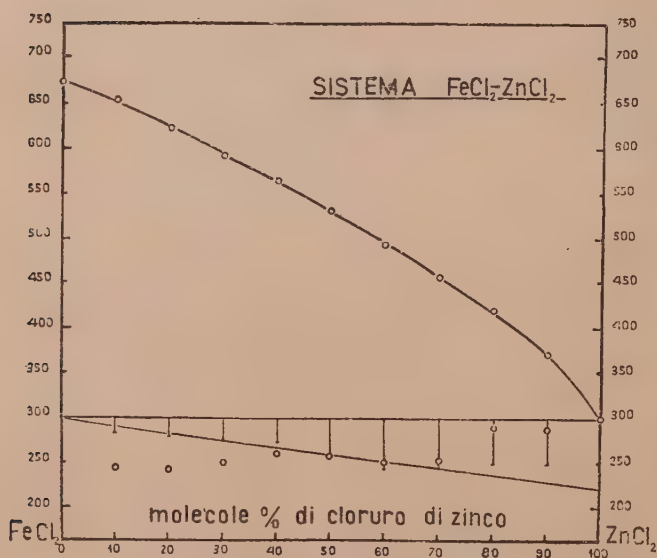


Fig. 4.

questo derivi da osservazioni personali oppure rifletta il citato lavoro di uno di noi.

Se la struttura del cloruro di zinco fosse del tipo « MgCl_2 » ci si dovrebbe attendere una miscibilità completa allo stato solido coi cloruri di cad-

mio, manganese, ferro, cobalto e magnesio che presentano la stessa struttura. Questa supposizione è però smentita dallo studio, che era già stato fatto, delle coppie $\text{ZnCl}_2\text{—CdCl}_2$ ⁽¹⁾, $\text{ZnCl}_2\text{—MnCl}_2$ ⁽²⁾ e $\text{ZnCl}_2\text{—MgCl}_2$ ⁽³⁾ ed aveva ritrovato in tutti questi sistemi l'esistenza di un eutectico alla temperatura di fusione del cloruro di zinco e nelle proporzioni di 100 % di ZnCl_2 . Manca quindi nel modo più completo la miscibilità fra il cloruro di zinco e quelli romboedrici tipo « MgCl_2 ». Questo risultato ci fa pensare che il cloruro di zinco non sia romboedrico, ma anche se il cloruro di zinco avesse una forma cristallina diversa da quella degli altri cloruri bivalenti, risulta pur sempre singolare questa completa mancanza di miscibilità anche ad alta temperatura, se si pensa che il volume molecolare del cloruro di zinco (73.05) è assai vicino a quello di questi cloruri ed in modo particolare a quello dei cloruri di magnesio e di manganese.

Abbiamo creduto utile esaminare anche le coppie $\text{ZnCl}_2\text{—CoCl}_2$ e $\text{ZnCl}_2\text{—FeCl}_2$ che mancavano a completare il quadro dei sistemi fra il cloruro di zinco ed i cloruri bivalenti sicuramente romboedrici. I risultati di questa ricerca, condotta nel solito modo e riassunti nella tabella II e nelle fig. 3 e 4, non hanno portato a chiarire il problema precedente perchè hanno riscontrato come nel caso delle altre tre coppie un eutectico con 100 % di ZnCl_2 alla temperatura di fusione del cloruro di zinco.

Sul punto di fusione del cloruro di zinco si hanno valori dei diversi autori molto discordanti (variabili da 250° a 365°) ⁽⁴⁾ la ragione di questi valori discordi starebbe nella difficoltà di preparare cloruro di zinco completamente anidro e neutro.

Il cloruro di zinco che abbiamo usato per le nostre ricerche (ottenuto per disidratazione in corrente di acido cloridrico gassoso dal sale della ditta Erba) ha dato un punto di fusione di 300° ed all'analisi i seguenti risultati:

	trovato	calcolato
Zn	47.96 %	47.96 %
Cl	51.87 »	52.04 »

Il nostro punto di fusione è quindi notevolmente più basso del massimo trovato.

(1) HERRMANN, « Zeitschr. f. anorg. Chem. », 71 (1911), p. 280.

(2) C. SANDONNINI, questi « Rendiconti », 5^a serie, XXI (1912), p. 529.

(3) MENGE, « Zeitschr. f. anorg. Chem. », 72 (1911), p. 190.

(4) GELINS, *Handb. anorg. Chemie*, 8° Auf. « Zink », p. 160.

Sistema $\text{ZnCl}_2\text{—CoCl}_2$				Sistema $\text{ZnCl}_2\text{—FeCl}_2$			
Molecole % di ZnCl_2	Tempera- tura delle cristalliz- zazione primaria	Tempera- tura arresto eutectico	Durata arresto eutectico in secondi	Molecole % di ZnCl_2	Tempera- tura della cristalliz- zazione primaria	Tempera- tura arresto eutectico	Durata arresto eutectico in secondi
100	300°	—	—	100	300°	—	—
90	—	300°	495	90	370	286°	360
80	452	300	495	80	420	290	345
70	500	300	450	70	456	256	420
60	558	299	405	60	492	250	420
50	598	292	360	50	530	250	330
40	630	289	420	40	560	253	210
30	650	290	330	30	591	255	160
20	680	281	180	20	621	250	150
10	700	290	150	10	650	252	90
0	725	—	—	0	673	—	—

Ringraziamo la sig.^{na} Colla laureanda nel nostro istituto per la collaborazione alla parte sperimentale dei sistemi col cloruro di zinco.

RIASSUMENDO: Col metodo dell'analisi termica dimostriamo che allo stato solido il cloruro di stronzio non è miscibile in nessun rapporto coi cloruri di cobalto e di ferro bivalenti. Il sistema $\text{SrCl}_2\text{—CoCl}_2$ dà un eutectico alla temperatura di 564° corrispondente alla composizione 59.5 di SrCl_2 , 40.5 di CoCl_2 ; quello $\text{SrCl}_2\text{—FeCl}_2$ alla temperatura di 541° con rapporti equimolecolari dei due cloruri.

La mancanza di miscibilità in queste due coppie è perfettamente in accordo con la mancanza di analogia cristallografica tra i componenti.

Sempre col metodo dell'analisi termica abbiamo studiato pure i sistemi $\text{ZnCl}_2\text{—CoCl}_2$ e $\text{ZnCl}_2\text{—FeCl}_2$ in essi abbiamo trovato una completa mancanza di miscibilità allo stato solido con un eutectico assai vicino alla temperatura di fusione del cloruro di zinco (300°). Questo risultato corrisponde a quanto hanno osservato altri autori nei sistemi formati dal cloruro di zinco con gli altri cloruri bivalenti romboedrici tipo « MgCl_2 » ma non si spiega colla struttura cristallina. Infatti se la forma del cloruro di zinco fosse romboedrica tipo « MgCl_2 », come lascerebbe ritenere un fotogramma di Debye-Scherrer calcolato da G. Bruni e A. Ferrari, il cloruro di zinco dovrebbe essere miscibile in ogni rapporto coi cloruri di cadmio, di manganese, di magnesio di ferro e di cobalto.

La completa interpretazione di questa contraddizione è resa difficile dalla estrema deliquescenza del cloruro di zinco, che rende difficile da un lato lo studio della forma cristallina; col non permettere l'applicazione di metodi assai sicuri quale quello di Laue, dall'altro facilita la formazione di ossicloruro di zinco che se fosse presente in quantità notevole falserebbe l'interpretazione dei risultati dell'analisi termica.

Chimica (Chimica-fisica). — *Metodo di calcolo per esperienze su la distillazione* ⁽¹⁾. Nota di G. BOZZA, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. CAMBI.

È noto il metodo di Rosanoff, Bacon e White ⁽³⁾ per la determinazione della composizione del vapore in equilibrio con una data miscela binaria o ternaria. Esso può essere impiegato con una esattezza sufficiente e senza richiedere speciale abilità, a differenza dei noti procedimenti di Zawidzki ⁽⁴⁾ o di Rosanoff, Lamb e Breithut ⁽⁵⁾ a temperatura costante, e di Rosanoff e Easley ⁽⁶⁾ a pressione costante, anche se la quantità di miscela che si può usare è relativamente piccola.

Il principio del metodo consiste nell'eseguire una distillazione della miscela in esame senza provocare condensazioni parziali del vapore che man mano si forma e che viene sottratto continuamente, e nel raccogliere separatamente, in modo da poterle pesare ed analizzare, le successive frazioni della distillazione. Nel procedimento di calcolo proposto da Rosanoff si opera per extrapolazione ad una quantità infinitesima iniziale di distillato, determinando così la composizione del primo vapore uscente dalla miscela presa in esame. E analogamente, determinando la composizione del residuo nel recipiente di distillazione, si può risalire per extrapolazione alla composizione di un vapore in equilibrio con un liquido della composizione del residuo stesso. Considerazioni analoghe possono condurre a ricavare, però con sempre minore attendibilità, composizioni intermedie fra le due sopra indicate.

Avendo avuto occasione di impiegare il dispositivo sperimentale di Rosanoff, Bacon e White per la determinazione della composizione dei vapori in equilibrio con soluzioni acquose di cloridrina etilenica ⁽⁷⁾, e avendo riscontrato alcuni inconvenienti nel procedimento di calcolo indicato, ho

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 21 dicembre 1930.

(3) « J. Am. chem. Soc. », 36, 1803, 1914; ELLIOTT, *Distillation Principles*, Londra 1925, p. 95; ROSANOFF e BACON, « J. Am. chem. Soc. », 37, 301, 1915.

(4) « Zeitschrift phys. Chemie », 35, 129, 1900.

(5) « J. Am. chem. Soc. », 31, 448, 1909; « Z. phys. Chem. », 66, 349, 1909.

(6) « J. Am. chem. Soc. », 31, 968, 1909; « Z. phys. Chem. », 68, 641, 1909.

(7) Le esperienze sono in corso di pubblicazione.

elaborato un altro metodo che viene qui successivamente esposto e che può presentare un certo interesse anche per altre considerazioni.

L'extrapolazione è sempre un procedimento pericoloso, in quanto il risultato di essa è, come nel caso nostro, dipendente in gran parte dalla esattezza di posizione dell'ultimo punto sperimentale oltre il quale si procede extrapolando; ed è precisamente questo punto, il quale corrisponde alla prima frazione raccolta, che è inevitabilmente il più incerto di tutta la distillazione: durante la prima frazione si ha l'inizio dell'ebollizione e quindi della distillazione, si raccolgono tutte le eventuali possibili tracce di sostanze estranee contenute nell'apparecchio, ecc.; mentre le frazioni successive sono ottenute in condizioni meno variabili di funzionamento. Un errore piccolo nella composizione di essa provoca, nella extrapolazione, un errore molto più grande nella composizione cercata del vapore iniziale. Nè, fra una distillazione e l'altra, si ha facilità di controllo reciproco, poichè ciascuna dà origine a un punto o a pochi punti anche notevolmente distanziati. Nel caso in esame poi, data l'idrolizzabilità della cloridina etilenica a temperature moderatamente alte, non si può dare affidamento all'analisi del residuo, eseguita per via refrattometrica, perchè in esso si accumulano, sia pure in piccola quantità, acido cloridrico e glicol etilenico: scompare quindi la possibilità della determinazione di un ulteriore punto con la seconda extrapolazione di Rosanoff.

Queste considerazioni mi hanno condotto al procedimento seguente. Sia una miscela binaria qualunque, i componenti della quale siano A_1 e A_2 (sia A_1 il più volatile); e siano $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ le frazioni rispettive in peso nel liquido, $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$ quelle nel vapore in equilibrio⁽¹⁾; per evitare calcoli sui dati sperimentali, conviene sempre riferirsi alle composizioni in peso. Si indichi con L il peso di liquido esistente in un dato istante nella caldaia di distillazione. La condensazione avvenga immediata e totale, senza riflusso di condensato nella caldaia (tutto il vapore cioè divenga immediatamente prodotto distillato). Siano $x_1^{(D)}$, $x_2^{(D)}$ le frazioni in peso dei due componenti nel distillato ad un dato istante, essendo contemporaneamente D il peso del distillato stesso.

Si parta da un peso iniziale di miscela L_0 , e in esso sia contenuto il peso complessivo $X_1^{(1)}$ della sostanza A_1 . Se si indica con $X_1^{(1)}$ la quantità totale di A_1 nel liquido residuo, con $X_1^{(D)}$ quella nella porzione distillata ad un dato istante, si deve avere

$$(1) \quad X_1^{(1)} = x_1^{(1)} \cdot L$$

(1) Si impiegano qui i doppi indici in conformità alla notazione di Gibbs per i sistemi polifasici: l'indice inferiore indica il componente, quello superiore la fase alla quale ci si riferisce. Nella notazione ordinaria invece la frazione del componente più volatile nel liquido si indica con x , nel vapore con y .

$$(2) \quad X_i^{(D)} = x_i^{(D)} \cdot D.$$

Se si distilla una quantità dD (ed è anche $dD = -dL$), l'incremento della quantità di A_i nel distillato sarà

$$(3) \quad x_i^{(2)} \cdot dD = dX_i^{(D)}$$

da cui $x_i^{(2)} = \frac{dX_i^{(D)}}{dD}$, o anche $x_i^{(2)} = \frac{dX_i^{(1)}}{dL}$, perchè $dX_i^{(1)} = -dX_i^{(D)}$.

Si hanno perciò contemporaneamente le relazioni

$$(4) \quad x_i^{(1)} = \frac{X_i^{(1)}}{L} = \frac{X_{i_0}^{(1)} - X_i^{(D)}}{L_0 - D}$$

$$(5) \quad x_i^{(D)} = \frac{X_i^{(D)}}{D}$$

$$(6) \quad x_i^{(2)} = \frac{dX_i^{(D)}}{dD} = \frac{dX_i^{(1)}}{dL} = -\frac{dX_i^{(1)}}{dD}$$

(osservando che $L = L_0 - D$ e $X_i^{(1)} = X_{i_0}^{(1)} - X_i^{(D)}$), che si possono agevolmente interpretare: si tracci un diagramma che abbia per ascisse la quantità di distillato D e per ordinate $X_i^{(D)}$, ossia la quantità totale di sostanza più volatile distillata. La linea rappresentativa della distillazione partirà dall'origine e terminerà, quando si immagini tutto il liquido distillato, ad un'ascissa $D = L_0$ e ad un'ordinata $X_i^{(D)} = X_{i_0}^{(1)}$, ad es. al punto B . Si fissi su questa linea un punto qualunque C ; si traccino la secante BC , la corda CO , la tangente in C , CH . Si ha immediatamente

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CS}{SB} = \frac{NQ}{MR} = \frac{OQ - ON}{OR - OM} = \frac{X_{i_0}^{(1)} - X_i^{(D)}}{L_0 - D} = x_i^{(1)}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dX_i^{(D)}}{dD} = x_i^{(2)}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{CM}{OM} = \frac{X_i^{(D)}}{D} = x_i^{(D)}$$

ossia

$\operatorname{tg} \alpha = x_i^{(1)}$ dà la composizione del liquido ad un dato istante;

$\operatorname{tg} \beta = x_i^{(2)}$ dà la composizione del vapore in equilibrio con il liquido suddetto;

$\operatorname{tg} \gamma = x_i^{(D)}$ dà la composizione del distillato totale ottenuto fino all'istante considerato.

Il tracciamento della curva rappresentativa della distillazione OCB si eseguisce per punti sui dati dell'esperienza raccolti secondo il procedimento

O' corrisponde all'origine O e T' all'ultimo punto sperimentale, T , della figura precedente (1).

Il tratto da T' a B' corrisponde a quello TB , che può essere tracciato solo approssimativamente. Ma nel punto B , quando non si ha che una quantità infinitesima di liquido, la composizione del vapore è uguale a quella del liquido (l'ultima traccia passa integralmente da liquido a vapore); a seconda perciò che il liquido residuo nella caldaia sia il componente meno volatile puro o una miscela a punto di ebollizione costante, la tangente alla curva in B dovrà essere orizzontale o inclinata corrispondentemente alla composizione della detta miscela azeotropica.

Quando si hanno diverse distillazioni su composizioni differenti, è con questo procedimento facile il confronto e l'analisi critica reciproca delle stesse. Si abbiano ad esempio due distillazioni, partenti da quantità totali di liquido OR_1 e OR_2 e da quantità di più volatile iniziali OQ_1 , OQ_2 (fig. 3).

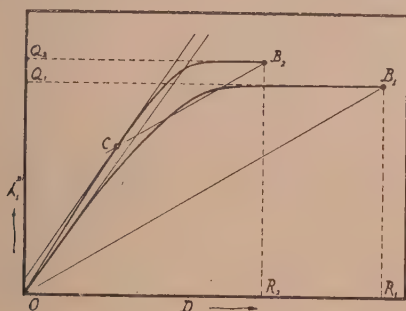


Fig. 3.

Le curve rappresentative della distillazione siano OB_1 e OB_2 . Si vede agevolmente che, se B_2C è parallela a B_1O , la tangente nel punto C deve essere parallela alla tangente in O alla OB_1 , e che il tratto di curva CB_2 deve essere simile al tratto OB_1 e similmente posto. È sufficiente allora che la distillazione 2 abbia un punto sperimentale vicino a C perchè le due esperienze si completino e si confrontino reciprocamente.

L'incertezza stessa offerta dal primo punto sperimentale di ciascuna distillazione viene quindi diminuita, e analogamente diminuita la difficoltà del tracciamento della tangente in un'estremità (l'origine) della curva.

Questo procedimento di calcolo sfrutta perciò pienamente, in confronto a quello proposto da Rosanoff, le possibilità offerte dal materiale sperimentale: esso fornisce un tratto di curva anzichè un punto isolato e dà la pos-

(1) Per via grafica, con procedimenti ben noti, si potrebbe ottenere direttamente tale diagramma, eliminando il parametro D . Nelle figg. 1 e 2 le curve corrispondono alla distillazione di miscele acetone-toluolo: g. 200 della miscela a 50% di acetone. Dati di Rosanoff (cit.).

sibilità di controllo fra un'esperienza ed un'altra. Esso dimostra anche come la sensibilità del metodo diminuisce man mano che la distillazione procede, cioè man mano che diventa minore la quantità del liquido nella caldaia, come del resto è ovvio.

A completamento di quanto sopra, è facile ricavare le relazioni che esistono fra la curva rappresentativa della distillazione qui introdotta e le composizioni del liquido e del vapore in equilibrio. Supposte note, anche solo graficamente, queste ultime, si può cioè facilmente risalire alla detta curva, ossia alla quantità di più volatile che è stata distillata quando si è raccolta una quantità D di condensato, nelle condizioni di non riflusso su indicate, partendo da una quantità L_0 di miscela di data composizione. L'espressione analitica che qui si ottiene può avere, come è ovvio, importanza anche pratica.

Basta ricordare che

$$dX_i^{(D)} = x_i^{(2)} dD$$

$$X_i^{(D)} = X_{i0}^{(1)} - x_i^{(1)} (L_0 - D). \quad (\text{dalla (4)})$$

Differenziando la seconda, $dX_i^{(D)} = -(L_0 - D) dx_i^{(1)} + x_i^{(1)} dD$, eliminando $dX_i^{(D)}$ fra questa e la prima delle (6), si ottiene

$$(7) \quad \frac{dD}{L_0 - D} = - \frac{dx_i^{(1)}}{x_i^{(2)} - x_i^{(1)}}.$$

Analogamente, eliminando dD e D fra le tre relazioni, si ottiene

$$(8) \quad \frac{dX_i^{(D)}}{X_{i0}^{(1)} - X_i^{(D)}} = - \frac{x_i^{(2)} dx_i^{(1)}}{x_i^{(1)} (x_i^{(2)} - x_i^{(1)})}.$$

L'integrazione e la limitazione delle due espressioni ricavate fornisce

$$(9) \quad \ln \left(1 - \frac{D}{L_0} \right) = \int_{\frac{X_{i0}^{(1)}}{L_0}}^{x_i^{(1)}} \frac{dx_i^{(1)}}{x_i^{(2)} - x_i^{(1)}}$$

$$(10) \quad \ln \left(1 - \frac{X_i^{(D)}}{X_{i0}^{(1)}} \right) = \int_{\frac{X_{i0}^{(1)}}{L_0}}^{x_i^{(1)}} \frac{x_i^{(2)} dx_i^{(1)}}{x_i^{(1)} (x_i^{(2)} - x_i^{(1)})}$$

che sono le equazioni parametriche, nel parametro $x_1^{(1)}$ (si ricordi che $x_1^{(2)}$ è in questo caso funzione nota di $x_1^{(1)}$), delle ascisse D e delle ordinate $X_1^{(D)}$. L'eliminazione di $x_1^{(1)}$, se possibile, fornisce l'equazione della curva caratteristica della distillazione ⁽¹⁾.

Chimica. — *Prodotti di condensazione tra glucosio e p-toluidina.* Nota di M. AMADORI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia (Paleobotanica). — *Su di un nuovo genere di Coralinea fossile dell'oligocene ligure* ⁽²⁾. Nota di M. AIROLDI, presentata ⁽³⁾ dal Corrisp. G. ROVERETO.

Il Direttore dell'Istituto Geologico della R. Università di Genova, ha voluto gentilmente affidarmi lo studio di una collezione di alghe calcaree fossili, da lui per la massima parte raccolte nell'oligocene ligure. Questo studio, oramai quasi ultimato, mi permetterà di pervenire a delle conclusioni, che varranno a modificarne notevolmente altre che la LÉMOINE ⁽⁴⁾ credette di potere trarre dalla da lei eseguita revisione della collezione studiata dal CAPEDER ⁽⁵⁾. Infatti posso fin d'ora asserire che il genere *Archaeolithothamnium* è presente con più di una specie nell'oligocene della nostra regione, che pure è presente il sottogenere epifita *Lithoporella* o *Mastophora*, già descritto per il terziario della Nuova Guinea (Foslie), per l'oligocene del canale di Panama (M. Howe), per l'eocene e il neogene di Catalogna (M.me Pfender; M.me LÉMOINE), e per l'eocene superiore dell'alta Savoia e per il Miocene dell'Algeria (M.me LÉMOINE), ma che finora non era stato segnalato nel terziario dell'Italia. I generi *Archaeolithothamnium*, *Lithothamnium* e *Lithophyllum*, sono rappresentati da parecchie specie, alcune delle quali sono nuove, ed altre sono tali per il nostro paese. Le specie, tutte di mare caldo, mi pare presentino delle affinità con alcune del nummulitico di Catalogna, ed anche con quelle dell'oligocene del canale di Panama.

(1) La prima delle due equazioni parametriche coincide con la nota equazione di Lord RAYLEIGH (« Phil. Mag. », 1904, p. 534) per la distillazione semplice.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Genova.

(3) Nella seduta del 7 dicembre 1930.

(4) M.me P. LÉMOINE, *Revision des Mèlobésiées tertiaires d'Italie décrites par M. Capeder*. « C. R. du Congrès des Sociétés Savantes en 1925, Paris ».

(5) G. CAPEDER, *Contribuzione allo studio dei lithothamnium terziari*; « Malpighia », anno XIV, vol. XIV, 1900, pp. 172-182, tav. VI.

Ma il principale oggetto di questa nota vuole essere la descrizione di un esemplare che mi appare per la sua struttura assai notevolmente differente dalle corallinacee fossili finora descritte.

Gli esemplari da me studiati portano l'indicazione generica di Sassello quale luogo d'origine: con tutta probabilità appartennero alle incrostazioni dei frangenti corallini di Sassello, i quali secondo il Rovereto, sono san-noisiani ⁽¹⁾.

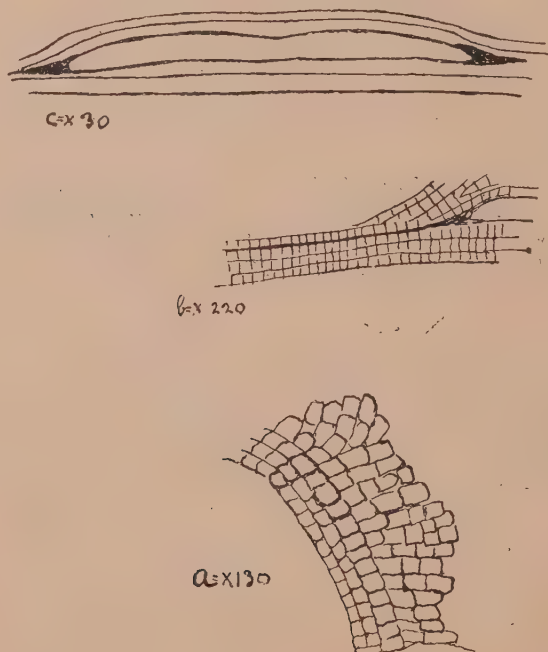


Fig. 1. — *a* = particolare dell'ipotallo. *b* = particolare del peritallo presso un concettacolo. *c* = concettacolo e linee di accrescimento del peritallo.

Si tratta di una specie crostosa, di uno spessore superiore al centimetro, a superficie irregolare, con ampie intumescenze poco rilevate. All'esame microscopico le sezioni risultano composte da uno o due talli formati da un ipotallo basilare e da un peritallo, i due bene sviluppati; lo spessore del primo può variare tra i 100 e i 320 μ ; quello del peritallo può essere superiore ai 2 mm. Le cellule costituenti il peritallo sono di forma quasi quadrata, e misurano da 5 a 8 μ di larghezza, e da 5 a 12 μ di altezza; sono quindi leggermente più alte che larghe. Queste cellule sono disposte in serie orizzontali regolari e un poco ondulate; vi è pure la tendenza ad una disposi-

(1) G. ROVERETO, *Nuovi studi sulla stratigrafia e sulla fauna dell'oligocene ligure*. Genova, 1914.

zione in file verticali, ma i setti divisorii in senso orizzontale sono di maggiore spessore e più continui degli altri, così che la disposizione in serie orizzontali di maggiore evidenza. Le serie di cellule divaricano leggermente attorno ai concettacoli; una banda oscura segue lungo il tetto i concettacoli, e si prolunga ad unire quelli collocati allo stesso livello, così che il tessuto appare a linee oscure, continue.

Gli organi riproduttori sono assai bassi ed allungati: le dimensioni minori sono date da μ 570–650, per la lunghezza e da μ 65 per l'altezza; ma ne ho osservati alcuni di 1060 μ di lunghezza per 110 μ di altezza e di 1150 μ per 65 μ ; questi eccezionali concettacoli normalmente sono a pavimento rettilineo, e col tetto leggermente convesso, e con la parte mediana un poco depressa; altri invece presentano incurvato anche il pavimento, così da avere l'aspetto di una mezzaluna. Solo in uno dei numerosissimi osservati si scorge la traccia di un canale nel tetto.

Quanto all'ipotallo, come già ho accennato, esso può raggiungere un notevole spessore; le sue cellule rettangolari o leggermente trapezoidali, misurano da 18 μ a 40 μ di lunghezza per 8 μ 10 μ di larghezza; misure più frequenti 18 μ 20 μ per 8 μ 10 μ .

La struttura di questo tessuto è affatto particolare; alcune zone soprattutto, dove l'ipotallo è meno sviluppato, sono formate da file di cellule orizzontali, che si innalzano a costituire il peritallo nel modo che è caratteristico, secondo la Lemoine, del genere *Lithothamnium*; altre zone invece sono formate da serie concentriche di cellule; queste serie sono però asimmetriche, un poco oblique, e si prolungano alquanto sotto il peritallo, fino a determinare una serie orizzontale di cellule, che si confonderebbero con quelle del peritallo se non avessero maggiori dimensioni. Si tratta probabilmente di un modo di accrescimento del tallo per formazione di un ipotallo secondario, come è stato studiato dalla Lemoine sul vivente *Lithophyllum incrustans*; ma in questa specie l'ipotallo è nettamente tipico del genere, *Lithophyllum*, e quindi diverso da quello dell'alga oggetto di questo studio.

In base a queste osservazioni si può subito escludere che si tratti di una specie del genere *Archaeolithothamnium*; la disposizione del peritallo in serie orizzontali di cellule, la mancanza di numerosi canali nel tetto dei concettacoli, la compattezza delle file cellulari dell'ipotallo, mi impediscono di classificare l'alga nel genere *Lithothamnium*; per il genere *Lithophyllum*, la parentela mi appare più stretta, ma sono caratteri sufficienti per una distinzione, la mancanza della tipica struttura dell'ipotallo, le linee oscure del peritallo (caratteristiche del genere *Lithothamnium* secondo la Lemoine), e la forma allungatissima dei concettacoli.

Lo sviluppo dell'ipotallo, assai notevole, ed il fatto che nel peritallo non vi sono cellule di dimensioni maggiori di quelle formanti il resto del tessuto, fanno pure escludere la attribuzione al genere *Porolithon*.

Fra le specie fossili descritte dai varii autori una qualche rassomiglianza

nella dimensione delle cellule, e nello spessore dell'ipotallo, potrebbe trovarsi nel *Lithophyllum obliquum*, specie stabilita dalla Lemoine su un esemplare proveniente dal miocene della provincia di Granada ⁽¹⁾; ma questa specie ha un peritallo di poco spessore, ed inoltre non sono conosciuti i suoi organi di riproduzione, così numerosi e caratteristici per l'esemplare in esame.

Anche il *Lithothamnium caravallense* del miocene inferiore della Martinica ⁽²⁾ ricorda un poco la struttura da me descritta; ma ne differisce per le dimensioni delle cellule del peritallo, che sono maggiori, mentre la loro disposizione in serie orizzontali è assai meno regolare e caratteristica, e per i concettacoli che sono di forma nettamente diversa.

Fra le specie viventi trovo qualche somiglianza nella forma esterna, nel modo di accrescimento del tallo, e nelle dimensioni delle cellule, nel *Lithophyllum incrustans*, che però ne differisce nettamente per la minore regolarità del peritallo, e per la forma dei concettacoli.

Fatte queste osservazioni e confronti, mi pare di potere concludere, con l'ascrivere l'alga in esame a un genere nuovo, imparentato col genere *Lithophyllum*, e le cui caratteristiche consistono: nella struttura dell'ipotallo, a zone formate da file cellulari rampanti, alternate con altre in cui le cellule sono disposte in serie concentriche asimmetriche; nella forma estremamente allungata e depressa dei concettacoli. Ciò mi pare sufficiente a giustificare l'introduzione di un genere nuovo, benchè si possa obiettare, che trattandosi di un esemplare fossile, nel quale i concettacoli sono vuoti, manca un elemento tassonomico assai importante.

I caratteri della nuova specie sono per ora i seguenti: dimensioni delle cellule, in ispecie di quelle del peritallo più alte che larghe; struttura regolare di questo tessuto con serie cellulari orizzontali e presenza di bande oscure.

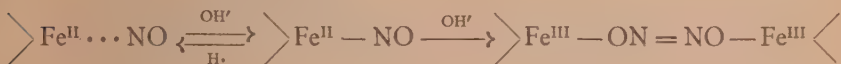
Dedico la specie al mio maestro prof. Rovereto e propongo quindi che venga adottato il nome di *Leptolithophyllum Roveretoi*.

(1) M.me P. LÉMOINE, *Contributions à l'étude des Corallinacées fossiles*; X. — *Les Mélobésiées recueillies par M. Viennot dans le Miocène de la province de Grenada*. «B. S. Géol. France», S. 4; t. XXIX, p. 272, pl. XXIV. Paris 1929.

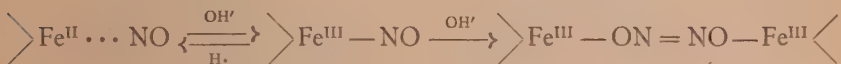
(2) M. P. LÉMOINE, *Corallinacées fossiles de la Martinique*. «B. S. Géol. France», S. 4; t. XVII, pp. 256-272. Paris 1917.

ERRATA-CORRIGE

Nella Nota: *Le reazioni fra composti ferrosi ed ossido d'azoto* del Corrispondente L. CAMBI e di A. CAGNASSO, a pag. 139 del vol. XI, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 2^o, in luogo di



deve leggersi



Nella Nota: *Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli* di GIULIO COTRONEI e ALDO SPIRITO, presentata dal Socio F. SILVESTRI, a pag. 428 del vol. XI, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 4^o, penultima riga: al posto di: « otica » leggere: « ottica ».

Nella Nota: *Su gli arilnitroso-ferro-pentacianuri: formazione dalle ari-
lidrossilammine e nitroprussiato* del Corrisp. L. CAMBI e di T. RICCI, a pagina 446 del vol. XI, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 5^o, alla seconda colonna della tabella, il terzo valore va corretto in 3.605.

Nella Nota: *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli* di GIULIO COTRONEI e ALDO SPIRITO, presentata dal Socio GIULIO FANO, a pag. 71 del vol. XII, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 1-2, settima riga, al posto di: « di Triton » leggere: « dello stesso Anuro ».

INDICE DEL VOLUME XII, SERIE VI. — RENDICONTI

1930

INDICE PER AUTORI

A

- AIROLDI M. — « Su di un nuovo genere di Corallinacea fossile dell'oligocene li-
gure ». 590, 681.
- AMADORI M. — « Prodotti di condensazione
tra glucosio e p-toluidina ». 681.
- AMANTE S. — « Risoluzione, nel campo delle
matrici complesse, di una qualsiasi equa-
zione analitica a coefficienti numerici ». 290.
- ID. — « Sulle matrici che soddisfano una
data equazione algebrica ». 363.
- ANDREOLI G. — « Pseudolimiti di funzioni,
pseudocontinuità ecc. ». 31.
- ID. — « Pseudo-integrali e pseudo-derivate ». 81.

B

- BARBA G. — « Parallelismo generalizza-
to ». 6.
- ID. — « Sulle geodetiche assolute delle su-
perficie a metrica indefinita ». 272.
- BARBARO L. — Vedi CORBELLINI A.
- BARBIERI G. A. — « Solfocianuri complessi
del molibdeno tetravalente ». 55.
- ID. — « Sulle reazioni cromatiche dei mo-
libden-otto-cianuri ». 148.
- BARONI A. — « Selenmercaptano metilico ». 234.
- BELLUIGI A. — « Ancora sulle caratteristiche
fisiche della pianura marginale appen-
ninica modenese ». 112.
- BERNSTEIN V. — « Sur l'ultraconvergence
(Ueberkonvergenz) de certaines séries
de Dirichlet ». 91.
- BEZZI S. — Vedi SANDONNINI C.
- BILANCINI R. — « Sul coefficiente di corre-
lazione ». 426.
- BOAGA G. — « Sopra alcune formule per
le correzioni topografiche nei rilievi
eötvössiani ». 109.
- BORTOLOTTI E. — « Sulle forme differen-
ziali quadratiche specializzate ». 541.
- ID. — « Calcolo assoluto rispetto a una
forma differenziale quadratica specializ-
zata ». 659.
- BOSSA E. — « Rettifica alla Nota su: "L'ef-
fetto 'Hall' per i metalli Ni, Fe e Cu
in campi magnetici deboli" ». 582.
- BOTTAZZI F. — Commemorazione del So-
cio Nazionale *Giulio Fano*. 484.
- BOULIGAND M. G. — « Expression générale
de la solidarité entre le problème du
minimum d'une intégrale et l'équation
correspondante d'Hamilton-Jacobi ». 27.
- ID. e RABATÉ G. — « Application de la
construction de Cantor-Minkowski à
l'analyse des ensembles discontinus ». 574, 654.
- BOZZA G. — « Sul funzionamento di alcuni
apparecchi ad insufflazione di gas ». 47, 136.
- ID. — « Metodo di calcolo per esperienze
su la distillazione ». 675.
- BRACALONI L. — « Curva idremica normale
(a digiuno) in diversi esercizi fisici di
breve durata ». 252.

- BRUNELLI G. — « Plancton monotono a rotiferi in un lago appenninico ad alta quota ». 65.
- ID. — « Sulla colonizzazione dei laghi artificiali ». 177.
- BRUNETTI R. e OLLANO Z. — « L'effetto Raman nell'acqua pura e in alcune soluzioni ». 444, 522.
- BURGATTI P. — « A proposito della Nota del dott. Manarini "Sulla curvatura media ecc." ». 625.

C

- CABRAS A. — « Moti rigidi negli spazi generalizzati ». 316.
- ID. — « Sulla meccanica dei corpi rigidi negli spazi generalizzati ». 416.
- CALDO L. — « Sulle prime vicende della riforma giuliana del calendario ». 104.
- CARATHÉODORY C. « Les transformations canoniques de glissement et leur application à l'optique géométrique ». 353.
- CASTELNUOVO G. — « L'Universo di de Sitter ». 263.
- ID. — Si associa alle parole dette dal Presidente e dal Socio BOTTAZZI per la morte del Socio *Giulio Fano*. 488.
- ID. — Commemora il Socio *Luigi Cremona*. 613, 619.
- CATTANEO D. — « Osservazioni sulla struttura del Vitreo ». 599.
- ID. — « Osservazioni sulla struttura del Vitreo (Memoria) ». 604.
- CATTANEO P. — « Sopra una classe di varietà cicliche ». 23.
- ČECH E. — « Encore sur le théorème de Cauchy ». 286.
- ID. — « Une démonstration du théorème de Jordan ». 386.
- CISOTTI U. — « Tensori quintupli emisotropi ». 195.
- CONFORTO F. — « Metrica e fondamenti di calcolo differenziale assoluto in uno spazio funzionale continuo ». 547.
- CORBELLINI A. e BARBARO L. — « Sulla decomposizione anomala del tetrazoderivato della 2,2'-diammina 1,1'-dinaffile ». 445.
- COTRONEI G. e GUARESCHI C. — « Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli (trapianti di abbozzi embrionali in organismi differenziati o adulti) ». 180.
- ID. e SPIRITO A. — « Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli ». 69.

D

- DAL PIAZ GIAMBATTISTA — « Nuovo genere e nuove specie di Artiodattili dell'oligocene veneto ». 61.
- DE FAZI R. e HEMMELER A. — « Reazione tra composti organici e minerali. - I. Solfuri naturali ed alcuni composti aciclici ». 583.
- DE FINETTI B. — « Le funzioni caratteristiche di legge istantanea ». 278.
- ID. — « Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità ». 367.
- DEI C. — « Sulla determinazione della tensione del vapore sul ghiaccio a temperature basse ». 119.
- DEL NUNZIO B. — « Ricerca di un analogo termico dell'effetto Barkhausen ». 125.
- DIONISI A. — Presenta la Memoria di D. Cattaneo: « Osservazioni sulla struttura del Vitreo ». 621.

E

- ENRIQUES F. — « Sopra le superficie algebriche trasformabili in rigate ». 3.

F

- FANTAPPIÉ L. — « I massimi e minimi dei funzionali analitici reali ». 296.
- FEDELE M. — « Sulla innervazione ed i dispositivi sensitivi periferici del tronco arterioso dei rettili ». 464.
- FERMI E. — « Sopra l'elettrodinamica quantistica ». 431.
- FERRARI A. e INGANNI A. — « Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. - VII. Analisi termica dei sistemi SrCl_2 —

- FeCl_2 , $\text{SrCl}_2\text{—CoCl}_2$, $\text{ZnCl}_2\text{—FeCl}_2$, $\text{ZnCl}_2\text{—CoCl}_2$ anidri». 668.
- FINIKOFF S. — «Sur les suites de M. Fubini». 41.
- ID. — «La congruence R ayant deux surfaces gauches pour les deux nappes de sa surface focale». 302.
- FINZI G. — «Tubercoline e anaesotubercoline». 605.
- ID. — «Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione isotropa». 631.
- FORTI C. — «Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia. Notizie storiche». 257.
- ID. — «Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia. Escisione totale o parziale e funzioni sessuali». 345.
- ID. — «Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia. Escisione totale o parziale e metabolismo». 477.
- FRESA A. — «Sulle variazioni di luce della variabile RZ Cassiopeae». 328.

G

- GALAMINI A. — «Variazione dei tassi alcolemico ed idremico in seguito a somministrazione di determinate dosi di alcool». 483.
- GALEA V. — Vedi OSTROGOVICH A.
- GARBASSO A. (Presidente). — Annuncia la morte del Socio Nazionale *Giulio Fano* e del Socio Straniero *Giovanni Hagen*. 488.
- ID. — Ringrazia il Socio BOTTAZZI per la bella commemorazione del defunto Socio *Giulio Fano*. 488.
- ID. — Comunica il ringraziamento che hanno inviato all'Accademia i nuovi Soci eletti. 488.
- ID. — Presenta un plico suggellato inviato dal sig. *Lucarini Luigi*. 489.
- ID. — Ringrazia i Soci CASTELNUOVO e GUIDI per quanto hanno detto in memoria di *Luigi Cremona* e dà lettura di un telegramma del Socio P. BOSELLI. 619.
- ID. — Presenta due plichi suggellati inviati rispettivamente dai signori *País* e *P. Pisa*. 620.
- GHIRON D. — Vedi LEVI G. R.
- GORINI C. — «Acidoproteoliti e termofili nella pastorizzazione del latte». 591.
- GRAFFI D. — «Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale». 129.
- ID. — «Alcune considerazioni sulla teoria della trasmissione del calore per convezione forzata». 229, 336.
- ID. — «Una osservazione sull'equazione del moto di un corpo di massa variabile». 575.
- GUARESCHI C. — Vedi COTRONEI G.
- GUGINO E. — «Sul problema dinamico di un qualsivoglia sistema vincolato ridotto all'analogo problema relativo ad un sistema libero». 307.
- ID. — «Sulla estensione del teorema del Morera al moto dei sistemi a legami reversibili». 401.
- GUIDI C. — Presenta in omaggio alcuni suoi opuscoli. 488.
- ID. — Si associa alle parole pronunciate dal Socio G. CASTELNUOVO per commemorare *Luigi Cremona*. 619.

H

- HEMMELE R. — Vedi DE FAZI R.
- HLAVATÝ V. — «Sulle coordinate geodetiche». 400, 502.
- ID. — «Sur la courbure des variétés non-holonomes». 509, 566.
- ID. — «Sur les courbes des variétés non-holonomes». 574, 647.

I

- INGANNI A. — Vedi FERRARI A.

J

- JUCCI C. — «Sul colore del bozzolo e' la migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta nella F_1 di incroci reciproci tra le razze di bachi (B. m.) Oro cinese, Gialla Indigena e Bianca Giapponese». 186.

K

- KOLMOGOROFF A. — «Sur la notion de la moyenne». 388.

- KRALL G. — « Problemi della dinamica del binario ». 223.
 ID. — « Velocità critiche di masse pesanti su di un binario ». 419, 510.

L

- LA ROSA M. e PETRUCCI G. — « Un circuito emittente treni d'onda discontinui ». 199.
 LEVI-CIVITA T. — « Sezioni piane di un corpo e direttrici ortobariche ». 535.
 LEVI G. R. e GHIRON D. — « Pile di ossidazione e riduzione di cloriti alcalini ». 158.
 LOMBARDINI M. — « Sul moto delle masse d'aria nell'atmosfera ». 114.
 LO SURDO A. (Accademico Segretario Aggiunto). — Presenta i libri giunti in dono all'Accademia segnalandone alcuni. 620.

M

- MAJORANA E. — « Sulla formazione dello ione molecolare di elio ». 583.
 MAMMANA G. — « Sopra un teorema fondamentale di Analisi ». 203.
 MANARINI M. — « Sulle linee di curvatura e sulle geodetiche di una superficie ». 36.
 ID. — « Sulle linee asintotiche sopra a una superficie ». 99.
 ID. — « Sulla curvatura media delle superficie e sugli operatori lungo una linea ». 639.
 MARCOLONGO R. — Presenta e illustra il II volume dell'Opera: « Analisi vettoriale generale - Geometria differenziale » a cura di P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali-Forti. 619.
 MASOTTI A. — « Vortice rettilineo in un canale a sponde piane parallele ». 321.
 ID. — « Calcolo della risultante e del momento risultante delle pressioni elettrostatiche, in un campo piano, con formule analoghe a quelle idrodinamiche del Blasius ». 439.
 ID. — « Il condensatore elettrico formato

- da un filo rettilineo fra due piani paralleli ». 519.
 MAZZUCHELLI A. — « Deposizione elettrolitica del cromo dal cromossalato ammonico ». 587.
 MEZZADROLI G. e VARETON E. — « Azione esercitata dal radio sulla germinazione dei semi ». 731.
 ID. e ID. — « Azione delle onde elettromagnetiche, ultracorte $\lambda = 2-3$ m., sui bachi da seta ». 173, 242.
 ID. e ID. — « Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m., sui bachi da seta. - Parte III: Irraggiamento del seme bachi prima della schiusura ». 461.
 ID. e ID. — « Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m., sull'amilasi ». 594.
 MITOLO M. — « La eccitabilità riflessa in funzione del pH ». 191.
 ID. — « Sul potere moderatore del tessuto nervoso centrale ». 246.
 ID. — « Ossigeno e funzioni centrali nervose ». 472.
 ID. — « Il ricambio materiale del sistema nervoso centrale. III: La eliminazione della colesterina totale ». 532.
 MORELLI M. — « Spettrochimica delle soluzioni di acido borico in glicerina ». 451.

N

- NASINI A. e NATTA G. — « La struttura cristallina dei gas inerti. Esame del Kripto ». 141.
 NASINI R. — « Scoperta dell'acido borico nella vernice dei vasi sigillati aretini ». 361.
 ID. — Presenta ed illustra il II volume di « Studi e ricerche sui combustibili ». 619.
 NASTA M. — « Contributo al calcolo delle velocità critiche degli alberi motori ». 209.
 NATTA G. — Vedi NASINI A.
 NICOLESCO M. — « Sulle funzioni metaarmoniche in n variabili ». 553.

O

- OBRECHKOFF N. — « Sur une généralisation de la sommation de Césaro ». 391.
 OCCHIALINI G. — « La misura fotografica della lunghezza delle righe spettrali ». 583.
 ODONE F. — « Rotazione e divergenza di un vettore; gradiente di un'omografia in coordinate curvilinee generali ». 11.
 OKHLOPKOVA E. — « Sur quelques problèmes aux limites de la théorie du potentiel logarithmique ». 400, 558.
 OLLANO Z. — Vedi BRUNETTI R.
 OSTROGOVICH e GALEA V. — « Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di due aralchil-amino-tiol-triazine ». 162.

P

- PACELLA G. B. — « Metodo semplice per il calcolo di una lente piano-convessa asferica ». 436.
 PALAZZO L. — Offre in omaggio una sua breve Nota. 489.
 PARRAVANO N. (Accademico Segretario). — Presenta le opere giunte in dono all'Accademia durante le ferie, segnalandone alcune. 489.
 PASTORI M. — « Ancora sulla derivazione parziale dei tensori ». 17.
 ID. — « Derivazione parziale dei tensori in relazione con la loro rappresentazione intrinseca e parzialmente intrinseca ». 85.
 ID. — « Sui tensori isotropi: relazione fra le componenti ». 374.
 ID. — « Espressione generale dei tensori isotropi ». 499.
 PELINI B. — « Tavola del potenziale di una lamina magnetica con orlo circolare ». 216.
 PELOSI L. — « Sulla curvatura media delle superficie ». 283.
 PERRI T. — « Sul comportamento dell'abbozzo oculare di Triton trapiantato in embrioni di Rana esculenta. (Processi di distruzione e potenza di ricupero) ». 66.
 PETRUCCI G. — Vedi LA ROSA M.

- PIAZZOLLA-BELOCH M. — « Sui multilateri sghembi connessi ». 380.
 PIERUCCI M. — « Sull'orbita del pianeta ultranettuniano ». 103.
 PIROTTA P. R. — Presenta l'opuscolo di G. Gabrieli: « Federico Cesi Linceo ». 620.
 PISTOLESI E. — « Le azioni dinamiche di una corrente circolatoria su profili cuspidati ». 409.
 POGGI L. — « Estensione del paradosso di D'Alembert e del teorema di Kutta-Joukowski ai profili ad arco di cerchio ». 404.
 PUNTONI V. — « Differenziamento morfologico di alcune specie di Attinomiceti confuse sotto la denominazione di "Actinomyces bovis" Harz ». 483, 529.

Q

- QUILICO A. — « Sull'ossidazione dei derivati propenilici con i diazocomposti ». 341.

R

- RABATÉ G. — « Sur quelques points de géométrie infinitésimale directe ». 395.
 ID. — vedi BOULIGAND G.
 RADU BADESCO M. — « Singularités des solutions d'une classe d'équations intégrales ». 96.
 RAFFAELE F. — Si associa alle parole dette dal Presidente e dal Socio BOTTAZZI per la morte del Socio Giulio Fano. 488.
 RANZI S. — « Condizioni determinanti lo sviluppo delle Branchie (Ricerche di embriologia sperimentale sui Cefalopodi) ». 468.
 RICHARD C. — « Di una peculiare asimmetria dei fiseteridi (asimmetria emapofisaria) e delle sue relazioni con l'asimmetria cranica ». 165.
 RODOLICO F. — « Pisoliti poliedrici di magnesite e di dolomite ». 457.
 ROLLA L. — « Ricerche per la concentrazione e l'isolamento dell'elemento di numero atomico 61 ». 270.

- RONCHI V. — «Sulla efficienza fotometrica e la luminosità degli strumenti ottici». 583, 663.
RUZ C. — «Gli Strofomenidi del Permiano del bacino del Sosio (Palermo)». 588.

S

- SACCO F. — Presenta in omaggio due sue Note. 620.
SAKELLARIOU N. — «Sur une classe de mouvements centrales». 514.
SANDONNINI C. e BEZZI S. — «Decomposizione catalitica dell'alcool cetilico». 154.
SANI G. — «Ricerche intorno all'Oleostene. (Idrocarburo contenuto nel frutto d'Olivo)». 238.
SBRANA F. — «Sull'applicazione del calcolo degli operatori funzionali alla riduzione di equazioni integrali di Volterra». 574.
SEGRÉ E. — «Sull'effetto Raman dell'acetilene». 226.
SIGNORINI A. — «Sulle deformazioni finite dei sistemi continui». 312.
ID. — «Sulla meccanica dei sistemi continui». 411.
ID. — «Sul profilo delle pile da ponte». 579.
SPECCHIA O. — «Effetto Raman e polimerizzazione dell'acqua a varie temperature». 583, 659.

- SPIRITO A. — «Di alcune esperienze di innesti di più estese parti embrionali tra Anuri e Urodeli». 183.
ID. — Vedi COTRONEI G.

T

- TIMPANARO SEB. — «Onde e corpuscoli». 334.

V

- VARETON E. — Vedi MEZZADROLI G.
VERCELLI F. — «Osservazioni complementari sulla mia Nota: "Metodo generale per l'analisi delle periodicità nei diagrammi statistici e sperimentali"». 351.
VOLTERRA E. — «Sulle vibrazioni dei sistemi reticolari elastici e sul colpo d'ariete nelle condotte multiple». 420.
ID. — «Perturbazione prodotta da più sfere rigide in un mezzo elastico in equilibrio». 659.
VOLTERRA V., a nome anche del Corrisp. G. GIORGI, presenta la Memoria di F. Sbrana: «Sull'applicazione del calcolo degli operatori funzionali alla riduzione di equazioni integrali di Volterra». 620.

W

- WUNDHEILER A. — «Une simple démonstration de la formule de l'écart géodésique». 574, 644.

INDICE PER MATERIE

A

- Astronomia.** — «Sull'orbita del pianeta ultranettuniano». PIERUCCI M. 103.
— «Sulle prime vicende della riforma giuliana del calendario». CALDO L. 104.
— «Sulle variazioni di luce della variabile RZ Cassiopejæ». FRESA A. 328.

B

- Biologia.** — «Plancton monotono a rotiferi in un lago appenninico ad alta quota». BRUNELLI G. 65.
— «Sul comportamento dell'abbozzo oculare di Triton trapiantato in embrioni di Rana esculenta. (Processi di distruzione e potenza di ricupero)». PERRI T. 66.
— «Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli». COTRONEI G. e SPIRITO A. 69.
— «Azione esercitata dal radio sulla germinazione dei semi». MEZZADROLI G. e VARETON E. 73.
— «Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m., sui bachi da seta». ID. e ID. 173, 242.
— «Sulla colonizzazione dei laghi artificiali». BRUNELLI G. 177.
— «Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli (trapianti di abbozzi embrionali in organismi differenziati o adulti)». COTRONEI G. e GUARESCHI C. 180.
— «Di alcune esperienze di innesti di più estese parti embrionali tra Anuri e Urodeli». SPIRITO A. 183.
— «Sul colore del bozzolo e la migrazione dei pigmenti dal sangue alla seta nella

F₁ di incroci reciproci tra le razze di bachi (B. m.) Oro cinese, Gialla Indigena e Bianca Giapponese». JUCCI C. 186.

- Biologia.** — «La eccitabilità riflessa in funzione del pH». MITOLO M. 191.
— «Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m., sui bachi da seta. Parte III. — Irraggiamento del seme bachi prima della schiusura». MEZZADROLI G. e VARETON E. 461.
— «Sulla innervazione ed i dispositivi sensitivi periferici del tronco arterioso dei rettili». FEDELE M. 464.
— «Condizioni determinanti lo sviluppo delle Branchie (Ricerche di embriologia sperimentale sui Cefalopodi)». RANZI S. 468.
— «Differenziamento morfologico di alcune specie di Actinomiceti confuse sotto la denominazione di «Actinomyces bovis» Harz». PUNTONI V. 483, 529.
— «Acidoproteoliti e termofili nella pastorizzazione del latte». GORINI C. 591.
— «Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2-3$ m. sull'amilasi». MEZZADROLI G. e VARETON E. 594.
— «Osservazioni sulla struttura del Vitreo». CATTANEO D. 599.
— «Osservazioni sulla struttura del Vitreo». (Memoria). ID. 604.
— «Tubercoline e anaesotubercoline». FINZI G. 605.

Bollettino bibliografico. — 491, 623.

C

- Chimica.** — «Solfocianuri complessi del molibdeno tetravalente». BARBIERI G. A. 55.

Chimica. — «La struttura cristallina dei gas inerti. Esame del Kripto». NASINI A. e NATTA G. 141.

- «Sulle reazioni cromatiche dei molibdeno-cianuri». BARBIERI G. A. 148.
- «Decomposizione catalitica dell'alcool cetilico». SANDONNINI C. e BEZZI S. 154.
- «Pile di ossidazione e riduzione di cloriti alcalini». LEVI G. R. e GHIRON D. 158.
- «Ricerche sulle γ -triazine. Sintesi di due aralchil-amino-tiol-triazine». OSTROGOVICH A. e GALEA V. 162.
- «Selenmercaptano metilico». BARONI A. 234.
- «Ricerche intorno all'Oleostene. (Idrocarburo contenuto nel frutto d'Olivo)». SANI G. 238.
- «Ricerche per la concentrazione e l'isolamento dell'elemento di numero atomico 61». ROLLA L. 270.
- «Sull'ossidazione dei derivati propenilici con i diazocomposti». QUILICO A. 341.
- «Scoperta dell'acido borico nella vernice dei vasi sigillati aretini». NASINI R. 361.
- «Sulla decomposizione anomala del tetrazoderivato della 2,2'-diammina 1,1'-dinafite». CORBELLINI A. e BARBARO L. 445.
- «Spettrochimica delle soluzioni di acido borico in glicerina». MORELLI M. 451.
- «Reazione tra composti organici e minerali. - I. Solfuri naturali ed alcuni composti aciclici». DE FAZI R. e HEMMELER A. 583.
- «Deposizione elettrolitica del cromo dal cromossalato ammonico». MAZZUCHELLI A. 587.
- «Prodotti di condensazione tra glucosio e p-toluidina». AMADORI M. 681.

Chimica-fisica. — «Metodo di calcolo per esperienze su la distillazione». BOZZA G. 675.

- «Sulla importanza della forma cristallina nella formazione delle soluzioni solide. - VII. Analisi termica dei sistemi SrCl_2 — FeCl_2 , SrCl_2 — CoCl_2 , ZnCl_2 — FeCl_2 ,

ZnCl_2 — CoCl_2 anidri». FERRARI A. e INGANNI A. 668.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Nazionale *Giulio Fano*. BORTAZZI F. 484.

- Commemorazione del Socio *Luigi Cremona*. CASTELNUOVO G. 613, 619.

F

Fisica. — «Sul funzionamento di alcuni apparecchi ad insufflazione di gas». BOZZA G. 47, 136.

- «Sulla determinazione della tensione del vapore sul ghiaccio a temperature basse». DEI C. 119.
- «Ricerca di un analogo termico dell'effetto Barkhausen». DEL NUNZIO B. 125.
- «Un circuito emittente treni d'onda discontinui». LA ROSA M. e PETRUCCI G. 199.
- «Sull'effetto Ramàn dell'acetilene». SIGRÈ E. 226.
- «Onde e corpuscoli». TIMPANARO S. 334.
- «Sopra l'elettrodinamica quantistica». FERMI E. 431.
- «Metodo semplice per il calcolo di una lente piano-convessa asferica». PACCCELLA G. B. 436.
- «Calcolo della risultante e del momento risultante delle pressioni elettrostatiche, in un campo piano, con formule analoghe a quelle idrodinamiche del Blasius». MASOTTI A. 439.
- «L'effetto Raman nell'acqua pura e in alcune soluzioni». BRUNETTI R. e OLLANO Z. 444, 523.
- «Il condensatore elettrico formato da un filo rettilineo fra due piani paralleli». MASOTTI A. 519.
- Rettifica alla Nota su: «L'effetto "Hall" per i metalli Ni, Fe e Cu in campi magnetici deboli». BOSSA E. 582.
- «Sulla formazione dello ione molecolare di elio». MAJORANA E. 583.
- «La misura fotografica della lunghezza delle righe spettrali». OCCHIALINI G. 583.
- «Sulla efficienza fotometrica e la lumi-

nosità degli strumenti ottici». RONCHI V. 583, 663.

Fisica. — «Effetto Raman e polimerizzazione dell'acqua a varie temperature». SPECCHIA O. 583, 659.

Fisica-matematica. — «Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale». GRAFFI D. 129.

— «Alcune considerazioni sulla teoria della trasmissione del calore per convezione forzata». GRAFFI D. 229, 336.

Fisiologia. — «Sul potere moderatore del tessuto nervoso centrale». MITOLO M. 246.

— «Curva idremica normale (a digiuno) in diversi esercizi fisici di breve durata». BRACALONI L. 252.

— «Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia». FORTI C. 257.

— «Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia. Escisione totale o parziale e funzioni sessuali». FORTI C. 345.

— «Ossigeno e funzioni centrali nervose». MITOLO M. 472.

— «Sulla escisione dei vasi e dei nervi dell'ovaia. Escisione totale o parziale e metabolismo». FORTI C. 477.

— «Variazione dei tassi alcoolemico ed idremico in seguito a somministrazione di determinate dosi di alcool». GALAMINI A. 483.

— «Il ricambio materiale del sistema nervoso centrale. III: La eliminazione della colesterina totale». MITOLO M. 532.

G

Geodesia. — «Sopra alcune formule per le correzioni topografiche nei rilievi eötvössiani». BOAGA G. 109.

Geofisica. — «Ancora sulle caratteristiche fisiche della pianura marginale appenninica modenese». BELLUIGI A. 112.

Geologia. — «Nuovo genere e nuove specie di Artiodattili dell'oligocene veneto». DAL PIAZ GIAMBATTISTA. 61.

— «Di una peculiare asimmetria dei fisteridi (asimmetria emapofisaria) e delle

sue relazioni con l'asimmetria cranica». RICHARD C. 165.

Ceologia. — «Gli Strofomenidi del Permiano del bacino del Sosio (Palermo)». RUIZ C. 588.

— «Su di un nuovo genere di Corallinacea fossile dell'oligocene ligure». AIROLDI M. 590, 681.

M

Matematica. — «Sopra le superfici algebriche trasformabili in rigate». ENRIQUES F. 3.

— «Parallelismo generalizzato». BARBA G. 6.

— «Rotazione e divergenza di un vettore; gradiente di un'omografia in coordinate curvilinee generali». ODONE F. 11.

— «Ancora sulla derivazione parziale dei tensori». PASTORI M. 17.

— «Sopra una classe di varietà cicliche». CATTANEO P. 23.

— «Expression générale de la solidarité entre le problème du minimum d'une intégrale et l'équation correspondante d'Hamilton-Jacobi». BOULIGAND M. G. 27.

— «Pseudolimiti di funzioni, pseudocontinuità ecc.». ANDREOLI G. 31.

— «Sulle linee di curvatura e sulle geodetiche di una superficie». MANARINI M. 36.

— «Sur les suites de M. Fubini». FINIKOFF S. 41.

— «Pseudo-integrali e pseudo-derivate». ANDREOLI G. 81.

— «Derivazione parziale dei tensori in relazione con la loro rappresentazione intrinseca e parzialmente intrinseca». PASTORI M. 85.

— «Sur l'ultraconvergence (Ueberkonvergenz) de certaines séries de Dirichlet». BERNSTEIN V. 91.

— «Singularités des solutions d'une classe d'équations intégrales». RADU BADESCO M. 96.

— «Sulle linee asintotiche sopra a una superficie». MANARINI M. 99.

— «Tensori quintupli emisotropi». CISOTTI U. 195.

Matematica. — «Sopra un teorema fondamentale di Analisi». MAMMANA G. 203.

— «Contributo al calcolo delle velocità critiche degli alberi motori». NASTA M. 209.

— ««Tavola del potenziale di una lamina magnetica con orlo circolare». PELINI B. 216.

— «L'Universo di de Sitter». CASTELNUOVO G. 263.

— «Sulle geodetiche assolute delle superficie a metrica indefinita». BARBA G. 272.

— «Le funzioni caratteristiche di legge istantanea». DE FINETTI B. 278.

— «Sulla curvatura media delle superficie». PELOSI L. 283.

— «Encore sur le théorème de Cauchy». ČECH E. 286.

— «Risoluzione, nel campo delle matrici complesse, di una qualsiasi equazione analitica a coefficienti numerici». AMANTE S. 290.

— «I massimi e minimi dei funzionali analitici reali». FANTAPPIÉ L. 296.

— «La congruence R ayant deux surfaces gauches pour les deux nappes de sa surface focale». FINIKOFF S. 302.

— «Osservazioni complementari sulla mia Nota: "Metodo generale per l'analisi delle periodicità nei diagrammi statistici e sperimentali"». VERCELLI F. 351.

— «Sulle matrici che soddisfano una data equazione algebrica». AMANTE S. 363.

— «Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità». DE FINETTI B. 367.

— «Sui tensori isotropi: relazione fra le componenti». PASTORI M. 374.

— «Sui multilateri sghembi connessi». PIAZZOLLA-BELOCH M. 380.

— «Une démonstration du théorème de Jordan». ČECH E. 386.

— «Sur la notion de la moyenne». KOLMOGOROFF A. 388.

— «Sur une généralisation de la sommation de Cesàro». OBRECHKOFF N. 391.

— «Sur quelques points de géométrie infinitesimale directe». RABATÉ G. 395.

Matematica. — «Sulle coordinate geodetiche». HLAVATÝ V. 400, 502.

— «Sur la courbure des variétés non-holonomes». HLAVATÝ V. 509, 566.

— «Sur quelques problèmes aux limites de la théorie du potentiel logarithmique». OKHLOPKOVA E. 400, 558.

— «Espressione generale dei tensori isotropi». PASTORI M. 499.

— «Sezioni piane di un corpo e direttrici ortobariche». LEVI-CIVITA T. 535.

— «Sulle forme differenziali quadratiche specializzate». BORTOLOTTI E. 541.

— «Metrica e fondamenti di calcolo differenziale assoluto in uno spazio funzionale continuo». CONFORTO F. 547.

— «Sulle funzioni metaarmoniche in n variabili». NICOLESCO M. 553.

— «Application de la construction de Cantor-Minkowski à l'analyse des ensembles discontinus». BOULIGAND G. e RABATÉ G. 574, 654.

— «Sur les courbes des variétés non-holonomes». HLAVATÝ V. 574, 647.

— «Sull'applicazione del calcolo degli operatori funzionali alla riduzione di equazioni integrali di Volterra». ŠBRANA F. 574.

— «Une simple démonstration de la formule de l'écart géodésique». WUNDHEILER A. 574, 644.

«A proposito della Nota del dottor Manarini "Sulla curvatura media ecc."». BURGATTI P. 625.

— «Calcolo dei sistemi multipli: Derivazione isotropa». FINZI B. 631.

— «Sulla curvatura media delle superficie e sugli operatori lungo una linea». MANARINI M. 639.

— «Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata». BORTOLOTTI E. 659.

Meccanica. — «Problemi della dinamica del binario». KRALL G. 223.

— «Sul problema dinamico di un qualsivoglia sistema vincolato ridotto all'analogo problema, relativo ad un sistema libero». GUGINO E. 307.

— «Sulle deformazioni finite dei sistemi continui». SIGNORINI A. 312.

Meccanica. — « Moti rigidi negli spazi generalizzati ». CABRAS A. 316.

— « Vortice rettilineo in un canale a sponde piane parallele ». MASOTTI A. 321.

— « Les transformations canoniques de glissement et leur application à l'optique géométrique ». CARATHÉODORY C. 353.

— « Sulla estensione del teorema del Morera al moto dei sistemi a legami reversibili ». GUGINO E. 401.

— « Estensione del paradosso di D'Alembert e del teorema di Kutta-Joukowski ai profili ad arco di cerchio ». POGGI L. 404.

— « Le azioni dinamiche di una corrente circolatoria su profili cuspidati ». PISTOLESI E. 409.

— « Sulla meccanica dei sistemi continui ». SIGNORINI A. 411.

— « Sulla meccanica dei corpi rigidi negli spazi generalizzati ». CABRAS A. 416.

— « Velocità critiche di masse pesanti su di un binario ». KRALL G. 419, 510.

— « Sulle vibrazioni dei sistemi reticolari elastici e sul colpo d'ariete nelle condotte multiple ». VOLTERRA E. 420.

Meccanica. — « Sur une classe de mouvements centrales ». SAKELLARIOU N. 514.

— « Una osservazione sull'equazione del moto di un corpo di massa variabile ». GRAFFI D. 575.

— « Sul profilo delle pile da ponte ». SIGNORINI A. 579.

— « Perturbazione prodotta da più sfere rigide in un mezzo elastico in equilibrio ». VOLTERRA E. 659.

Meteorologia. — « Sul coefficiente di correlazione ». BILANCINI R. 426.

— « Sul moto delle masse d'aria nell'atmosfera ». LOMBARDINI M. 114.

Mineralogia. — « Pisoliti poliedrici di magnesite e di dolomite ». RODOLICO F. 457.

P

Personale accademico. — 488, 619.

Presentazione di libri. — 488, 489, 619.

Presentazione di note e memorie. — 620.

Presentazione di plichi suggellati. — 489, 620.

N. P.



3 8198 304 934 704

UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

